

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1	Ứng Dụng Đạo Hàm Khảo Sát Hàm Số	1
1	TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ	1
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ	1
B	CÁC DẠNG TOÁN	2
	Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu (khảo sát chiều biến thiên) của hàm số $y = f(x)$.	2
	Dạng 2. Dựa Vào Bảng Xét Dấu, Bảng Biến Thiên Và Đồ Thị.	5
	Dạng 3. Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên miền xác định của nó.	9
	Dạng 4. Ứng Dụng Tính Đơn Điệu Để Giải Phương Trình, BPT.	13
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	18
D	BẢNG ĐÁP ÁN	19
2	CỰC TRỊ	19
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ	19
B	CÁC DẠNG TOÁN	22
	Dạng 1. Tìm Cực Trị Của Hàm Số Cho Bởi Công Thức	22
	Dạng 2. Dựa Vào Bảng Xét Dấu, Bảng Biến Thiên Và Đồ Thị	25
	Dạng 3. Tìm m Để Hàm Số Có Cực Trị Thỏa Điều Kiện	29
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	32

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

⇔ **Định nghĩa 1.1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K với K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng.

❖ Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

❖ Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

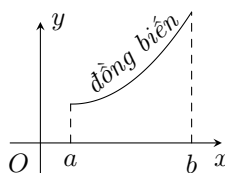
Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là **đơn điệu** trên K .

Nhận xét. Nếu $\forall x_1, x_2 \in K$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số

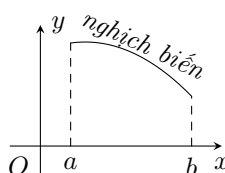
❖ $f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$.

❖ $f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$.

❖ Nếu hàm số **đồng biến** trên K thì **đồ thị đi lên** khi đi từ trái sang phải.



❖ Nếu hàm số **nghịch biến** trên K thì **đồ thị đi xuống** khi đi từ trái sang phải.



1 TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ DẤU CỦA ĐẠO HÀM

Định lí 1.1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

➊ Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

➋ Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

➌ Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

Định lí mở rộng: Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên khoảng K .

! Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu (khảo sát chiều biến thiên) của hàm số $y = f(x)$.

Phương pháp.

- **Bước 1.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.
- **Bước 2.** Tìm các điểm tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên (xét dấu y').
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, kết luận: $y' > 0 \Rightarrow$ đồng biến và $y' < 0 \Rightarrow$ nghịch biến.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP MẪU 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

- (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
 (D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

Suy ra $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$ và $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$; $(2; +\infty)$.

Ví dụ 2. Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 5$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- (A) $(-\infty; 0)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $(0; 1)$. (D) $(-1; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x$.

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow -x^3 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Tại $x = -1 \Rightarrow y(-1) = 6$; Tại $x = 0 \Rightarrow y(0) = 5$; Tại $x = 1 \Rightarrow y(1) = 6$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	6	5	6	$-\infty$

Ví dụ 3 (TN THPT 2021-Đợt 2-101). Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- (A) $y = \frac{3x-1}{x+1}$. (B) $y = x^3 - x$. (C) $y = x^4 - 4x^2$. (D) $y = x^3 + x$.

Lời giải.

✪ Vì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta loại phương án hàm bậc 4 và hàm bậc nhất trên bậc nhất.

✪ Xét hàm số $y = x^3 - x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 1$. Suy ra phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = x^3 - x$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

✪ Xét hàm số $y = x^3 + x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 4. Hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-\infty; 1)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(0; 2)$. (D) $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		+	0	-	+
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0; 1); (1; 2)$.

Ví dụ 5. Hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$ đồng biến trên khoảng

- (A) $(-\infty; 0)$. (B) $(-3; 0)$. (C) $(-3; 3)$. (D) $(0; 3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-3; 3]$.

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
y'			$+$	0	$-$
y				3	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$.

Ví dụ 6. Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(3; +\infty)$.

(B) $(1; 3)$.

(C) $(-\infty; 1)$.

(D) $(-\infty; 3)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

$$y' = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 3}}. \text{ Cho } 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại).}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Dạng 2. Dựa Vào Bảng Xét Dấu, Bảng Biến Thiên Và Đồ Thị.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 7 (Đề TN THPT 2021-Lần 2-Mã đề 101). Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(0; +\infty)$. (B) $(-2; 2)$. (C) $(-2; 0)$. (D) $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

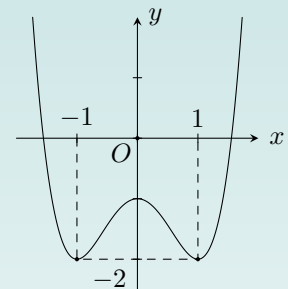
Từ bảng biến thiên của hàm số, suy ra hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$.

Ví dụ 8 (Đề TN THPT 2021-Lần 1-Mã đề 101).

