

Chủ đề**PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG**

Qua bài học, học sinh nắm được:

- Cách viết phương trình tổng quát của một đường thẳng.
- Liên hệ giữa vector pháp tuyến và hệ số góc của đường thẳng, ý nghĩa hình học của hệ số góc.

A. LÝ THUYẾT:**1. Vector pháp tuyến (VTPT) của đường thẳng:**

Vector $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có **giá vuông góc** với đường thẳng (Δ) được gọi là **vector pháp tuyến** của đường thẳng (Δ) .

Nhận xét:

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của đường thẳng (Δ) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một VTPT của (Δ) . Do đó một đường thẳng có vô số VTPT.
- Một đường thẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm của đường thẳng và một VTPT của nó.
- VTPT và vector chỉ phương (VTCP) của một đường thẳng là vuông góc với nhau, vì vậy nếu đường thẳng (Δ) có VTPT $\vec{n} = (A; B)$ thì (Δ) sẽ có một VTCP là $\vec{a} = (B; -A)$ hay $\vec{a} = (-B; A) \dots$ và ngược lại.

(Sử dụng tính chất $\vec{n} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ để suy ra, cách dễ nhớ là ta đảo vị trí A và B rồi đổi dấu một trong hai)

2. Phương trình tổng quát (PTTQ) của đường thẳng:Định lý 1:

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (A; B)$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$) làm VTPT. Điều kiện cần và đủ để điểm $M(x; y)$ nằm (Δ) là:

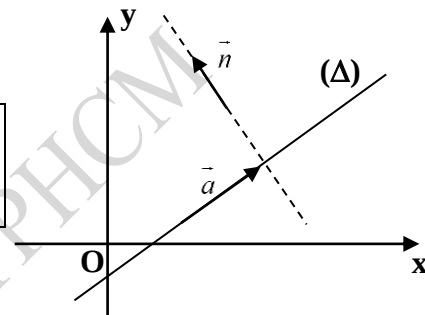
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (1)$$

Chứng minh: Học sinh tham khảo trong sách giáo khoa hình học.

Nhận xét: Ta có $(1) \Leftrightarrow Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$ với $C = -Ax_0 - By_0$.

Định nghĩa:

Phương trình $Ax + By + C = 0$, với $A^2 + B^2 \neq 0$, được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.



Như vậy, để viết PTTQ của đường thẳng (Δ) thì ta thường có 2 cách trình bày sau:

Cách 1: Ta tìm được tọa độ 1 điểm nằm trên (Δ) và 1 VTPT của (Δ) rồi thế vào (1), rút gọn (1) ta được PTTQ của đường thẳng.

Ví dụ 1: Trong mpOxy, viết phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ), biết rằng:

- a) (Δ) đi qua điểm $A(1; 2)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (4; 1)$.
- b) (Δ) đi qua điểm $B(1; 0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (-2; 5)$.
- c) (Δ) đi qua hai điểm $A(2;3), B(3;1)$.
- d) (Δ) là đường trung trực của đoạn thẳng MN với $M(2;-1), N(4;3)$.

Giải

a) Thế vào (1), ta được PTTQ của (Δ): $4(x-1)+1(y-2)=0 \Leftrightarrow 4x+y-6=0$

b) (Δ) có VTCP $\vec{u} = (-2; 5) \Rightarrow$ (Δ) có VTPT $\vec{n} = (5; 2)$, (Δ) đi qua $B(1; 0)$

$$\Rightarrow \text{PTTQ của } (\Delta): 5(x-1)+2(y-0)=0 \Leftrightarrow 5x+2y-5=0$$

(chú ý dùng nhận xét mối liên hệ giữa VTPT và VTCP)

c) (Δ) VTCP $\vec{AB} = (1; -2) \Rightarrow$ (Δ) có VTPT $\vec{n} = (2; 1)$, (Δ) đi qua $A(2; 3)$

$$\Rightarrow \text{PTTQ của } (\Delta): 2(x-2)+1(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y-7=0$$

d) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN , ta có:
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = 3 \\ y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow I(3; 1)$$

(Δ) đi qua $I(3; 1)$ và có VTPT $\vec{MN} = (2; 4)$ (vì (Δ) $\perp$ MN tại trung điểm I)

$$\Rightarrow \text{PTTQ của } (\Delta): 2(x-3)+4(y-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-5=0$$

