

Chủ đề**TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ**

oOoOo

A. MỞ ĐẦU:

- 1) Trong chủ đề trước, chúng ta đã tìm hiểu về việc tính tích phân bằng cách sử dụng nguyên hàm. Công việc tưởng như khá đơn giản: **TÌM NGUYÊN HÀM→THAY CẬN VÀO→RÚT GỌN THÀNH KẾT QUẢ**. Tuy nhiên trong 1 số bài tập, việc tìm trực tiếp nguyên hàm lại là công việc không dễ dàng chút nào.

Thử quan sát thí dụ sau đây: Tính $I_1 = \int_0^1 x(x^2 - 1)^3 dx$

- ✓ Có thể chọn cách khai triển hằng đẳng thức $(x^2 - 1)^3$ và làm như sau:

$$I_1 = \int_0^1 x(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) dx = \int_0^1 (x^7 - 3x^5 + 3x^3 - x) dx = \left(\frac{x^8}{8} - \frac{3x^6}{6} + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{-1}{8}.$$

- ✓ Tuy nhiên nếu sửa đề thành $I_2 = \int_0^1 x(x^2 - 1)^{30} dx$ thì cách làm trên rất khó thực hiện vì việc khai triển $(x^2 - 1)^{30}$ phải sử dụng Nhị thức Newton và kết quả sẽ rất dài.

- 2) Trong bài học hôm nay, chúng ta sẽ tìm hiểu về 1 phương pháp tính tích phân bằng cách chuyển những tích phân có dạng phức tạp, công kênh ban đầu thành dạng gọn hơn, để làm hơn: **PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ**.

B. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT $t = \varphi(x)$:**1) Định lý 1: (SGK)**

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Đặt $t = \varphi(x)$ với $\varphi(x)$ có đạo hàm liên tục trên

$$[a; b] \text{ và } \varphi(x) \in [\alpha; \beta]. \text{ Khi đó: } I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g\left(\underbrace{\varphi(x)}_t\right) \cdot \underbrace{\varphi'(x) dx}_{dt} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t) dt.$$

2) **Chú ý:** Khi giải bài tập, ta thường sử dụng định lý trên dưới dạng sau đây

$$\text{Cho } I = \int_a^b f(x) dx.$$

Bước 1: Đặt $t = \varphi(x)$. Tính $dt = \varphi'(x)dx$.

Bước 2: Đổi cận tích phân: $x = a \rightarrow t = \varphi(a) = c$; $x = b \rightarrow t = \varphi(b) = d$.

Bước 3: Chuyển thành $I = \int_c^d g(t) dt$.

Bước 4: Tính tiếp bằng công thức Newton–Leibnitz.

3) **Thí dụ 1:** Tính các tích phân sau đây

a. $I = \int_0^1 x(x^2 - 1)^{30} dx.$

✓ Nhận xét: $I = \int_0^1 \underbrace{x}_{x dx} \underbrace{(x^2 - 1)^{30}}_{(x^2 - 1)' = 2x} dx$ và $(x^2 - 1)' = 2x$ nên đặt $t = x^2 - 1 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$.

✓ Đổi cận:

x	0	1
t	-1	0

✓ $I = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 t^{30} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{31}}{31} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{62}.$

b. $I = \int_4^{12} \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}} dx$

CÁCH 1:

✓ Nhận xét: $I = \int_4^{12} (1-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$ và $(\sqrt{2x+1})' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ nên đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$.

✓ $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2} \Rightarrow 1-x = \frac{3-t^2}{2}.$

✓ Đổi cận:

x	4	12
t	3	5

✓ $I = \frac{1}{2} \int_3^5 (3-t^2) dt = \frac{1}{2} \cdot \left(3t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_3^5 = \frac{-40}{3}.$

CÁCH 2: (Vi phân 2 vế)

✓ Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow 2tdt = 2dx \Rightarrow tdt = dx.$

✓ Thay vào và tính tiếp như cách 1.

c. $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cdot \cos^2 x dx$

✓ Nhận xét: $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x dx$ và $(\cos x)' = -\sin x$ nên đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

✓ Đổi cận:

x	$\pi/2$	π
t	0	-1

✓ $I = -\int_0^{-1} t^2 dt = \int_{-1}^0 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}$.

d. $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

✓ Nhận xét: $I = \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ nên đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

✓ Đổi cận:

x	1	e
t	0	1

✓ $I = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

e. $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$

✓ Nhận xét: $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x(e^x + 1)} \cdot e^x dx$ và $(e^x + 1)' = e^x$ nên đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$.