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(0; 1)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(-1; 1)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị đã cho, ta có

- 🟡 Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
 🟢 Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Ví dụ 9. Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, dấu của đạo hàm được cho bởi bảng dưới đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(2x - 2)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-1; 1)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(1; 2)$. (D) $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Ta có $g(x) = f(2x - 2) \Rightarrow g'(x) = 2f'(2x - 2)$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(2x - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < 2x - 2 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy hàm số $g(x) = f(2x - 2)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng biến thiên của đạo hàm bên dưới. Hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	1	0	-2	2	4

- (A) $(-4; -2)$. (B) $(2; 4)$. (C) $(-2; 0)$. (D) $(0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1$.

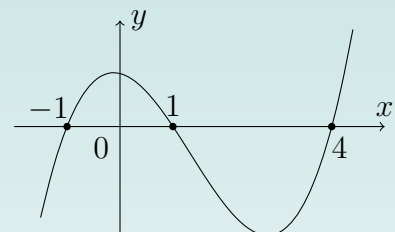
Hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến ta cần có $y' < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1 < 0$

$\Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow 2 < 1 - \frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$.

Vậy hàm số $y = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên $(-4; -2)$.

Ví dụ 11.

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- (A) $(1; 3)$. (B) $(2; +\infty)$.
(C) $(-2; 1)$. (D) $(-\infty; 3)$.

Lời giải.

Ta có $y = f(2 - x) \Rightarrow y' = -f'(2 - x)$.

Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến ta cần có $y' > 0$

$\Leftrightarrow f'(2 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$

vậy hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên $(3; +\infty); (-2; 1)$.

Ví dụ 12. Cho hàm số $f(x)$ là hàm đa thức. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị bên.

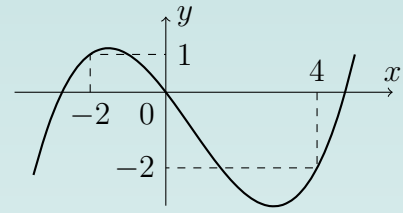
Hàm số $y = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

(B) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

(C) $(-2; -1)$.

(D) $(2; 3)$.



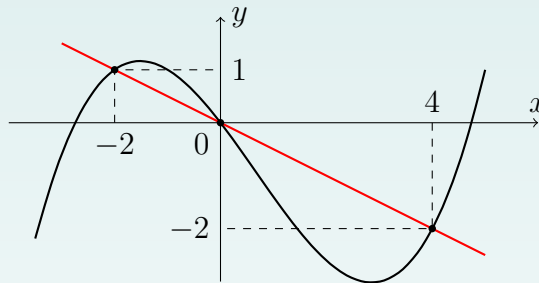
Lời giải.

Ta có $y = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow y' = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$.

Để hàm số nghịch biến ta cần có $y' < 0$

$$\Leftrightarrow -2f'(1 - 2x) + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) > -\frac{1 - 2x}{2}.$$

Đặt $t = 1 - 2x$ ta có đồ thị của hàm số $y = f'(t)$ và $y = -\frac{t}{2}$.



Trên đoạn $[-2; 4]$ thì $f'(t) > -\frac{t}{2} \Leftrightarrow -2 < t < 0 \Leftrightarrow -2 < 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$.

Vậy hàm số $y = f(1 - 2x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng $\left(1; \frac{3}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Dạng 3. Tìm tham số m để hàm số đơn điệu trên miền xác định của nó

- ① Tìm tham số m để hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên tập xác định.

 **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

 **Bước 2:** Ghi điều kiện để hàm đơn điệu, chẳng hạn

 Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m.$

 Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m.$

Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

 $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

 $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

 Nếu hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có a chứa tham số thì vui lòng chia ra hai trường hợp. Đó là trường hợp $a = 0$ để xét tính đúng sai (nhận, loại m) và trường hợp $a \neq 0$ (sử dụng dấu tam thức bậc hai). Sau khi giải xong, hợp hai trường hợp lại.

- ② Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên mỗi khoảng xác định của nó.

 **Bước 1:** Tìm tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

Tính đạo hàm $y' = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{(cx + d)^2}$.

 **Bước 2:** Ghi điều kiện để hàm đơn điệu. Chẳng hạn

 Để $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó

$$\Rightarrow y' > 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ad - bc > 0 \Rightarrow m.$$

 Để $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó

$$\Rightarrow y' < 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow ad - bc < 0 \Rightarrow m.$$

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 13 (Đề THPT QUỐC GIA 2017-Mã đề 101). Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

(A) 7.

(B) 4.

(C) 6.

(D) 5.

Lời giải

Đây là hàm số bậc 3 có hệ số $a = -3 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$.

Suy ra có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

(A) 8.

(B) 9.

(C) 10.

(D) 11.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$. Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì

$$-1 - m > 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Vì m nguyên và $m \in (-10; 10)$ nên $m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$.

Vậy có 8 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 15 (Đề THPT QUỐC GIA 2020-Đợt 1-Mã đề 101). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ là

(A) $[4; 7)$.(B) $(4; 7]$.(C) $(4; 7)$.(D) $(4; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m-4}{(x+m)^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \in (-\infty; -7) \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ -m \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m \leq 7.$$

Vậy $m \in (4; 7]$.