Cách 2: Gọi PTTQ của (Δ) là $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$), sau đó dựa vào giả thiết để tìm A, B, C ; lưu ý cặp số A, B trước x, y chính là VTPT của (Δ). Khi trình bày theo cách 2, ta lưu ý nhận xét sau:

Nhận xét: Cho đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$

- o Nếu (Δ) // (d) thì PTTQ của (Δ) có dạng: $Ax + By + m = 0$ ($m \neq C$)

(vì khi 2 đường thẳng song song thì chúng sẽ có cùng vector pháp tuyến)

- Nếu $(\Delta) \perp (d)$ thì PTTQ của (Δ) có dạng: $Bx - Ay + n = 0$ hay $-Bx + Ay + n = 0$

(vì khi 2 đường thẳng vuông góc thì 2 VTPT cũng vuông góc hay hiểu một cách khác là VTPT của đường thẳng này là VTCP của đường thẳng kia)

Ví dụ 2: Trong mpOxy, cho điểm $A(-5;2)$ và đường thẳng $(d): 2x + y - 1 = 0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) , biết rằng:

- a) (Δ) đi qua A và song song với (d) .
b) (Δ) đi qua A và vuông góc với (d) .

Giải

Trong ví dụ 2, bài giải sẽ được trình bày theo 2 cách, học sinh có thể chọn cách nào cũng được.

a) Cách 1:

(d) có VTPT $\vec{n}_d = (2;1)$, vì $(\Delta) \parallel (d)$ nên (Δ) có VTPT $\vec{n}_\Delta = \vec{n}_d = (2;1)$, (Δ) đi qua $A(-5;2)$

$\Rightarrow$ PTTQ của $(\Delta): 2(x+5) + 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 8 = 0$ (nhận vì (Δ) không trùng (d))

Cách 2:

Vì $(\Delta) \parallel (d)$ nên PTTQ của (Δ) có dạng: $2x + y + m = 0$ ($m \neq -1$)

Vì (Δ) đi qua $A(-5;2)$ nên ta có: $2x_A + y_A + m = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-5) + 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 8$ (nhận)

Vậy PTTQ của $(\Delta): 2x + y + 8 = 0$

b) Cách 1:

(d) có VTPT $\vec{n}_d = (2;1) \Rightarrow (d)$ có VTCP $\vec{u}_d = (1;-2)$

Vì $(\Delta) \perp (d)$ nên (Δ) có VTPT $\vec{n}_\Delta = \vec{u}_d = (1;-2)$, (Δ) đi qua $A(-5;2)$

$\Rightarrow$ PTTQ của $(\Delta): 1(x+5) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 9 = 0$

Cách 2:

Vì $(\Delta) \perp (d)$ nên PTTQ của (Δ) có dạng: $x - 2y + n = 0$

Vì (Δ) đi qua $A(-5;2)$ nên ta có: $x_A - 2y_A + n = 0 \Leftrightarrow -5 - 2 \cdot 2 + n = 0 \Leftrightarrow n = 9$

Vậy PTTQ của $(\Delta): x - 2y + 9 = 0$

3. Các trường hợp riêng:

Trong mpOxy, cho đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ (2)

- Nếu $A = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow By + C = 0$. Khi đó (Δ) **song song hoặc trùng** với trục Ox .
- Nếu $B = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow Ax + C = 0$. Khi đó (Δ) **song song hoặc trùng** với trục Oy .
- Nếu $C = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow Ax + By = 0$. Khi đó (Δ) **đi qua gốc tọa độ** O .
- Nếu A, B, C đồng thời khác 0 thì (Δ) lần lượt cắt Ox và Oy tại hai điểm $A\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$ và $B\left(0; -\frac{C}{B}\right)$.

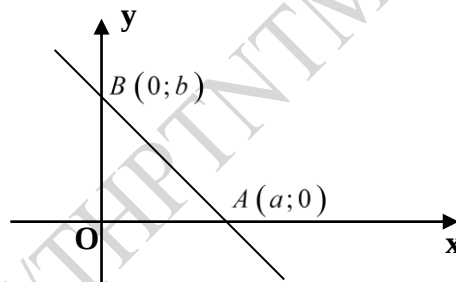
Khi đó phương trình của (Δ) có thể viết:

$$Ax + By = -C \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \text{ (3)}, \text{ với } a = -\frac{C}{A}, b = -\frac{C}{B}$$

Phương trình (3) được gọi là **phương trình theo đoạn chắn** của đường thẳng (Δ) .

