

MỤC LỤC

PHẦN I	GIẢI TÍCH	1
CHƯƠNG 1	Ứng Dụng Đạo Hàm Khảo Sát Hàm Số	2
5	ĐỒ THỊ.....	2
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	2
B	VÍ DỤ MINH HỌA.....	4
	Dạng 1. Nhận Dạng Đồ Thị Và Bảng Biến Thiên.....	4
	Dạng 2. Biến Đổi Đồ Thị.....	5
	Dạng 3. Sự Tương Giao Giữa Hai Đồ Thị.....	9
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	12

PHẦN

I

GIẢI TÍCH

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 5. ĐỒ THỊ

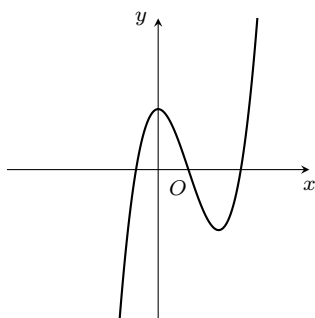
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 ĐỒ THỊ HÀM BẬC BA

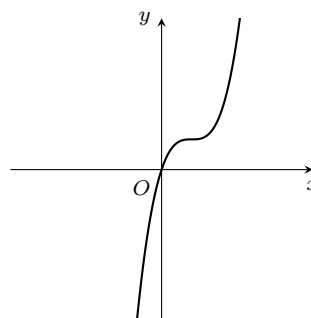
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, có đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

 $a > 0$

 Hàm số có 2 cực trị

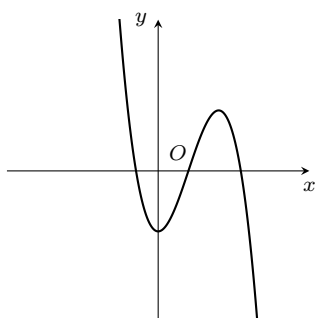


 Hàm số không có cực trị

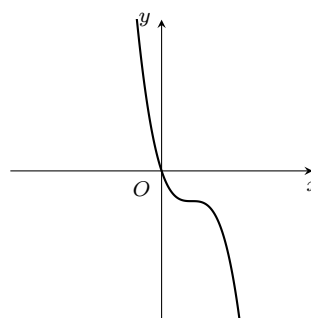


 $a < 0$

 Hàm số có 2 cực trị



 Hàm số không có cực trị

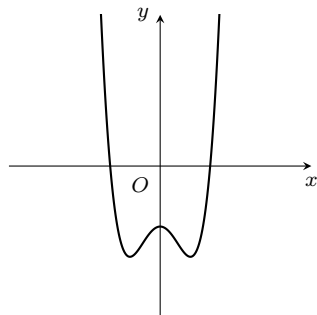


② ĐỒ THỊ HÀM BẬC BỐN

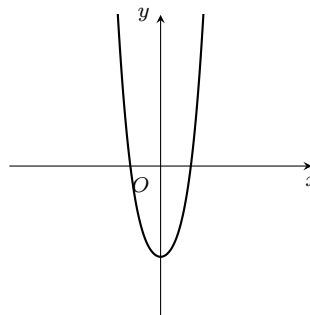
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $a \neq 0$.