Ví dụ 16 (THPT Quốc Gia 2020 đợt 2 - Mã đề 101). Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- (A) $(-\infty; 1]$. (B) $(-\infty; 4]$. (C) $(-\infty; 1)$. (D) $(-\infty; 4)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2; +\infty).$$

Xét $f(x) = 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2; +\infty)$.

$f'(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (2; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên

x	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	4	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \leq 4$.

Ví dụ 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$?

- (A) 5. (B) 3. (C) 0. (D) 4.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq -3x^2 - \frac{1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$$

Đặt $g(x) = -3x^2 - \frac{1}{x^6}, x \in (0; +\infty)$.

$$g'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = 6 \left(-x + \frac{1}{x^7} \right).$$

Ta có bảng biến thiên của $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m \geq -4$, vì m nguyên âm nên có 4 giá trị thỏa đề.

Ví dụ 18 (Sở GD & ĐT Nam Định 2020). Số các giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+50)x^2 + (m^2+100m)x + 2m$ nghịch biến trên $(7; 13)$ là

(A) 94.

(B) 95.

(C) 96.

(D) Vô số.

Lời giải

Ta có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 - 2(m+50)x + m^2 + 100m.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+50)x + m^2 + 100m \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 100. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	m	$m+100$	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$					$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên $(7; 13)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \leq 7 \\ m+100 \geq 13 \end{cases} \Leftrightarrow -87 \leq m \leq 7.$$

Vậy có 95 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 19 (THPT Nguyễn Huệ, Bà Rịa Vũng Tàu, 2020). Cho hàm số $f(x) = (m + x)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập xác định của nó. Số phần tử của tập S là

(A) 5.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải

Vì $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + (m + x) \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \frac{2x^2 + (m - 3)x + 2 - m}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (m - 3)x + 2 - m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (m - 3)^2 - 8(2 - m) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - 2\sqrt{2} \leq m \leq -1 + 2\sqrt{2}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; -0; 1\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài.

Dạng 4. Ứng Dụng Tính Đơn Điều Để Giải Phương Trình, BPT.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 20.

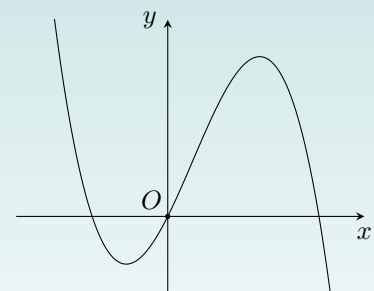
Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là

(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 1.

**Lời giải**

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta có phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < 0 \\ x = 0 \\ x = x_2 > 0. \end{cases}$

Theo giả thiết, ta có $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ nên $f(0) = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(x_1)$ $-\infty$ $f(x_2)$ 0 $-\infty$ 0 $-\infty$						

Ta có $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$.

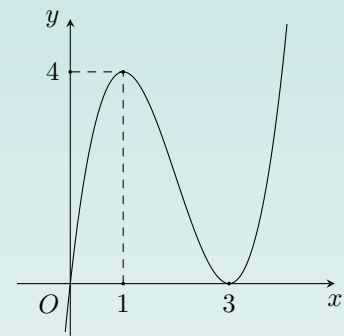
Do đó, số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ đúng bằng số giao điểm chung của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$ (song song với trục hoành Ox).

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta kết luận số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là 2.

■ Ví dụ 21 (Sở GD và ĐT Lạng Sơn, 2020).

Cho hàm số $f(x)$ là một đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x^2) = m$ có đúng hai nghiệm thực là

- (A) $[0; 4]$. (B) $\{0; 4\}$.
 (C) $\{0\} \cup (4; +\infty)$. (D) $(4; +\infty)$.



Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2)$, ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x^2)$ là:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$		4		4		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thực thì đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị $g(x) = f(x^2)$ tại đúng hai điểm, suy ra $m > 4$.

Vậy $m \in (4; +\infty)$.

■ Ví dụ 22.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-5; 3]$, có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để bất phương trình

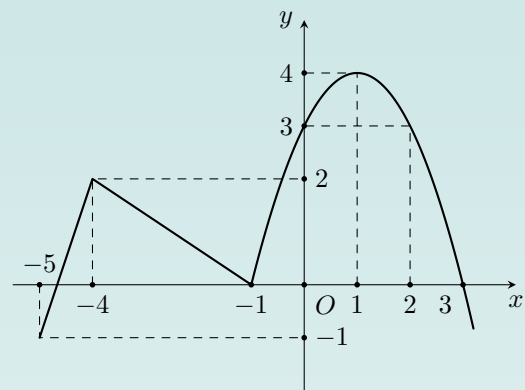
$f(\sqrt{4x - x^2}) \geq m$ có nghiệm $x \in [0; 4]$

(A) $m \leq 3$.

(B) $m \leq 0$.