Như vậy, nếu (Δ) đi qua hai điểm $A(a; 0), B(0; b)$ (hay (Δ) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm

$A(a; 0), B(0; b)$) thì (Δ) có phương trình là $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$ (với $ab \neq 0$).



Ví dụ 3: Trong mpOxy, viết phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm $A(-1; 0), B(0; 2)$.

Giải

Ta có: $A \in Ox, B \in Oy$ nên ta sử dụng **phương trình đường thẳng theo đoạn chắn**

$$\Rightarrow \text{PTTQ của } (\Delta): \boxed{\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1} \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$$

4. Liên hệ giữa VTPT và hệ số góc của đường thẳng:

Trong mpOxy, cho đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ (2)

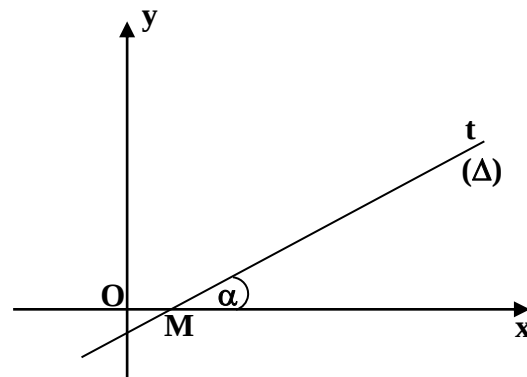
Nếu $B \neq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow y = kx + m$ (4), với $k = -\frac{A}{B}, m = -\frac{C}{B}$.

Khi đó, k là **hệ số góc** của (Δ) và (4) là **phương trình của (Δ) theo hệ số góc**.

Như vậy, nếu đường thẳng (Δ) có VTPT $\vec{n} = (A; B) (B \neq 0)$ thì (Δ) có hệ số góc $k = -\frac{A}{B}$.

Ý nghĩa hình học của hệ số góc:Xét đường thẳng (Δ) : $y = kx + m$

- Với $k \neq 0$, gọi M là giao điểm của (Δ) với trục Ox , Mt là tia của (Δ) nằm phía trên Ox . Khi đó, nếu α là góc hợp bởi hai tia Mx và Mt thì $k = \tan \alpha$.
- Khi $k = 0$ thì (Δ) song song hoặc trùng với trục Ox .

**Ví dụ 4:** Mỗi đường thẳng sau đây có hệ số góc bằng bao nhiêu? Hãy chỉ ra góc α tương ứng với hệ số góc đó.

- a) $(\Delta_1): 2x + 2y - 1 = 0$
- b) $(\Delta_2): \sqrt{3}x - y + 5 = 0$

Giải

- a) (Δ_1) có VTPT $\vec{n}_1 = (2; 2) \Rightarrow (\Delta_1)$ có hệ số góc $k_1 = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$.

(Ta có thể biến đổi $(\Delta_1): 2x + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = -2x + 1 \Leftrightarrow y = -x + \frac{1}{2} \Rightarrow (\Delta_1)$ có hệ số góc $k_1 = -1$)

- b) (Δ_2) có VTPT $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}; -1) \Rightarrow (\Delta_2)$ có hệ số góc $k_2 = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

(Ta có thể biến đổi $(\Delta_2): \sqrt{3}x - y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + 5 \Rightarrow (\Delta_2)$ có hệ số góc $k_2 = \sqrt{3}$)

Ví dụ 5: Trong mpOxy, viết phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $A(2;1)$ và có hệ số góc $k = 2$.

GiảiTa sử dụng phương trình của (Δ) theo hệ số góc.

- (Δ) có hệ số góc $k = 2 \Rightarrow (\Delta): y = 2x + m$
 - (Δ) đi qua $A(2;1) \Leftrightarrow y_A = 2x_A + m \Leftrightarrow 1 = 2.2 + m \Leftrightarrow m = -3$
- $\Rightarrow$ PTTQ của $(\Delta): y = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$

B. BÀI TẬP VỀ NHÀ: Học sinh làm bài 20, 21, 22, 23 trang 32, 33 trong Đề cương MK vào vở bài tập Hình học.

Học sinh trao đổi thêm với GV Toán của lớp để được hướng dẫn cụ thể !