

BÀI TẬP TỰ RÈN LUYỆN Ở NHÀ DÀNH CHO HỌC SINH KHỐI 12

NGUYÊN HÀM

Công Thức	Áp dụng	Vận dụng
$1. \int 0 dx = C$ $2. \int dx = x + C$ $3. \int k \cdot dx = kx + C$ $4. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$ $5. \int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$ $6. \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ $7. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$ $8. \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$ $9. \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C$ $10. \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ $11. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C$ $12. \int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ $13. \int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$ $14. \int e^x dx = e^x + C$ $15. \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ $16. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $17. \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$ $18. \int \cos x dx = \sin x + C$ $19. \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ $20. \int \sin x dx = -\cos x + C$ $21. \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ $22. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $23. \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$ $24. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ $25. \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$	Tính: $1. \int x^4 dx =$ $2. \int (x^5 - 2x^4 + x - 3) dx =$ $3. \int (x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 1) dx =$ $4. \int \frac{x^2 - 2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx =$ $5. \int (2x-5)^7 dx =$ $6. \int \frac{1}{(2x-5)^7} dx =$ $7. \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^7} \right) dx =$ $8. \int \frac{dx}{5x-6} =$ $9. \int \frac{dx}{\sqrt{5x-6}} =$ $10. \int \sqrt{3-4x} dx =$ $11. \int \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right) dx =$ $12. \int e^{5-3x} dx =$ $13. \int \frac{dx}{e^{-4x+2}} =$ $14. \int 5^x dx =$ $15. \int 3^{1-2x} \cdot 4^{x+1} dx =$ $16. \int \frac{1}{5^x} \left(\frac{(\sqrt{5})^{2x+4}}{3x-2} + 4^{2x} \right) dx =$ $17. \int (\sin x + \cos 3x) dx =$ $18. \int \sin \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3} \right) dx =$ $19. \int \frac{dx}{\sin^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)} =$ $20. \int \frac{dx}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{2} \right)} =$ $21. \int \frac{1}{\cos x} \left(1 - \sin^2 x - \frac{1}{\cos x} \right) dx =$ $22. \int (2 + \tan^2 x) dx =$ $23. \int \frac{e^{2x} + 1}{\sqrt{e^x}} dx =$ $24. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} =$	Tính: $1. \int \sin^2 2x dx =$ $2. \int \cos^2 3x dx =$ $3. \int \tan^2 2x dx =$ $4. \int \cot^2 x dx =$ $5. \int \sin 3x \cdot \sin x dx =$ $6. \int \sin 7x \cdot \cos x dx =$ $8. \int \cos 3x \cdot \cos 5x dx =$ $9. \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx =$ $10. \int \frac{1}{1 - \cos x} dx =$ $11. \int \frac{1}{1 + \sin 2x} dx =$ $12. \int \frac{1}{1 - \sin 5x} dx =$ $13. \int \frac{1}{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2} dx =$ $14. \int \frac{1}{(\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x)^2} dx =$ $15. \int \frac{2x+1}{2x-3} dx =$ $16. \int \frac{x+3}{1-3x} dx =$ $17. \int \frac{3x^2+3}{x+2} dx =$ $18. \int \frac{dx}{x^2+x-6} =$ $19. \int \frac{3dx}{2x^2+x-15} =$ $20. \int \frac{(2x+1)dx}{2x^2+x-10} =$ $21. \int \frac{(x+3)dx}{x^2-5x+6} =$ $22. \int \frac{dx}{x^2-6x+9} =$ $23. \int \frac{dx}{\sqrt{9x+2} + 3\sqrt{x-1}} =$ $24. \int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{2x+1} + (2x+1)\sqrt{2x+3}} =$

PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

Công Thức	Phương pháp tính nguyên hàm
1. $\int 0 dx = C$ 2. $\int dx = x + C$ 3. $\int k \cdot dx = kx + C$ 4. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$ 5. $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$ 6. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ 7. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$ 8. $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$ 9. $\int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C$ 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$ 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C$ 12. $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ 13. $\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$ 14. $\int e^x dx = e^x + C$ 15. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$ 16. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ 17. $\int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$ 18. $\int \cos x dx = \sin x + C$ 19. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$ 20. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ 21. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$ 22. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ 23. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$ 24. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$ 25. $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$ 26. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$ 27. $\int \cot x dx = \ln \sin x$ 28. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	I. Phương pháp đổi biến số 1. Phương pháp chung: * Nếu biết $\int f(x) dx = F(x) + C$ * Gặp $F = \int f[u(x)] \cdot u'(x) \cdot dx$ Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) \cdot dx$ Ta có: $F = \int f(t) \cdot dt$ 2. Phân dạng: Dạng 1. a) $\int f(ax^2 + bx + c) \cdot (2ax + b) dx$. Đặt $t = ax^2 + bx + c \Rightarrow dt = (2ax + b) dx \Rightarrow mdt = (2amx + mb) dx$. b) $\int (ax+b)^\alpha \cdot x^n dx$. Đặt $t = ax+b \Rightarrow t = adx \Rightarrow \frac{dt}{a} = dx ; (x = \frac{t-b}{a})$. c) $\int (ax^n + b)^\alpha \cdot x^{kn} \cdot x^{n-1} dx$. Đặt $t = ax^n + b \Rightarrow dt = nax^{n-1} dx ; (x^n = \frac{t-b}{a})$. d) $\int f(\sqrt[n]{ax^m + b}) \cdot x^{km} \cdot x^{m-1} dx$. Đặt $t = \sqrt[n]{ax^m + b} \Rightarrow t^n = ax^m + b \Rightarrow nt^{n-1} dt = max^{m-1} dx ; (x^m = \frac{t^n - b}{a})$. Dạng 2. a) $\int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$. Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. b) $\int f(e^x) e^x dx$. Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Dạng 3. a) $\int f(\sin x) \cdot \cos x dx$. Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x \cdot dx$. b) $\int f(\cos x) \cdot \sin x dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x \cdot dx$. Lưu ý: * $\int \cos^{2n+1} x dx = \int \cos^{2n} x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx$. * $\int \sin^{2n+1} x dx = \int \sin^{2n} x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^n \sin x dx$. c) $\int f(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. d) $\int f(\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$. Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = \frac{-1}{\sin^2 x} dx$. Một số công thức lượng giác thường dùng 1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$; $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha$ 2) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$; $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ 3) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$; $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ 4) $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$; $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ 5) $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ 6) $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ 7) $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

II. Phương pháp nguyên hàm từng phần.

1. Phương pháp chung:

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

Viết gọn: $\int u dv = uv - \int v du$

2. Phân dạng:

Dạng 1. $F = \int P(x).R(x)dx$. (**P(x)** là đa thức)

Trong đó:

$$R(x) = e^{ax+b} \left\{ \sin(ax+b); \cos(ax+b); \frac{1}{\sin^2(ax+b)}; \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \right\}$$

$$\begin{cases} u = P(x) \\ dv = R(x)dx \end{cases}$$

Dạng 2. $\int f(x). \ln(ax+b)dx$ $\begin{cases} u = \ln(ax+b) \\ dv = f(x)dx \end{cases}$

BÀI TẬP

Bài 1. Tính:

a) $F = \int (x^2 - 2x + 3)^4 (4x - 4)dx$. b) $F = \int \frac{10x+5}{x^2+x+2} dx$.

c) $F = \int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2-3x+3}}$. d) $F = \int (x-2)^{10} x dx$.

e) $F = \int \frac{x^2}{(2x+1)^5} dx$. f) $F = \int \left(\frac{x^2}{x^5+1} \right)^2 dx$.

g) $F = \int x^3 \sqrt{x^2+1} dx$. h) $F = \int x^3 \sqrt{x^2+2} dx$.

i) $F = \int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1}} dx$. j) $F = \int \frac{dx}{3+2\sqrt{2x+1}}$.

k) $F = \int \frac{dx}{2x-5+\sqrt{2x+1}}$. l) $F = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$.

Bài 2. Tính:

a) $F = \int (2\sin^2 x + 1) \cos x dx$. b) $F = \int \frac{\sin x dx}{2\cos x - 3}$.

c) $F = \int \frac{\sin 2x dx}{2\sin x - 5}$. d) $F = \int \sin^3 x dx$

e) $F = \int \frac{(\sin^2 x \cos x - \sin 2x) dx}{2\sin x + 1}$. f) $F = \int \cos^5 x dx$.

g) $F = \int \frac{dx}{(2\tan x + 3)\cos^2 x}$. h) $F = \int \frac{\cot x dx}{\sin^2 x}$.

i) $F = \int \frac{\cot^3 x}{\cos^2 x} dx$. j) $F = \int (\tan^3 x + \tan x) dx$.

k) $F = \int \cot^3 x dx$. l) $F = \int \frac{(3\tan x + 2) dx}{\cos x(\sin x + 2\cos x)}$.

m) $F = \int \frac{1}{\sin^4 x} dx$. n) $F = \int \frac{dx}{\cos^6 x}$.

o) $F = \int \cot^4 x dx$. p) $F = \int \tan^5 x dx$

Bài 3. Tính:

a) $F = \int \frac{(\sin x - \cos x) dx}{\sin x + \cos x}$. b) $F = \int \frac{dx}{\sin 2x}$.

c) $F = \int (2\sin^2 3x + 3) \cos 3x dx$. d) $F = \int \frac{dx}{\cos x}$.

e) $F = \int \frac{\sin 3x dx}{2\cos 3x + 5}$. f) $F = \int \sin^3 2x dx$.

g) $F = \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\sin^2 x + 3\cos^2 x}}$. h) $F = \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2\cos^2 x + 5}}$.