(C) $m \leq 4$.

(D) $m \leq -1$.



Lời giải

Đặt $t = \sqrt{4x - x^2}$, với $x \in [0; 4]$.

Ta có $t' = \frac{(4x - x^2)'}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}}$.

Cho $t' = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên.

x	0	2	4
y'	$+$	0	$-$
y	0	2	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $t \in [0; 2]$.

Bất phương trình bài cho trở thành $f(t) \geq m$ (1).

Với $t \in [0; 2]$ suy ra $f(t) \in [3; 4]$.

Để bất phương trình $f(\sqrt{4x - x^2}) \geq m$ có nghiệm thì bất phương trình (1) phải có nghiệm.

Vậy (1) có nghiệm khi $m \leq 4$.

Ví dụ 23 (Trần Phú - Quảng Ninh, 2020). Cho các hàm số $f(x) = x^3 + 4x + m$ và $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

(A) 37.

(B) 36.

(C) 41.

(D) 25.

Lời giải

Đặt $u = x^2 + 1$, $v = x^2 + 2$, $w = x^2 + 3$, $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$.

$$g'(x) = 2x \underbrace{(v^2w^3 + 2uvw^3 + 3uv^2w^2)}_{>0} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Ta có $[g(f(x))]' = f'(x) \cdot g'(f(x))$.

Hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} [g(f(x))]' &= f'(x) \cdot g'(f(x)) > 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ \Leftrightarrow (3x^2 + 4)g'(f(x)) &> 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ \Leftrightarrow g'(f(x)) &> 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ \Leftrightarrow f(x) &> 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ \Leftrightarrow x^3 + 4x + m &> 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ \Leftrightarrow m &> -x^3 - 4x, \forall x \in (2; +\infty) \end{aligned}$$

Xét hàm số $h(x) = -x^3 - 4x$, $\forall x \in (2; +\infty)$.

$$h'(x) = -3x^2 - 4 < 0, \forall x \in (2; +\infty).$$

Bảng biến thiên của $h(x)$

x	2	$+\infty$
$h'(x)$	—	
$h(x)$	-16	$\searrow \infty$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq -16$.

Vì $m \in [-20; 20] \Rightarrow m \in \{-16; \dots; -1; 0; 1; \dots; 20\}$.

Vậy có tất cả 37 giá trị nguyên của tham số m .

Ví dụ 24. Tìm m để phương trình $x^6 + 6x^4 + m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

(A) $2 < m \leq \frac{5}{2}$.(B) $\frac{11}{5} < m < 4$.(C) $\frac{7}{5} \leq m < 3$.(D) $0 < m < \frac{9}{4}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} x^6 + 6x^4 + m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 + 3(x^2 + 2) &= (mx + 1)^3 + 3(mx + 1). \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$, $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) ta có $f(x^2 + 2) = f(mx + 1)$ nên $x^2 + 2 = mx + 1 \Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ trên $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Ta có $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$	1	2
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$	$\frac{5}{2}$		$\frac{5}{2}$

$\searrow \quad \nearrow$
2

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ khi $2 < m \leq \frac{5}{2}$.

Ví dụ 25. Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{40m + \sqrt{40m + x^2}} = x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt?

(A) 2.

(B) 0.

(C) Vô số.

(D) 1.

Lời giải

Điều kiện $40m + x^2 \geq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{40m + \sqrt{40m + x^2}} = x^2 &\Leftrightarrow 40m + \sqrt{40m + x^2} = x^4 \\ &\Leftrightarrow 40m + x^2 + \sqrt{40m + x^2} = x^4 + x^2. \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0 \Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{40m + x^2}) = f(x^2) \Leftrightarrow \sqrt{40m + x^2} = x^2 \Leftrightarrow 40m = x^4 - x^2$.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - x^2$ có $g'(x) = 4x^3 - 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra,

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 40m = -\frac{1}{4} \\ 40m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{160} \\ m > 0. \end{cases}$

Vì m âm nên $m = -\frac{1}{160}$.

Vậy có 1 giá trị của tham số m cần tìm.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

 **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- ☐ (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- ☐ (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- ☐ (D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

 **Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng

- ☐ (A) $(-1; 0)$.
- ☐ (B) $(-\infty; -\frac{1}{2})$.
- ☐ (C) $(-\infty; -1)$.
- ☐ (D) $(0; 1)$.

 **Câu 3.** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$.
- ☐ (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$.
- ☐ (C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; 1)$.
- ☐ (D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

- Câu 4.** Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 5$ nghịch biến trên các khoảng nào sau đây?
 (A) $(-1; 0)$. (B) $(0; 1)$. (C) $(-1; 1)$. (D) $(1; +\infty)$.
- Câu 5.** Hàm số $y = -x^4 + 8x^2 + 6$ đồng biến trên các khoảng
 (A) $(-2; 0)$. (B) $(-2; 2)$. (C) $(-\infty; -2)$. (D) $(2; +\infty)$.
- Câu 6.** Cho hàm số $y = \frac{3-x}{x+1}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?
 (A) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 (B) Hàm số nghịch biến với mọi $x \neq 1$.
 (C) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 (D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Câu 7.** Hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ đồng biến trên khoảng
 (A) $(-\infty; -2)$. (B) $(2; +\infty)$. (C) $(-3; 3)$. (D) $(3; +\infty)$.
- Câu 8.** Hàm số $y = \frac{x^2 - 3x}{x+1}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?
 (A) $(-3; 1)$. (B) $(-3; -1)$. (C) $(-\infty; -3)$. (D) $(1; +\infty)$.
- Câu 9.** Hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ nghịch biến trên
 (A) $(2; +\infty)$. (B) $(0; 2)$. (C) $(2; 4)$. (D) $(0; 4)$.
- Câu 10.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2} - x$. Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?
 (A) $(0; 1)$. (B) $(-\infty; 1)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(1; 2)$.

D BẢNG ĐÁP ÁN

❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. D	2. A	3. A	4. B	5. C	6. C	7. D	8. B	9. C	10. D
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

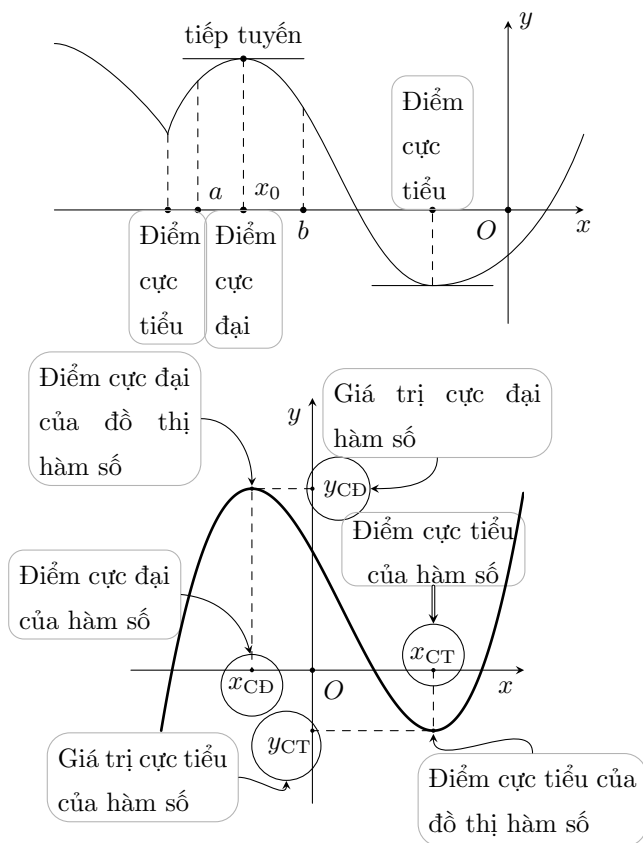
BÀI 2. CỰC TRỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

❖ **Định nghĩa 2.1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$, b là $+\infty$) và $x_0 \in (a; b)$:

❖ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

❖ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .



1 CÁC ĐỊNH LÝ

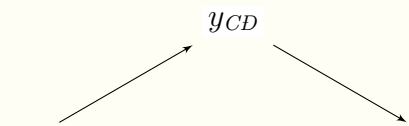
❖ **Định lý 2.1. (điều kiện cần)**

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

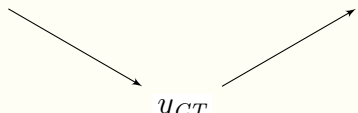
Định lí 2.2. (điều kiện đủ)

Giả sử $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$. Khi đó

➤ Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

➤ Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Nói cách khác:

➤ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

➤ Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

Định lí 2.3. Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó

➤ Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

➤ Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

Nhận xét. Một hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0, hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm, chẳng hạn hàm số $y = |x|$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm Cực Trị Của Hàm Số Cho Bởi Công Thức

❖❖❖ BÀI TẬP MẪU ❖❖❖

Ví dụ 1. Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 12x - 1$ bằng

(A) -17.

(B) -2.

(C) 45.

(D) 15.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 12$.

Với $y' = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 12x - 1$ như hình dưới.

x	$-\infty$	-2	2	∞	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	15	-17	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số là $y = 15$, đạt được tại $x = -2$.

Ví dụ 2. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ là

- (A) $(0; -1)$. (B) $(0; 3)$. (C) $(\sqrt{2}; -1)$. (D) $(-\sqrt{2}; -1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$.

$$\text{Với } y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ như hình dưới.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	∞		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			$+\infty$
			-1		-1		

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực đại là $y = 3$ tại $x = 0$.

Do đó điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ là $(0; 3)$.

Ví dụ 3 (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh – Cụm 5 năm 2017). Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ bằng

- (A) $4\sqrt{5}$. (B) 4 . (C) 8 . (D) $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có

$$y' = \frac{(2x - 2)(x + 1) - (x^2 - 2x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}.$$

$$\text{Với } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in \mathcal{D} \\ x = 1 \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số như hình vẽ.

x	$-\infty$	-3	-1	-1	∞				
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$			
y	$-\infty$		-8		$+\infty$		0		∞

Từ bảng biến thiên, ta thấy hai điểm cực trị của hàm số là $A(-3; -8)$ và $B(-1; 0)$.
Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (0+8)^2} = 4\sqrt{5}$.

