

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai đường thẳng

Tóm tắt lý thuyết:

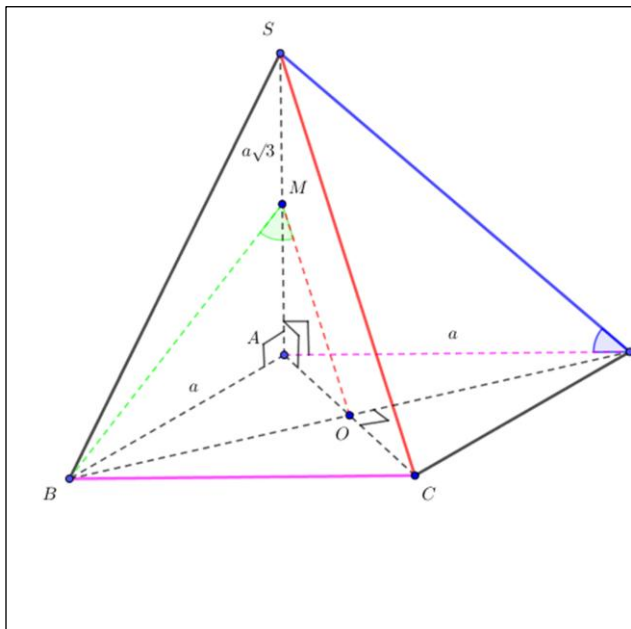
- Góc giữa 2 đường thẳng a và b là góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau a' và b' (a' song song hoặc trùng với a , b' song song hoặc trùng với b). Ký hiệu góc giữa a và b là (a, b) .
($0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$)
- Để tìm góc giữa 2 đường thẳng a và b , ta tìm điểm O và tiếp tục với 1 trong 3 trường hợp sau:
- Nếu O thuộc a , qua O kẻ đường thẳng $b' // b$. Khi đó $(a, b') = (a, b)$.
- Nếu O thuộc b , qua O kẻ $a' // a$. Khi đó $(a', b) = (a, b)$.
- Nếu O không thuộc a và không thuộc b . Qua O kẻ $a' // a$ và $b' // b$. Khi đó $(a', b') = (a, b)$.
- Để tính góc, ta áp dụng tỉ số lượng giác đối với góc nhọn trong tam giác vuông. Còn đối với tam giác thường, ta áp dụng định lý hàm cosin. Chẳng hạn, để tính góc A của tam giác ABC , ta áp dụng công thức:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \Leftrightarrow \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với AB , AC và AD , $SA = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của SA . Tính góc giữa các đường thẳng:

a. SD và BC

b. SC và BM



Giải

a. $BC // AD \Rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = SDA$

Tam giác SDA vuông tại A . Do đó ta có:

$$\tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow SDA = 60^\circ$$

$$\Rightarrow (SD, BC) = 60^\circ$$

b. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Suy ra O là trung điểm của AC . Suy ra OM là đường trung bình của tam giác SAC . Suy ra $OM // SC$.

$$OM // SC \Rightarrow (SC, BM) = (OM, BM)$$

Lưu ý: Ta chưa kết luận được góc OMB là góc giữa SC và BM vì có thể góc OMB là góc tù.

- Để tính góc OMB ta dùng định lý hàm cosin:

$$OB^2 = OM^2 + BM^2 - 2OM \cdot BM \cdot \cos OMB$$

$$\Rightarrow \cos OMB = \frac{OM^2 + BM^2 - OB^2}{2OM \cdot BM}$$

- BD là đường chéo của hình vuông cạnh a nên $BD = a\sqrt{2} \Rightarrow OB = a\sqrt{2}/2$

- OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM = SC/2$

-Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông SAC:

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

- Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông ABM:

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos OMB = \frac{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow OMB \approx 32^\circ \Rightarrow (SC, BM) \approx 32^\circ$$

Lưu ý: Nếu tính ra $OMB = \alpha > 90^\circ$ thì $(SC, MB) = 180^\circ - \alpha$

Áp dụng 1

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với AB, AC và AD, $SA = a\sqrt{6}$, M là trung điểm của SA. Tính góc giữa các đường thẳng:

a. SD và BC

b. SC và BM

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a, SA vuông góc với AB, AC và AD, $SA = a\sqrt{6}$, M là trung điểm của SA. Tính góc giữa các đường thẳng:

a. SD và BC

b. SC và BM

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với AB, AC và AD, $SA = 2a$, M là trung điểm của SA. Tính góc giữa các đường thẳng:

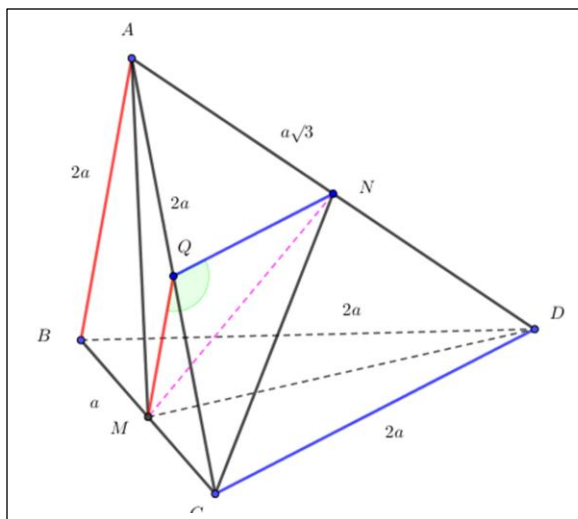
a. SD và BC

b. SC và BM

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD có $AB=AC=BD=CD=2a, BC=a, AD = a\sqrt{3}$. M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD.

a. Tính MN.

b. Tính (AB, CD)



Giải

a. Tam giác ABC cân tại A có AM là trung tuyến. Suy ra AM là đường cao. Áp dụng định lí Pitago cho tam giác vuông ABM:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = AB^2 - BM^2$$

$$= 4a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{15a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

Các tam giác ABC và DBC bằng nhau nên $DM = AM = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

Vì $AM=DM$ nên tam giác ADM cân tại M. Suy ra trung tuyến MN cũng là đường cao.

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông AMN:

$$AM^2 = AN^2 + MN^2 \Leftrightarrow MN^2 = AM^2 - AN^2 = \left(\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3a^2 \Leftrightarrow MN = a\sqrt{3}$$

b. Gọi Q là trung điểm của AC, MQ là đường trung bình của tam giác ABC, NQ là đường trung bình của tam giác ACD. Suy ra $MQ \parallel AB, NQ \parallel CD$

$$\begin{cases} MQ \parallel AB \\ NQ \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = (MQ, NQ)$$

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác MNQ:

$$MN^2 = MQ^2 + NQ^2 - 2MQ \cdot NQ \cdot \cos MQN$$

$$\Rightarrow \cos MQN = \frac{MQ^2 + NQ^2 - MN^2}{2MQ \cdot NQ}$$

MQ là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow MQ = a$

NQ là đường trung bình của tam giác ACD $\Rightarrow NQ = a$

$$\Rightarrow \cos MQN = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow MQN = 120^\circ \Rightarrow (AB, CD) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Áp dụng 2

1. Cho tứ diện ABCD có $AB=AC=BD=CD=3a, BC=2a, AD=2a\sqrt{5}$. M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD.

a. Tính MN.

b. Tính (AB, CD)

2. Cho tứ diện ABCD có $AB=AC=BD=CD=4a, BC=2a, AD=2a\sqrt{6}$. M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD.

a. Tính MN.

b. Tính (AB, CD)

3. Cho tứ diện ABCD có $AB=AC=BD=CD=5a, BC=2a, AD=3a\sqrt{3}$. M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD.

a. Tính MN.

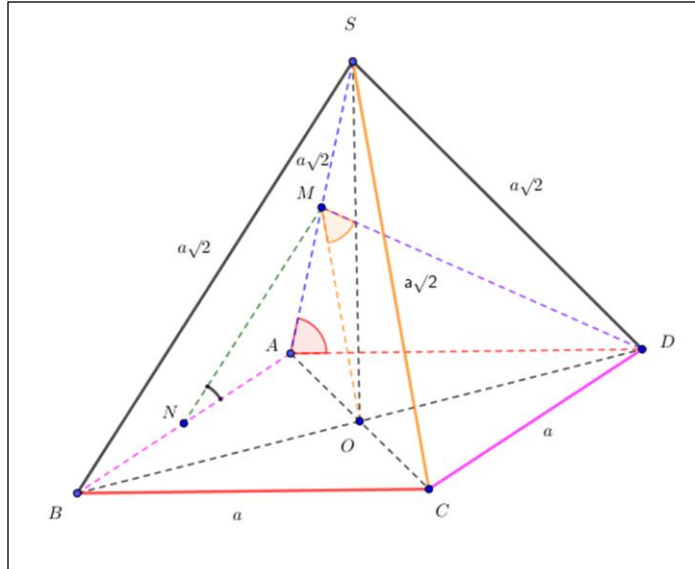
b. Tính (AB, CD)

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. M, N lần lượt là trung điểm của SA, AB. Tính góc giữa các đường thẳng:

a. SA và BC

b. MN và CD

c. SC và DM



Giải

a.

$$BC // AD \Rightarrow (SA, BC) = (SA, AD)$$

MN là đường trung bình của tam giác SAB

$$\Rightarrow MN = a\sqrt{2} / 2$$

$$AM = SA / 2 = a\sqrt{2} / 2, AN = AB / 2 = a / 2$$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác AMN:

$$AM^2 = AN^2 + MN^2 - 2AN.MN.Cos ANM$$

$$\Rightarrow \cos ANM = \frac{AN^2 + MN^2 - AM^2}{2AN.MN}$$

$$= \frac{AN^2}{2.AN.MN} = \frac{AN}{2MN} = \frac{\frac{a}{2}}{2.\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow ANM \approx 69^0$$

$$\Rightarrow (MN, CD) \approx 69^0$$

b. $AB // CD \Rightarrow (MN, CD) = (MN, AB)$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác SAD:

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 - 2SA.AD.Cos SAD$$

$$\Rightarrow \cos SAD = \frac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2SA.AD} = \frac{AD^2}{2.SA.AD} = \frac{AD}{2SA} = \frac{a}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow SAD \approx 69^0$$

$$\Rightarrow (SA, BC) \approx 69^0$$

c.

OM là đường trung bình của tam giác SAC nên $OM // SC \Rightarrow (SC, DM) = (OM, DM)$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác ODM:

$$OD^2 = OM^2 + DM^2 - 2OM.DM.Cos OMD$$

$$\Rightarrow \cos OMD = \frac{OM^2 + DM^2 - OD^2}{2OM.MD} = \frac{DM}{2OM}$$

$$OM = SC / 2 = a\sqrt{2} / 2$$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác ADM:

$$DM^2 = AD^2 + AM^2 - 2AD.AM.Cos DAM$$

$$\cos DAM = \cos DAS = \frac{AD^2 + AS^2 - SD^2}{2AD.AS} = \frac{AD}{2AS} = \frac{a}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow DM^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2\sqrt{2}} = a^2$$

$$\Rightarrow DM = a$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{OMD} = \frac{a}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \widehat{OMD} = 45^0 \Rightarrow (SC, DM) = 45^0$$

Áp dụng 3

1. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh $2a$, các cạnh bên đều bằng $4a$. M, N lần lượt là trung điểm của SA, AB. Tính góc giữa các đường thẳng:
a. SA và BC b. MN và CD c. SC và DM
2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh $3a$, các cạnh bên đều bằng $4a\sqrt{3}$. M, N lần lượt là trung điểm của SA, AB. Tính góc giữa các đường thẳng:
a. SA và BC b. MN và CD c. SC và DM
3. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a , các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{5}$. M, N lần lượt là trung điểm của SA, AB. Tính góc giữa các đường thẳng:
a. SA và BC b. MN và CD c. SC và DM

Bài tập 1

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với AB, AC và AD, $SA = 2a\sqrt{6}$, K là trung điểm của SA. Tính:
a. (SD,BC) b. (SB,CD) c. (DK,BC) d. (SD,AB) e. (DK,AB) f. (BK,SC)
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với AB, AC và AD, $SA = a\sqrt{6}$, M là trung điểm của SA. Tính:
a. (SD,BC) b. (SB,CD) c. (DK,BC) d. (SD,AB) e. (DK,AB) f. (BK,SC)
3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với AB, AC và AD, $SA = 2a\sqrt{3}$, K là trung điểm của SA. Tính:
a. (SD,BC) b. (SB,CD) c. (DK,BC) d. (SD,AB) e. (DK,AB) f. (BK,SC)
4. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh $2a$, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{10}$. M, N lần lượt là trung điểm của SA, AB. Tính:
a. (SA,BC) b. (SC,AB) c. (SC,BD) d. (SD,AC) e. (MN,CD) f. (MN,AD)
g. (CM,AD) h. (BC,DN) i. (AD,CN) j. (SC,DM)
5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a , $SAB = 60^\circ$, $SC = a\sqrt{3}$, $SA = 2a$, M là trung điểm của SA. Tính:
a. (CD,BM) b. (CM,AD) c. (AD,BM)
6. Cho tứ diện ABCD là tứ diện đều, cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính:
a. (AB,CD) b. (AB,CM) c. (AN,CD) d. (AN,BD) e. (AB,DN) f. (AC,DN)
g. (MN,AB) h. (MN,AC)