 $a > 0$

 Hàm số có 3 cực trị

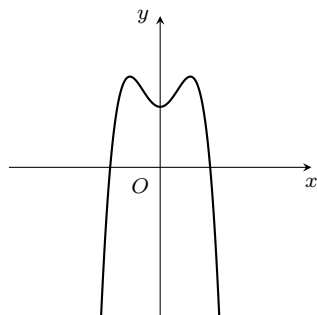


 Hàm số có 1 cực trị

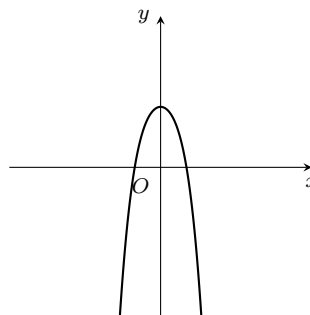


 $a < 0$

 Hàm số có 3 cực trị



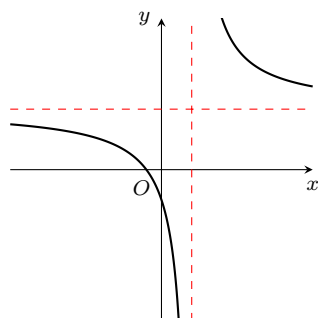
 Hàm số có 1 cực trị



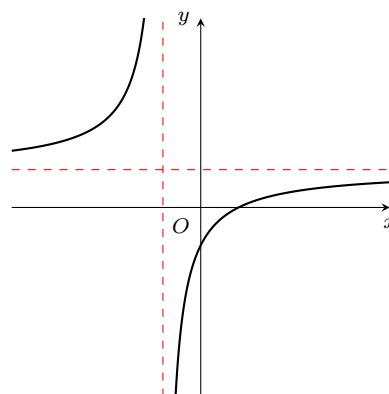
③ ĐỒ THỊ HÀM BẬC NHẤT TRÊN BẬC NHẤT

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

 $ad - bc < 0$



 $ad - bc > 0$

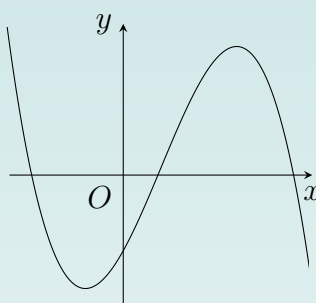


B VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Nhận Dạng Đồ Thị Và Bảng Biến Thiên

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải

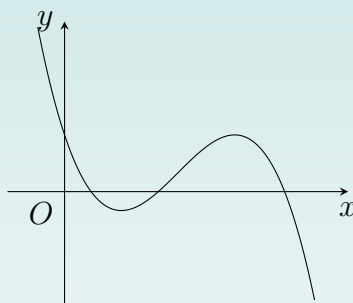
Từ đồ thị hàm số, ta thấy $a, d < 0$.

Hàm số đạt 2 tại hai điểm $x_1 < 0 < x_2$ và $x_2 > |x_1|$, do đó

$y' = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$, hay $b = -a(x_1 + x_2) > 0$ và $c = ax_1x_2 > 0$.

Vậy đáp án là có 2 hệ số dương.

Ví dụ 2. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

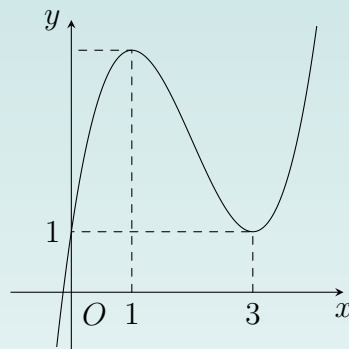
(D) 4.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta có $a < 0$ và $d > 0$.

Đồ thị hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ dương nên ta có $S, P > 0$ hay $\frac{-b}{a} > 0$ và $\frac{c}{a} > 0$ mà $a < 0$ do đó $b > 0, c < 0$.

Ví dụ 3. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ. tìm mệnh đề **đúng**?



(A) $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

(B) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

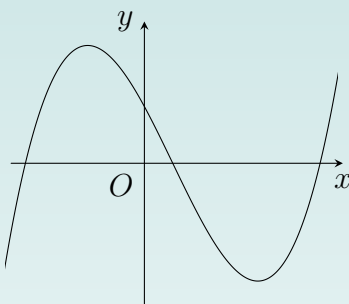
(C) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

(D) $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Từ đồ thị ta có $a > 0, d = 1 > 0$ do đó đáp án đúng là $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

Ví dụ 4. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ. tìm mệnh đề **đúng**?



(A) $a > 0, d > 0, b < 0, c < 0$.

(B) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

(C) $a > 0, c > 0, d > 0, b < 0$.

(D) $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

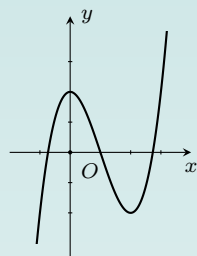
Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta thấy $a < 0, d > 0$ nên đáp án đúng là $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

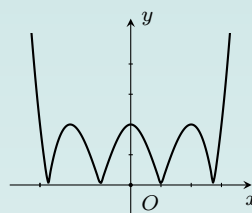
➡ Dạng 2. Biến Đổi Đồ Thị

❖❖❖❖ VÍ DỤ ❖❖❖❖

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

(A) $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

(B) $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$.

(C) $y = |x|^3 - 3|x|^2 + 2$.

(D) $y = ||x|^3 - 3x^2 + 2|$.