Ví dụ 4. Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 5$ có ba điểm cực trị là A, B, C . Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- Ⓐ $G\left(0; \frac{11}{3}\right)$. Ⓑ $G\left(0; \frac{17}{3}\right)$. Ⓒ $G(0; 4)$. Ⓓ $G\left(1; \frac{13}{3}\right)$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = -4x^3 + 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Giả sử $A(0; 5), B(-1; 6), C(1; 6)$.

Suy ra $G\left(0; \frac{17}{3}\right)$.

Ví dụ 5. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có hai điểm cực trị A, B . Diện tích tam giác OAB bằng

- Ⓐ 2. Ⓑ $\frac{1}{2}$. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Giả sử $A(1; 0), B(-1; 4)$. Khi đó

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}.$$

Phương trình đường thẳng AB là $2x + y - 2 = 0$.

$$d(O, AB) = \frac{|-2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}AB \cdot d(O, AB) = 2.$$

Ví dụ 6. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

- Ⓐ 1. Ⓑ $1 + \sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{2} - 1$. Ⓓ $\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Giả sử $A(0; 4)$, $B(-1; 3)$, $C(1; 3)$. Khi đó $AB = AC = \sqrt{2}$, $BC = 2$.

Suy ra tam giác ABC vuông cân tại A .

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

$$r = \frac{2S_{ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{AB \cdot AC}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{2}{2(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} - 1.$$

Dạng 2. Dựa Vào Bảng Xét Dấu, Bảng Biến Thiên Và Đồ Thị

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 (Đề TN THPT 2021-Lần 2-Mã đề 101). Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

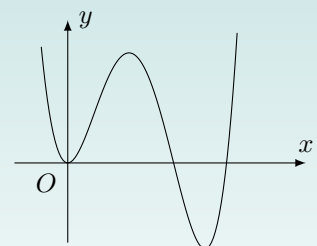
Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$.
Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Ví dụ 2.

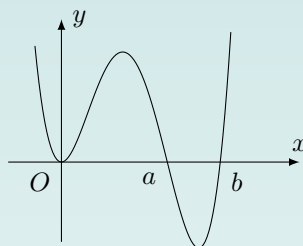
Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Mệnh đề nào đúng?

- (A) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.
(B) Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
(C) Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
(D) Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.



Lời giải

Nhận thấy đồ thị $y = f'(x)$ cắt Ox tại $x = 0, x = a, x = b$ như hình vẽ.



Khi đó, ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

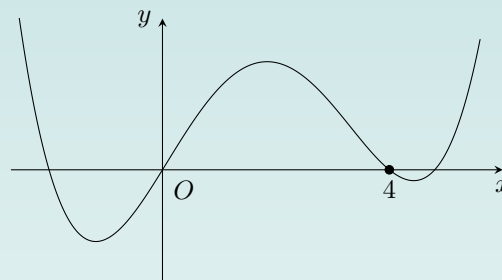
x	$-\infty$	0	a	b	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

Vậy hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Ví dụ 3.

Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là

- (A) 5. (B) 3. (C) 7. (D) 11.



Lời giải

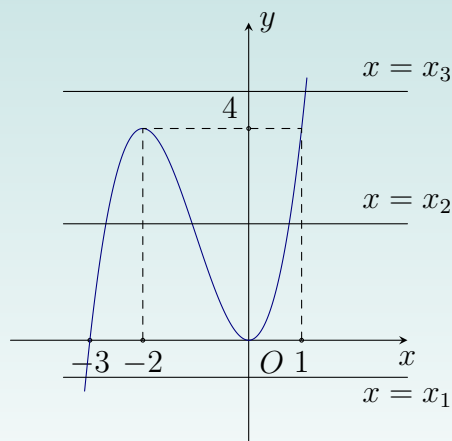
Từ đồ thị suy ra hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $x_1 < 0 < x_2 < 4 < x_3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$, ta có $g'(x) = (3x^2 + 6x)f'(x^3 + 3x^2)$.

$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = x_i, i = \overline{1, 2, 3}. \end{cases}$$

Ta có đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2$.

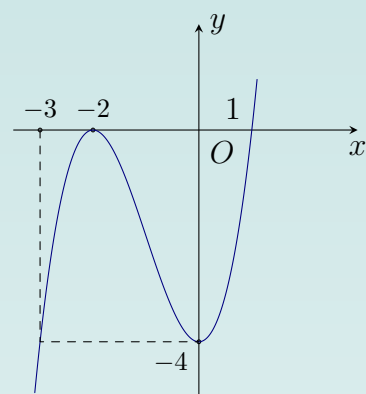
Ta có nhận xét rằng phương trình $x^3 + 2x^2 = x_1$ có 1 nghiệm, phương trình $x^3 + 2x^2 = x_2$ có 3 nghiệm, phương trình $x^3 + 3x^2 = x_3$ có 1 nghiệm và cả 5 nghiệm này đều đôi một phân biệt và khác 0 và -2 .
Như vậy, $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt.
Do đó, hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.