2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Tóm tắt lý thuyết:

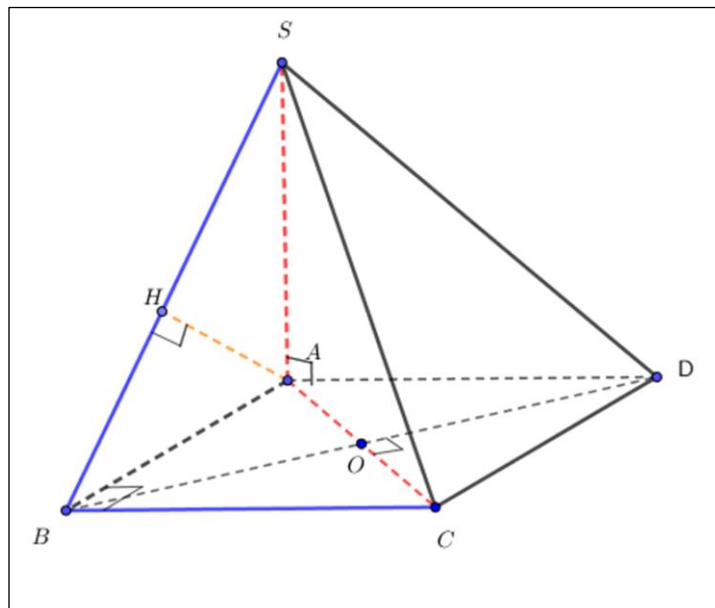
- **Định nghĩa:** Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) . Ký hiệu: $d \perp (P)$
- **Định lý:** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) thì d vuông góc với mặt phẳng (P) .

$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = \{M\} \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Chứng minh:

- a. $BC \perp (SAB)$ b. $AH \perp (SBC)$ c. $BD \perp (SAC)$

Giải



a. $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BC$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow BC \perp AB$

$$\begin{cases} BC \perp SA \subset (SAB) \\ BC \perp AB \subset (SAB) \\ SA \cap AB = \{A\} \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

b. $\begin{cases} AH \perp (SBC) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$

$$\begin{cases} AH \perp SB \subset (SBC) \\ AH \perp BC \subset (SBC) \\ SB \cap BC = \{B\} \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

c. $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp BD$

BD và AC là 2 đường chéo của hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC$

$$\begin{cases} BD \perp SA \subset (SAC) \\ BD \perp AC \subset (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

Áp dụng 4

1. Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình vuông, SM vuông góc với đáy, H là hình chiếu vuông góc của M trên SN . Chứng minh:

- a. $NP \perp (SMN)$ b. $MH \perp (SNP)$ c. $NQ \perp (SMP)$

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, H là hình chiếu vuông góc của A trên SD . Chứng minh:

- a. $CD \perp (SAD)$ b. $AH \perp (SCD)$ c. $BD \perp (SAC)$

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, K là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Chứng minh: a. $BC \perp (SAB)$ b. $AK \perp (SBC)$ c. $BD \perp (SAC)$

Ví dụ 5

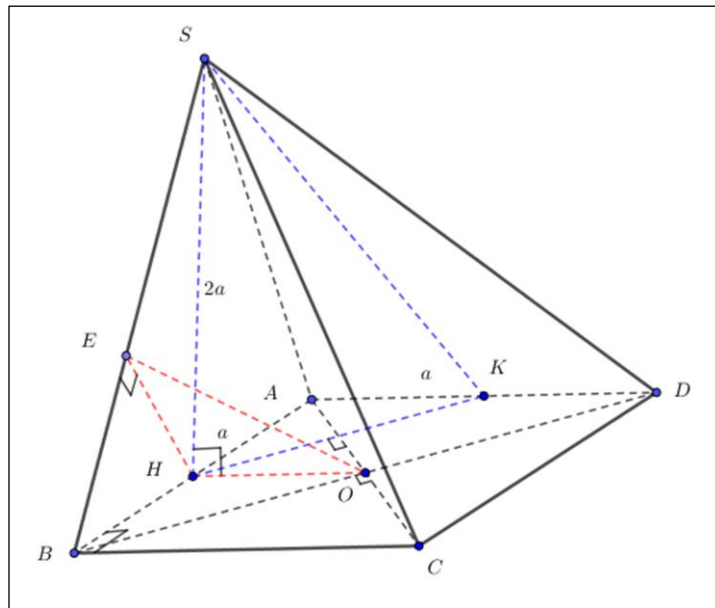
Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, H là trung điểm của AB, SH vuông góc với đáy và SH=2a, K là trung điểm của AD, E là hình chiếu vuông góc của H trên SB.

a. C/m: $AC \perp (SHK)$

b. C/m $SB \perp (OHE)$

c. Tính (SK, AC)

Giải



$$\text{a. } \begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ AC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp AC$$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC$

HK là đtb của tam giác ABD nên

$HK \parallel BD$. Do đó $HK \perp AC$

$$\begin{cases} AC \perp SH \subset (SHK) \\ AC \perp HK \subset (SHK) \Rightarrow AC \perp (SHK) \\ SH \cap HK = \{H\} \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} SH \perp (ABCD) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp BC$$

$$\begin{cases} BC \perp SH \subset (SAB) \\ BC \perp AB \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp (SAB) \\ SH \cap AB = \{H\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp SB (SB \subset (SAB))$$

Mà $OH \parallel BC$ nên $OH \perp SB$

E là hình chiếu vuông góc của H trên SB nên $OE \perp SB$

$$\begin{cases} SB \perp OH \subset (OHE) \\ SB \perp HE \subset (OHE) \Rightarrow SB \perp (OHE) \\ OH \cap HE = \{H\} \end{cases}$$

c. Ta có:

$$\begin{cases} AC \perp (SHK) \\ SK \subset (SHK) \end{cases} \Rightarrow AC \perp SK \Rightarrow (SK, AC) = 90^\circ$$

BD và AC là 2 đường chéo của hình vuông $\Rightarrow BD \perp AC$

$$\begin{cases} BD \perp SA \subset (SAC) \\ BD \perp AC \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{cases}$$

Áp dụng 5

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, E là trung điểm của AB, SE vuông góc với đáy và SE=2a, F là trung điểm của AD, K là hình chiếu vuông góc của E trên SB.

a. C/m: $AC \perp (SEF)$

b. C/m $SB \perp (OEK)$

c. Tính (SF, AC)

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, M là trung điểm của AB, SM vuông góc với đáy và SM=3a, N là trung điểm của AD, E là hình chiếu vuông góc của M trên SB.

a. C/m: $AC \perp (SMN)$

b. C/m $SB \perp (OMK)$

c. Tính (SN, AC)

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, H là trung điểm của AB, SH vuông góc với đáy và SH=2a, E là trung điểm của AD, K là hình chiếu vuông góc của H trên SB.

a. C/m: $AC \perp (SHE)$

b. C/m $SB \perp (OHE)$

c. Tính (SE, AC)

Bài tập 2

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy, H là hình chiếu vuông góc của A trên SD. Chứng minh:

- a. $CD \perp (SAD)$ b. $AH \perp (SCD)$ c. $BD \perp (SAC)$

2. Cho tứ diện ABCD có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), tam giác BCD vuông tại C.

- a. Chứng minh $CD \perp (ABC)$ b. Chứng minh tam giác ACD vuông.
c. BK là đường cao tam giác ABC. Chứng minh $BK \perp (ACD)$

3. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a và SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Chứng minh:

- a. $BC \perp (SAB)$ b. $BD \perp (SAC)$ c. Tính (SA,CD)

4. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thoi tâm O, SA=SC, SB=SD.

- a. Chứng minh $SO \perp (ABCD)$ b. Chứng minh $AC \perp SD$

5. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là vuông tâm O, SA vuông góc với đáy. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh:

- a. $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD), BD \perp (SAC)$ b. $AH \perp SC$
c. $SC \perp (AHK)$ d. $AK \perp (SAC)$

6. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc. H là hình chiếu vuông góc của O trên (ABC). Chứng minh:

- a. $BC \perp (OAH)$ b. H là trực tâm của tam giác ABC

c.
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

7. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy, AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Chứng minh $SC \perp (AEF)$

8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, H là trung điểm của AB và SH vuông góc với đáy, $SH=2a$. K là trung điểm của AD và E là hình chiếu vuông góc của H trên SB.

- a. Chứng minh $AC \perp (SHK)$ b. Chứng minh $AC \perp (SHK)$
c. Tính góc giữa SK và BD d. Tính góc giữa SD và BC.

9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, tam giác SBC vuông tại B, tam giác SCD vuông tại D.

- a. Chứng minh $SA \perp (ABCD)$

b. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với AC, cắt CB tại I và cắt CD tại J. H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Gọi K, L lần lượt là giao điểm của HI, HJ với SB, SD. Chứng minh AK vuông góc với (SBC) và AL vuông góc với (SCD).