Lời giải

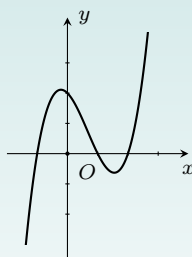
Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta thấy đồ thị hàm số ở hình 2 có được bằng cách:

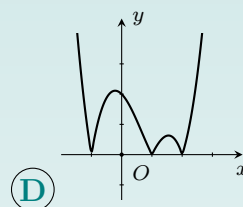
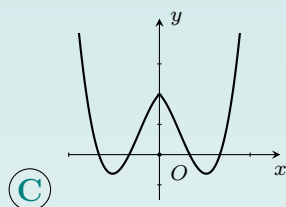
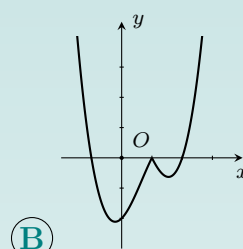
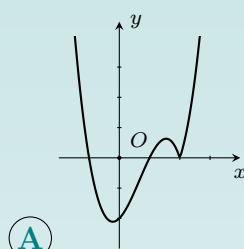
- 🟢 Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ nằm bên phải trục Oy .
- 🟡 Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị của $y = x^3 - 3x^2 + 2$ nằm bên phải trục Oy .
- 🟢 Sau đó, giữ nguyên phần đồ thị nằm phía trên trục hoành.
- 🔴 Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm bên dưới trục hoành.

Do đó đồ thị hàm số ở hình 2 là của hàm số $y = ||x|^3 - 3|x|^2 + 2| = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

Ví dụ 6. Cho đồ thị hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$. Hình nào là đồ thị của hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$?



Hình 1



Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

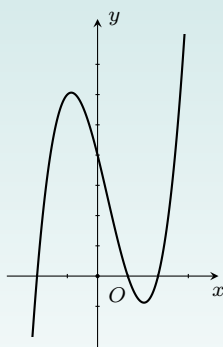
$$y = |x - 2|(x^2 - 1) = \begin{cases} (x - 2)(x^2 - 1) & \text{với } x \geq 2 \\ -(x - 2)(x^2 - 1) & \text{với } x < 2. \end{cases}$$

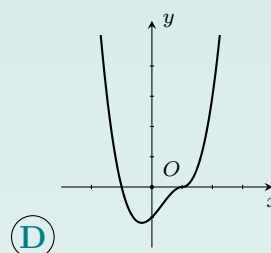
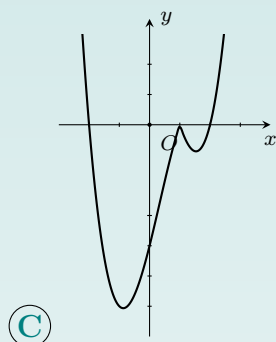
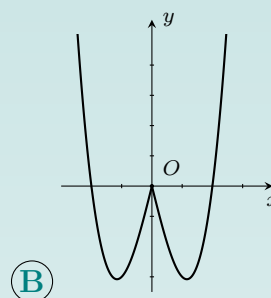
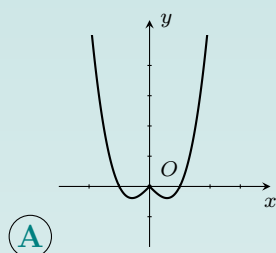
Do đó đồ thị hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 1)$ bằng cách

🔷 Giữ nguyên phần đồ thị nằm bên phải đường thẳng $x = 2$.

🔷 Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm bên trái đường thẳng $x = 2$.

📌 **Ví dụ 7.** Cho đồ thị hàm số $y = (x - 1)(x^2 - 4)$. Hình nào là đồ thị của hàm số $y = |x - 1|(x^2 - 4)$?





Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$y = |x - 1|(x^2 - 4) = \begin{cases} (x - 1)(x^2 - 4) & \text{với } x \geq 1 \\ -(x - 1)(x^2 - 4) & \text{với } x < 1. \end{cases}$$

Do đó đồ thị hàm số $y = |x - 1|(x^2 - 4)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = (x - 1)(x^2 - 4)$ bằng cách

🌸 Giữ nguyên phần đồ thị nằm bên phải đường thẳng $x = 1$.

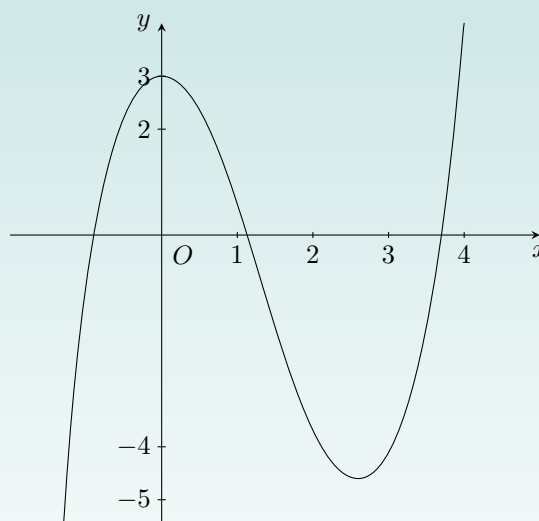
🌸 Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm bên trái đường thẳng $x = 1$.