Bài 4. Tính:

a) $F = \int (2\ln x + 3) \cdot \frac{dx}{x}$. b) $F = \int \frac{dx}{x(3\ln x - 1)}$.

c) $F = \int \frac{(2\ln x + 1) dx}{x(\ln^2 x - 2\ln x - 3)}$. d) $F = \int \frac{\sqrt{\ln x + 3} dx}{x}$.

e) $F = \int \frac{\ln x \cdot \sqrt{2\ln^2 x + 1}}{x} dx$. f) $F = \int \frac{\log x}{x} dx$.

Bài 5. Tính:

a) $F = \int \frac{e^x dx}{2e^x + 1}$. b) $F = \int \frac{3e^{2x} + e^x}{3e^x - 1} dx$.

c) $F = \int \frac{dx}{e^x - 4e^{-x}}$. c) $F = \int \frac{(e^x + 1) dx}{e^x - 6e^{-x} + 1}$.

Bài 6. Tính:

a) $F = \int x \sin x dx$. b) $F = \int x \sin 2x dx$.

c) $F = \int (x+1) \cos x dx$. d) $F = \int x e^{2x+1} dx$.

e) $F = \int x \cos(2x - \frac{\pi}{3}) dx$. f) $F = \int (2x+3) e^x dx$.

g) $F = \int \frac{2x-1}{e^x} dx$. h) $F = \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

i) $F = \int \frac{x dx}{\cos^2 2x}$. j) $F = \int \frac{x dx}{1 + \cos 2x}$.

k) $F = \int \frac{(2x+1) dx}{1 - \cos 2x}$. l) $F = \int \frac{x dx}{\sin^2(x - \frac{\pi}{4})}$.

m) $\int x^2 e^x dx$. n) $\int \sin x \cdot e^x dx$.

Bài 7. Tính:

a) $F = \int x \ln x dx$. b) $F = \int x \ln(x+2) dx$.

c) $F = \int \ln \sqrt[3]{2x+1} dx$. d) $F = \int \ln^2 x dx$.

e) $F = \int \frac{x^2+1}{x^2} \ln x dx$. f) $F = \int x \ln^2 x dx$.

TÍCH PHÂN

1. Khái niệm tích phân

a) Cho hàm số f liên tục trên K và $a, b \in K$. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì $F(b) - F(a)$ đgl

tích phân của f từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

b) Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x , tức là:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots = F(b) - F(a)$$

c) **Ý nghĩa hình học:** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. Tính chất của tích phân

$$a) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$b) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$c) \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \quad (k: \text{const})$$

$$d) \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$e) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$f) \text{ Nếu } f(x) \geq 0 \text{ trên } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$g) \text{ Nếu } f(x) \geq g(x) \text{ trên } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

3. Phương pháp tính tích phân

$$a) \text{ Phương pháp đổi biến số dạng 1: } \int_a^b f[u(x)] \cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

Trong đó: $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên K , $y = f(u)$ liên tục và hàm hợp $f[u(x)]$ xác định trên K , $a, b \in K$.

b) **Phương pháp tích phân từng phần:** Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K , $a, b \in K$

$$\text{thì: } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Chú ý: Cần xem lại các phương pháp tìm nguyên hàm. Trong phương pháp tích phân từng phần, ta

cần chọn sao cho $\int_a^b v du$ dễ tính hơn $\int_a^b u dv$.

BÀI TẬP

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^2 \frac{x^2 - 2x}{x^3} dx$

b) $\int_0^1 \frac{x^3 + x + 1}{x + 1} dx$

c) $\int_0^1 \frac{(4x + 11) dx}{x^2 + 5x + 6}$

d) $\int_0^2 \frac{2x + 7}{2x^2 + x - 15} dx$

e) $\int_0^1 \frac{x}{3x^2 + x - 14} dx$

f) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx$

g) $\int_0^\pi \sin(2x + \frac{\pi}{6}) dx$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 3x + \cos 2x) dx$

i) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \tan^2 x dx$

j) $\int_1^2 e^x (1 - \frac{e^{-x}}{x}) dx$

k) $\int_0^1 \frac{e^x}{2^x} dx$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x}$

Bài 2. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} dx}{\cos^2 x}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x dx$

d) $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$

e) $\int_0^1 \frac{1}{1 + e^x} dx$

f) $\int_0^1 \frac{x^3}{(1 + x^2)^3} dx$

g) $\int_0^1 \frac{x^5}{x^2 + 1} dx$

h) $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \ln x}{x} dx$

i) $\int_1^e \frac{4 \ln x}{x(2 \ln x + 1)} dx$

Bài 3. Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$

c) $\int_0^1 (x - 2)e^{2x} dx$

d) $\int_{-1}^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$

e) $\int_1^e x \ln x dx$

f) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx$