

Chủ đề:**PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG****A. LÝ THUYẾT****1. VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG:**

Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là **vector pháp tuyến** của mặt phẳng (α) nếu nó nằm trên đường thẳng vuông góc với (α) .

Chú ý:

- Nếu $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của (α) thì $k\vec{n}$ cũng là vector pháp tuyến của (α) (Với $k \neq 0$), do đó một mặt phẳng có vô số các vector pháp tuyến và chúng cùng phương với nhau.
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm của mặt phẳng và một vector pháp tuyến của nó.
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vector không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

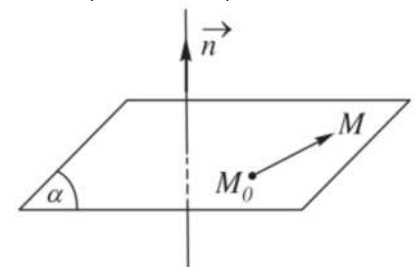
2. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG:

Định lý: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vector pháp tuyến (với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Điều kiện cần và đủ để $M(x; y; z)$ nằm trên mặt phẳng (α) là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

Chứng minh: Học sinh tham khảo SGK Hình 12.



Định nghĩa: Phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (2) với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) .

Ghi nhớ:

- $\vec{n} = (A; B; C)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) .
- Để viết phương trình của một mặt phẳng ta có thể dùng 1 trong 2 cách:
 - ❖ **Cách 1:** Xác định một điểm thuộc mặt phẳng, một vector pháp tuyến, sau đó áp dụng công thức (1) và rút gọn.
 - ❖ **Cách 2:** Gọi phương trình mặt phẳng có dạng (2) với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, sử dụng giả thiết để lập hệ phương trình tìm các ẩn A, B, C, D .

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt phẳng (α) biết:

- a) (α) đi qua điểm $M(1; 2; -4)$ và nhận $\vec{n} = (1; 3; 5)$ làm vector pháp tuyến.
- b) (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB biết $A(-3; 0; 2)$ và $B(1; 2; -2)$.
- c) (α) đi qua điểm $A(0; -1; 3)$ và song song với giá của hai vector $\vec{u} = (1; 1; -2)$ và $\vec{v} = (1; 0; 3)$.
- d) (α) đi qua ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 1; -2)$, $C(3; 2; -1)$.

Giải

Học sinh lưu ý: Để viết phương trình mặt phẳng, cần có tọa độ điểm thuộc mặt phẳng và tọa độ vector pháp tuyến. Vì thế cần chú ý giả thiết để xác định 2 yếu tố này.

a) Từ giả thiết ta có đủ hai yếu tố kể trên nên áp dụng công thức ngay thôi nhé!

(α) đi qua điểm $M(1; 2; -4)$ và nhận $\vec{n} = (1; 3; 5)$ làm vector pháp tuyến.

$$\Rightarrow (\alpha): 1.(x-1) + 3.(y-2) + 5.(z+4) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + 5z + 13 = 0.$$

b) Các em ôn lại kiến thức cũ: Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và vuông góc với đường thẳng AB . Từ đó dễ dàng tìm hai yếu tố cần xác định: Một điểm thuộc mp : chính là trung điểm của đoạn AB , một vector pháp tuyến của mp: chính là $\overrightarrow{AB}$.

Gọi I là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow I(-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{AB} = (4; 2; -4)$.

(α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB nên $(\alpha) \begin{cases} \text{qua } I \\ VTPT : \overrightarrow{AB} = (4; 2; -4) \end{cases}$

$$\Rightarrow (\alpha): 4(x+1) + 2(y-1) - 4z = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y - 4z + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 1 = 0.$$

c) Từ giả thiết ta chỉ cần tìm tọa độ vector pháp tuyến là đủ.

Vì (α) song song với giá của hai vector $\vec{u} = (1; 1; -2)$ và $\vec{v} = (1; 0; 3)$ không cùng phương nên tích có hướng của chúng là vector pháp tuyến của $mp(\alpha)$.