📌 Ví dụ 8.

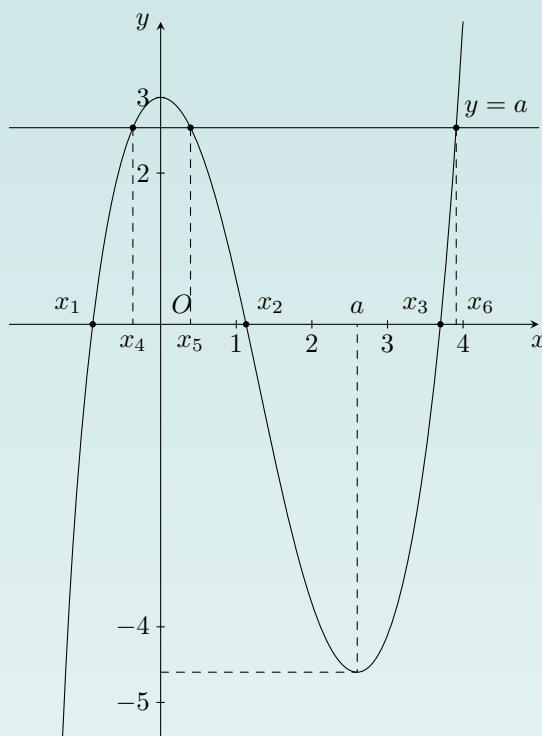
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Đặt $g(x) = -2f(f(x)) + 3$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$

- (A) 2. (B) 8. (C) 10. (D) 6.



Lời giải



$$g'(x) = -2f'(f(x))f'(x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(f(x))f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = a \\ x = 0 \\ x = a \end{cases}, \quad (2 < a < 3).$$

$f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3 khác 0 và a .

Vì $2 < a < 3$ nên $f(x) = a$ có 3 nghiệm đơn phân biệt x_4, x_5, x_6 khác $x_1, x_2, x_3, 0, a$.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $g(x) = -2f(f(x)) + 3$ có 8 điểm cực trị.

➤ Dạng 3. Sự Tương Giao Giữa Hai Đồ Thị

💠💠💠 VÍ DỤ 💠💠💠

▣ Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của phương trình $f^2(x) - 4 = 0$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Ⓐ 3.

Ⓑ 5.

Ⓒ 1.

Ⓓ 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } f^2(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 & (1) \\ f(x) = -2 & (2) \end{cases}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm. Suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = -2$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm. Suy ra phương trình (2) có 2 nghiệm.

Vậy phương trình $f^2(x) - 4 = 0$ có 5 nghiệm.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của phương trình $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	1	3	$\frac{1}{3}$	1	

Ⓐ 6.

Ⓑ 0.

Ⓒ 3.

Ⓓ 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 & (1) \\ f(x) = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

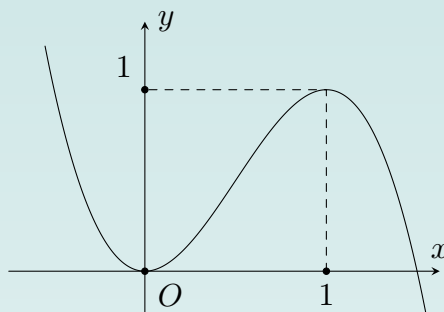
Nhìn vào bảng biến thiên với chú ý $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại duy nhất 1 điểm nằm trong khoảng $(-1; 1)$.

Suy ra phương trình (1) có 1 nghiệm.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm. Suy ra phương trình (2) có 2 nghiệm.

Vậy phương trình $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ có 3 nghiệm.

Ví dụ 11. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên dưới. Hỏi phương trình $f(x) = x$ có bao nhiêu nghiệm?



(A) 0.

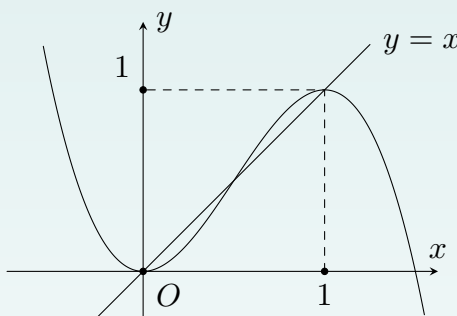
(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải

Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = x$ trên cùng một đồ thị như hình dưới đây.



Nhìn vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm. Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[0; +\infty)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (0; 2)$ và $x_2 \in (2; +\infty)$.

x	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	-
y		0			
	-2		-1		-3

(A) $(-2; -1)$.