Ví dụ 4.

Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x)$ là

- (A) 5. (B) 2. (C) 3. (D) 4.



Lời giải

$$\text{Ta có } g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x), g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 & (1) \\ f'(x^3 - 3x) = 0. & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Dựa vào đồ thị đã cho thì } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = -2 \\ x^3 - 3x = 1. \end{cases}$$

$$\text{Trong đó phương trình } x^3 - 3x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Còn phương trình $x^3 - 3x = 1$ có 3 nghiệm phân biệt: $-2 < x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$ và $1 < x_3 < 2$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$.

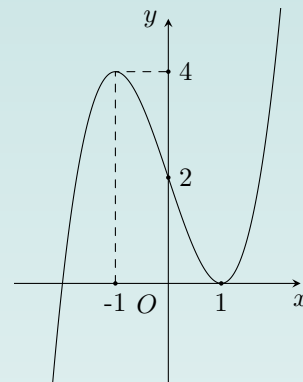
x	$-\infty$	-2	x_1	-1	x_2	1	x_3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực đại.

Ví dụ 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là

- (A) 3. (B) 4. (C) 1. (D) 2.

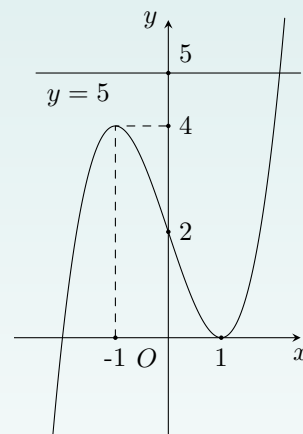


Lời giải

Ta có $y = f(x) - 5x$. Suy ra $y' = f'(x) - 5$.

Dựa vào đồ thị ta có $y = f'(x)$ cắt đường thẳng $y = 5$ tại đúng một điểm x_0 (x_0 là nghiệm đơn của phương trình $f'(x) = 5$).

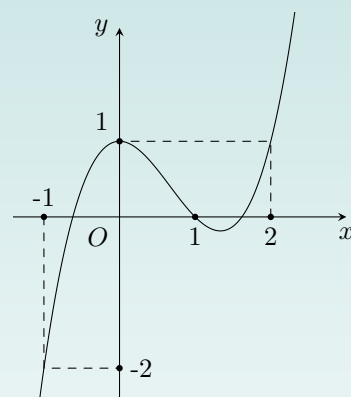
Vậy hàm số $y = f(x) - 5x$ có đúng một điểm cực trị.



Ví dụ 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại điểm nào?

- (A) $x = 1$. (B) $x = -1$. (C) $x = 0$. (D) $x = 2$.



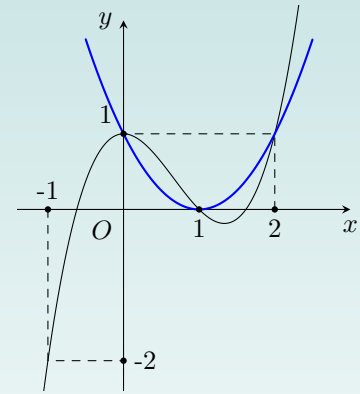
Lời giải

Ta có $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $g'(x) = f'(x) - (x-1)^2$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x)$ và Parabol $y = (x-1)^2$, $g'(x) > 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên Parabol $y = (x-1)^2$ và ngược lại.

Từ đồ thị suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1, \text{ nhưng } g'(x) \text{ chỉ đổi} \\ x = 2 \end{cases}$

dấu từ dương sang âm khi qua $x = 1$. Do đó hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.



Dạng 3. Tìm m Để Hàm Số Có Cực Trị Thỏa Điều Kiện

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Tìm các tham số m để hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- (A) $m = 0$. (B) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. (C) $m \in \{0; 2\}$. (D) $m = 2$.

Lời Giải

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1), y'' = 6x - 6m.$$

Hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ suy ra

$$y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 - 6m + 3m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2. \end{cases}$$

Với $m = 0$ ta có $y'' = 6x \Rightarrow y''(1) = 6 > 0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ (Không thỏa mãn đề bài).

Với $m = 2$ ta có $y'' = 6x - 12 \Rightarrow y''(1) = -6 < 0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ (thỏa mãn đề bài).

Vậy $m = 2$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x$. Tìm tham số m để hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

- (A) $m = -1$. (B) $m = \pm 2$. (C) $m = \pm 1$. (D) $m = 2$.

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - 2mx - 1$.

$\Delta' = m^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn có 2 cực trị.

Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số. Suy ra $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2m \\ P = x_1x_2 = -1. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 7 \\ &\Leftrightarrow S^2 - 3P = 7 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 + 3 = 7 \\ &\Leftrightarrow m = \pm 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Biết hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Hỏi m thuộc tập hợp nào sau đây?

- (A) $(-1; 7)$. (B) $(7; 10)$. (C) $(-15; -7)$. (D) $(-7; -1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3. \quad (*)$$

Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số. Suy ra $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2 \\ P = x_1x_2 = \frac{m}{3}. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13 \\ &\Leftrightarrow S^2 - 3P = 13 \\ &\Leftrightarrow 4 - 3 \cdot \frac{m}{3} = 13 \\ &\Leftrightarrow m = -9. \end{aligned}$$

Kết hợp với (*) suy ra $m = -9 \in (-15; -7)$.

Ví dụ 4. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1), B, C$ thỏa mãn $BC = 4$. Khi đó tham số m bằng

- (A) 4. (B) $\sqrt{2}$. (C) 2. (D) -2.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m. \end{cases}$

Để hàm số có ba cực trị thì $m > 0$.

Giả sử đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; 1)$, $B(-\sqrt{m}; 1 - m^2)$, $C(\sqrt{m}; 1 - m^2)$. Ta có

$$BC = 4 \Leftrightarrow \sqrt{4m} = 4 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (nhận).}$$

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4 - m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị.

(A) 27.

(B) 31.

(C) 28.

(D) 30.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4 - m)x$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 - m.$$

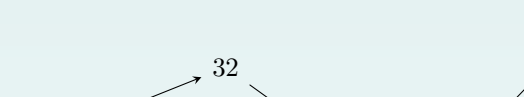
Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị dương.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 = m$ (1).

$$\text{Đặt } h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 \Leftrightarrow h'(x) = 12x^2 - 72x + 60 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	1	5	$+\infty$	
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$					

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ dương.

Dựa vào BBT ta có $4 < m < 32$.

Vì m là số nguyên nên $m \in \{5; 6; 7; \dots; 31\}$ nên có 27 số nguyên.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 1$ là

- (A) $x = 0$. (B) $M(-2; -19)$. (C) $N(0; 1)$. (D) $x = -2$.

Câu 2. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 5$ là

- (A) $A(-1; 6)$. (B) $x = 0$. (C) 5 . (D) $B(0; 5)$.

Câu 3. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ bằng

- (A) 2 . (B) $(0; 2)$. (C) $(1; 3)$. (D) 3 .

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- (A) $x = -1$. (B) $x = -2$. (C) $x = 0$. (D) $(-2; -3)$.

Câu 5. Gọi A, a lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Giá trị của $A^2 - 2a$ bằng

- (A) 6 . (B) 7 . (C) 8 . (D) 9 .

Câu 6. Giá trị cực đại của $y = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ bằng

- (A) 0 . (B) 2 . (C) 3 . (D) $\sqrt{3}$.

Câu 7. Cực đại của hàm số $y = x\sqrt{1 - x^2}$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $-\sqrt{2}$. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 8 (Đề thi THPTQG năm 2019 – Mã đề 104). Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
t	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

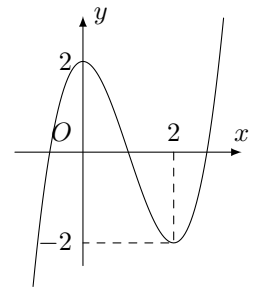
Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm

- (A) $x = -2$. (B) $x = 1$. (C) $x = 3$. (D) $x = 2$.

Câu 9 (Sở GD & ĐT Tp. HCM).

Cho hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào đúng?

- (A) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
 (B) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.
 (C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
 (D) Hàm số có ba điểm cực trị.



Câu 10 (THPT chuyên Vĩnh Phúc 2018). Hàm số $y = \frac{x+1}{2x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

Câu 11 (Sở GD & ĐT Bạc Liêu). Điểm cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ là

- (A) $x = 11$. (B) $x = 3$. (C) $x = 7$. (D) $x = -1$.

Câu 12 (THPT Thăng Long – Hà Nội). Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. Điểm cực tiểu của hàm số là

- (A) $x = 1$. (B) $A(0; 1)$. (C) $x = -1$. (D) $x = 0$.

Câu 13 (THPT Nhân Chính – Hà Nội). Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -4)$.
 (B) Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$.
 (C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
 (D) Hàm số không có cực trị.

Câu 14 (Sở GD & ĐT Tp. Hồ Chí Minh – Cụm 5 năm 2017). Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ bằng

- (A) $4\sqrt{5}$. (B) 4. (C) 8. (D) $5\sqrt{2}$.

Câu 15 (Sở GD&ĐT Bắc Ninh). Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có giá trị cực đại bằng

- (A) 0. (B) 2. (C) -1. (D) 4.

🔗🔗🔗 BẢNG ĐÁP ÁN 🔗🔗🔗

1. C	2. D	3. A	4. C	5. B	6. B	7. D	8. C	9. C	10. B
11. B	12. D	13. C	14. A	15. D					