(α) đi qua điểm $A(0; -1; 3)$ và nhận $[\vec{u}, \vec{v}] = (3; -5; -1)$ làm vector pháp tuyến

$$\Rightarrow (\alpha): 3(x-0) - 5(y+1) - 1.(z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5y - z - 2 = 0$$

d) Từ giả thiết ta cũng chỉ cần tìm tọa độ vector pháp tuyến là đủ. Ta có 3 điểm A, B, C thuộc mặt phẳng nên cũng có thể tìm được cặp vector không cùng phương, có giá nằm trên (α) , ví dụ như $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, khi đó $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ là một vector pháp tuyến của (α) .

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; 1; -2) \\ \overrightarrow{AC} = (1; 2; -1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -4; -5)$$

(α) đi qua điểm $A(2; 0; 0)$, nhận vector $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (3; -4; -5)$ làm vector pháp tuyến

$$\Rightarrow (\alpha): 3(x-2) - 4(y-0) - 5(z-0) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 5z - 6 = 0$$

3. CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG: Cho $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Học sinh tự suy luận để có các kết quả sau:

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D=0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) qua gốc tọa độ O
$A=0$	$By + Cz + D = 0$	(α) song song hoặc chứa trục Ox
$B=0$	$Ax + Cz + D = 0$	(α) song song hoặc chứa trục Oy
$C=0$	$Ax + By + D = 0$	(α) song song hoặc chứa trục Oz
$A=B=0$	$Cz + D = 0$	(α) song song hoặc trùng (Oxy)
$B=C=0$	$Ax + D = 0$	(α) song song hoặc trùng (Oyz)
$A=C=0$	$By + D = 0$	(α) song song hoặc trùng (Oxz)

Nhận xét: Nếu trong phương trình mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song hoặc chứa trục tương ứng với ẩn đó.

Chú ý:

- (α) cắt 3 trục tọa độ tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ ($a, b, c \neq 0$)

$$\Leftrightarrow (\alpha) \text{ có phương trình } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

(Phương trình này được gọi là Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn của (α))

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt phẳng (α) biết:

- a) (α) đi qua điểm $K(4; -1; 2)$ và chứa trục Ox .
 b) (α) đi qua điểm $M(2; 7; 4)$ và lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ.

Giải

Các em chú ý dùng các trường hợp riêng để giải cho nhanh.

- a) (α) chứa trục Ox nên $(\alpha): By + Cz = 0 \ (B^2 + C^2 \neq 0)$

(α) đi qua $K(4; -1; 2)$ nên $-B + 2C = 0 \Leftrightarrow B = 2C$

Chọn $C = 1, B = 2$. Suy ra $(\alpha): 2y + z = 0$

- b) (α) song song với $mp(Oxy)$, ta có thể suy ra phương trình (α) có dạng: $z = z_0$.

Vì $M(2; 7; 4) \in (\alpha)$ nên $z_0 = z_M = 4$. Suy ra $(\alpha): z = 4$.

Tương tự mặt phẳng qua M , song song với (Oyz) có phương trình là $x = 2$, mặt phẳng qua M và song song với $mp(Oxz)$ có phương trình là $y = 7$.

Từ đó các em có thể ghi nhớ kết quả này một cách tổng quát để viết nhanh phương trình mặt phẳng: Các mặt phẳng đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$, lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) có phương trình lần lượt là $z = z_0$; $x = x_0$; $y = y_0$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(10; 15; 5)$. Viết phương trình mặt phẳng qua các hình chiếu của điểm A trên các trục tọa độ.

Giải

Trước tiên ta phải tìm tọa độ hình chiếu của điểm A trên các trục tọa độ

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy và Oz .

$\Rightarrow M(10; 0; 0), N(0; 15; 0), P(0; 0; 5)$.