(B) $[-2; -1)$.

(C) $(-2; 0)$.

(D) $(-3; -1)$.

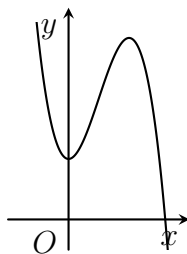
Lời giải

Theo giả thiết, phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm $x_1 \in (0; 2)$ và $x_2 \in (2; +\infty)$ khi đó

$$\begin{cases} -2 < m \leq 0 \\ -3 < m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -1.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

 **Câu 1.** Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề đúng?



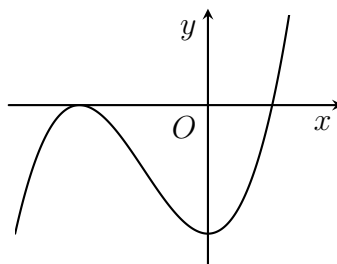
☐ (A) $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

☐ (B) $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.

☐ (C) $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

☐ (D) $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.

 **Câu 2.** Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề đúng?



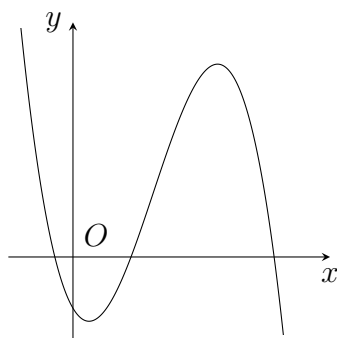
☐ (A) $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.

☐ (B) $a > 0, b > 0, c = 0, d > 0$.

☐ (C) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

☐ (D) $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$.

 **Câu 3.** Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) như hình vẽ. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



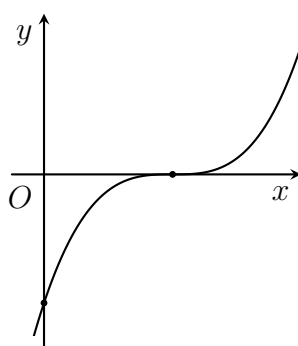
(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề đúng?



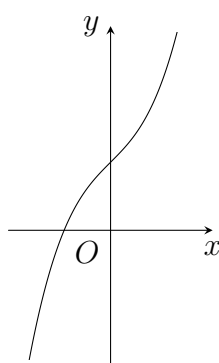
(A) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

(B) $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

(C) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

(D) $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Câu 5. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tìm mệnh đề đúng?



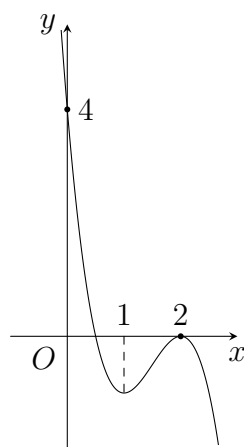
(A) $ab^2 > 3a^2c$.

(B) $ab^2 < 3a^2c$.

(C) $b^2d > 3acd$.

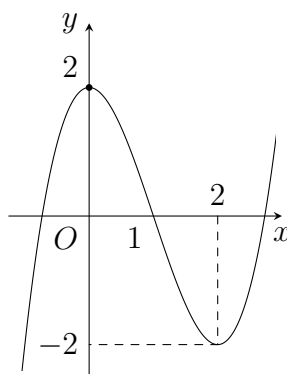
(D) $-b^2d < -3acd$.

Câu 6. Cho đồ thị hàm số $y = -2x^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tổng $b + c + d$ bằng



- (A) 1. (B) 3. (C) 5. (D) 7.

Câu 7. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 - 3x^2 + cx + d$ như hình vẽ bên dưới. Tổng $a + c + d$ bằng



- (A) 2. (B) -3. (C) 0. (D) 3.

Câu 8. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 1

- (A) $y = \frac{-x+2}{x-1}$. (B) $y = \frac{x+2}{x-1}$. (C) $y = \frac{x+2}{x+1}$. (D) $y = \frac{x-3}{x-1}$.

Câu 9. Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2 ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ 2

Ⓐ $y = \frac{x+1}{2x-1}$.

Ⓑ $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Ⓒ $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

Ⓓ $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

 **Câu 10.** Cho hàm số phù hợp với bảng biến thiên. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	—		—
y	1 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 1

Ⓐ $y = \frac{2x+1}{x-2}$.

Ⓑ $y = \frac{x-1}{2x+2}$.

Ⓒ $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Ⓓ $y = \frac{x+3}{2+x}$.

 BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. D	5. B	6. A	7. D	8. B	9. B	10. C
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------