✓ Đổi cận:

x	0	1
t	2	$e + 1$

✓ $I = \int_2^{e+1} \frac{1}{t(t-1)} dt = \int_2^{e+1} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \right) dt = (\ln|t-1| - \ln|t|) \Big|_2^{e+1} = \ln \frac{2e}{e+1}$.

C. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ BẰNG CÁCH ĐẶT $x = \varphi(t)$:

1) Định lý 2: (SGK)

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Đặt $x = \varphi(t)$ với $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha; \beta]$;

$\varphi(t) \in [a; b], \forall t \in [\alpha; \beta]; \varphi(\alpha) = a; \varphi(\beta) = b$. Khi đó: $I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$.

2) **Chú ý:** Khi giải bài tập, ta thường sử dụng định lý trên dưới dạng sau đây

$$\text{Cho } I = \int_a^b f(x) dx.$$

Bước 1: Đặt $x = \varphi(t)$. Tính $dx = \varphi'(t)dt$.

Bước 2: Đổi cận tích phân: $\varphi(\alpha) = a \Rightarrow \alpha; \varphi(\beta) = b \Rightarrow \beta$

Bước 3: Chuyển thành $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$.

Bước 4: Tính tiếp bằng công thức Newton–Leibnitz.

3) **Thí dụ 2:** Tính các tích phân sau đây

a. $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

✓ Đặt $x = \sin t \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) \Rightarrow dx = \cos t dt$.

✓ $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t \left(\text{do } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right)$.

✓ Đổi cận:

x	0	1
t	0	$\pi/2$

✓ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

✓ **Nhận xét:** Trong đề có $\sqrt{1-x^2}$ nên ta đặt $x = \sin t$ để làm mất dấu căn.

b. $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

✓ Đặt $x = \tan t \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$.

✓ Đổi cận:

x	0	1
t	0	$\pi/4$

✓ $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$.

D. MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI BÀI TẬP VỀ PP ĐỔI BIẾN SỐ:

- ✓ Phương pháp đổi biến số là 1 công cụ rất hay trong tích phân. Khi giải bài tập, HS cần lưu ý 2 điều quan trọng sau đây:

1) **Đặt đúng** biến phụ t .

2) **Đổi 2 cận** tích phân (nhiều HS hay quên công đoạn này!).

- ✓ Dưới đây là 1 số kỹ thuật đặt biến phụ cần lưu ý: (với $c \neq 0$; Q là hàm hữu tỉ)

1) $I = \int_a^b Q(x; \sqrt{cx+d}) dx$: đặt $t = \sqrt{cx+d}$. (Thí dụ 1b)

2) $I = \int_a^b Q(x; \sqrt[3]{cx+d}) dx$: đặt $t = \sqrt[3]{cx+d}$.

3) $I = \int_a^b Q(\sin x; \cos x) dx$

• $Q(\sin x; -\cos x) = -Q(\sin x; \cos x)$: đặt $t = \sin x$.

• $Q(-\sin x; \cos x) = -Q(\sin x; \cos x)$: đặt $t = \cos x$. (Thí dụ 1c)

• $Q(-\sin x; -\cos x) = Q(\sin x; \cos x)$: đặt $t = \tan x$.

4) $I = \int_a^b Q(x; \sqrt{c^2 - x^2}) dx$: đặt $x = c \cdot \sin t \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right)$. (Thí dụ 2a)

5) $I = \int_a^b Q(x; c^2 + x^2) dx$: đặt $x = c \cdot \tan t \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right)$. (Thí dụ 2b)

E. BÀI TẬP VỀ NHÀ: Học sinh làm vào vở bài tập Giải tích những câu sau đây

- ✓ Bài 13, 14, 15, 16 trang 48 (Đề cương MK).

- ✓ Bài 17 (câu 1 → 10) trang 49 (Đề cương MK).

Học sinh trao đổi thêm với GV Toán của lớp để được hướng dẫn cụ thể !