Áp dụng phương trình đoạn chắn ta được $(MNP): \frac{x}{10} + \frac{y}{15} + \frac{z}{5} = 1$

$$\Leftrightarrow (MNP): 3x + 2y + 6z - 30 = 0.$$

4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG – HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

Cho hai mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(P'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

a) Ta có thể xét vị trí tương đối của chúng theo hai cách:

Cách 1: Gọi $\vec{n}, \vec{n}'$ lần lượt là VTPT của (P) và (P') , lấy A là một điểm thuộc mp (P) .

- (P) cắt (P') $\Leftrightarrow \vec{n}, \vec{n}'$ không cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{n}, \vec{n}'] \neq \vec{0}$
- $(P) // (P')$ $\Leftrightarrow \vec{n}, \vec{n}'$ cùng phương và $A \notin (P')$ $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{n}, \vec{n}'] = \vec{0} \\ A \in (P) \Rightarrow A \notin (P') \end{cases}$
- $(P) \equiv (P')$ $\Leftrightarrow \vec{n}, \vec{n}'$ cùng phương và $A \in (P')$ $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{n}, \vec{n}'] = \vec{0} \\ A \in (P) \Rightarrow A \in (P') \end{cases}$

Cách 2:

- (P) cắt (P') $\Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'$.
- $(P) // (P')$ $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$.
- $(P) \equiv (P')$ $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$.

Qui ước: Khi mẫu số bằng 0 thì tử số tương ứng bằng 0.

b) Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc:

$$(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow A.A' + B.B' + C.C' = 0.$$

Ví dụ 4: Cho hai mặt phẳng $2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và $(m + 3)x - 2y + (5m + 1)z - 10 = 0$.

Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó thỏa một trong các điều kiện sau:

- Song song với nhau.
- Trùng nhau.
- Cắt nhau.
- Vuông góc với nhau

Giải***Vận dụng phần lý thuyết ở trên để lập điều kiện:***

$$\begin{aligned}
 \text{a) Hai mặt phẳng song song với nhau} &\Leftrightarrow \frac{2}{m+2} = \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} \neq \frac{-6+m}{-10} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 5m^2 + m - 6 = 0 \\ (m-6)(5m+1) \neq -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ (1-6)(5+1) \neq -30 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy không có giá trị m để hai mặt phẳng song song.

Từ kết quả trên ta suy ra

$$\text{b) Hai mặt phẳng trùng nhau} \Leftrightarrow \frac{2}{m+2} = \frac{m}{2} = \frac{3}{5m+1} = \frac{-6+m}{-10} \Leftrightarrow m = 1$$

Vì giữa hai mặt phẳng có ba vị trí tương đối là song song, trùng và cắt nhau nên dùng phép phủ định mệnh đề ta suy tiếp:

$$\text{c) Hai mặt phẳng cắt nhau} \Leftrightarrow m \neq 1$$

$$\text{d) Hai mặt phẳng vuông góc nhau} \Leftrightarrow 2(m+3) + 2m + 3(5m+1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{19}$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG: Học sinh làm vào vở BT Hình học những câu sau đây

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) biết:

- (P) qua $A(2; 3; 0)$, $B(0; 3; -5)$, $C(2; 0; -5)$.
- (P) là mặt trung trực của đoạn AB với $A(2; -3; 1)$, $B(4; 5; 3)$.
- (P) qua $A(1; -2; 5)$ và song song với mp $(Q): 2x - 3y + 5z + 7 = 0$.
- (P) qua $A(2; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$ và song song với trục Oz .
- (P) qua $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -1)$ và vuông góc với mp $(Q): x + y + 2z - 3 = 0$.
- (P) qua $A(3; 4; 5)$ và cắt 3 trục tọa độ tại 3 điểm M, N, P thỏa $OM = ON = OP > 0$.
- (P) qua $G(1; -2; 3)$ và cắt 3 trục tọa độ tại 3 điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm ΔABC .
- (P) qua $H(1; 2; 3)$ và cắt 3 trục tọa độ tại 3 điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của ΔABC .

Học sinh trao đổi thêm với GV Toán của lớp để được hướng dẫn cụ thể !