

ĐẠI SỐ

BÀI 2 . PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1) Phương trình $\sin x = a$

Trường hợp $|a| > 1$ Phương trình vô nghiệm, vì $|\sin x| \leq 1$ với mọi x .

Trường hợp $|a| \leq 1$

Phương trình $\sin x = a$ có các nghiệm là
$$\begin{aligned} x &= \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z}; \\ x &= \pi - \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Nếu số thực α thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = a \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin a$

(đọc là ac-sin- a , nghĩa là cung có sin bằng a). Khi đó, các nghiệm của phương trình $\sin x = a$ được viết là
$$\begin{aligned} x &= \arcsin a + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{và } x &= \pi - \arcsin a + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

CHÚ Ý

a) Phương trình $\sin x = \sin \alpha$, với α là một số cho trước, có các nghiệm là

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{và} \quad x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Tổng quát, $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

b) Phương trình $\sin x = \sin \beta^\circ$ có các nghiệm là
$$\begin{aligned} x &= \beta^\circ + k360^\circ, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{và} \quad x &= 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ, & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

c) Trong một công thức về nghiệm của phương trình lượng giác không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

d) Các trường hợp đặc biệt :

- $a = 1$: Phương trình $\sin x = 1$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $a = -1$: Phương trình $\sin x = -1$ có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $a = 0$: Phương trình $\sin x = 0$ có các nghiệm là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 1 . Giải các phương trình sau :

a) $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sin x = \frac{1}{5}$ có các nghiệm là $x = \arcsin \frac{1}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \arcsin \frac{1}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

2). Phương trình $\cos x = a$

Trường hợp $|a| > 1$ Phương trình $\cos x = a$ vô nghiệm vì $|\cos x| \leq 1$ với mọi x .

Trường hợp $|a| \leq 1$ Phương trình $\cos x = a$ có các nghiệm là $x = \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

CHÚ Ý

a) Phương trình $\cos x = \cos \alpha$, với α là một số cho trước, có các nghiệm là $x = \pm \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tổng quát, $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình $\cos x = \cos \beta^\circ$ có các nghiệm là $x = \pm \beta^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

c) Nếu số thực α thỏa mãn các điều kiện $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \pi \\ \cos \alpha = a \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arccos a$ (đọc là ac-cosin- a , có nghĩa là cung có cosin bằng a).
 Khi đó, các nghiệm của phương trình $\cos x = a$ còn được viết là $x = \pm \arccos a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) Các trường hợp đặc biệt :

- $a = 1$: Phương trình $\cos x = 1$ có các nghiệm là $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $a = -1$: Phương trình $\cos x = -1$ có các nghiệm là $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $a = 0$: Phương trình $\cos x = 0$ có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

a) $\cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$
 $\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{1}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\cos(x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x + 60^\circ) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow x + 60^\circ = \pm 45^\circ + k360^\circ$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -15^\circ + k360^\circ \\ x = -105^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

3). Phương trình $\tan x = a$

Điều kiện của phương trình là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

nghiệm của phương trình $\tan x = a$ là $x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

CHÚ Ý

a) Phương trình $\tan x = \tan \alpha$, với α là một số cho trước, có các nghiệm là $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tổng quát, $\tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) Phương trình $\tan x = \tan \beta^\circ$ có các nghiệm là

$$x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau :

a) $\tan x = \tan \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) $\tan 2x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x = \arctan \left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \arctan \left(-\frac{1}{3}\right) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) Vì $\sqrt{3} = \tan 60^\circ$ nên $\tan(3x + 15^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(3x + 15^\circ) = \tan 60^\circ$
 $\Leftrightarrow 3x + 15^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow 3x = 45^\circ + k180^\circ$
 $\Leftrightarrow x = 15^\circ + k60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

4. Phương trình $\cot x = a$

Điều kiện của phương trình là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

nghiệm của phương trình $\cot x = a$ là $x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

CHÚ Ý

a) Phương trình $\cot x = \cot \alpha$, với α là một số cho trước, có các nghiệm là $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Tổng quát, $\cot f(x) = \cot g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình $\cot x = \cot \beta^\circ$ có các nghiệm là $x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau :

a) $\cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow 4x = \frac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cot 3x = -2 \Leftrightarrow 3x = \operatorname{arccot}(-2) + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\operatorname{arccot}(-2) + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c)
$$\begin{aligned}\cot(2x - 10^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot(2x - 10^\circ) = \cot 60^\circ \\ \Leftrightarrow 2x - 10^\circ &= 60^\circ + k180^\circ \\ \Leftrightarrow x &= 35^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

GHI NHỚ

Mỗi phương trình $\sin x = a (|a| \leq 1); \cos x = a (|a| \leq 1); \tan x = a; \cot x = a$

có vô số nghiệm. Giải các phương trình trên là tìm tất cả các nghiệm của chúng.

Bài tập

1 Giải các phương trình sau :

a) $\sin(x + 2) = \frac{1}{3}$

b) $\sin 3x = 1$

c) $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

d) $\sin(2x + 20^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Giải các phương trình sau :

a) $\cos(x - 1) = \frac{2}{3}$;

b) $\cos 3x = \cos 12^\circ$

c) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

d) $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$

3. Giải các phương trình sau :

a) $\tan(x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

b) $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3}$

HÌNH HỌC

PHÉP QUAY

I..Định nghĩa: Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α

Nhận xét: Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.

Với k là số nguyên ta luôn có Phép quay $Q_{(0,2k\pi)}$ là phép đồng nhất. Phép quay $Q_{(0,(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O .

II. TÍNH CHẤT

Tính chất 1: Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 2: Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

Nhận xét: Phép quay góc α với $0 < \alpha < \pi$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d' sao cho góc giữa d và d' bằng α (nếu $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), hoặc bằng $\pi - \alpha$ (nếu $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$)

BÀI TẬP

- 1 Cho hình vuông $ABCD$ tâm O .
 - a) Tìm ảnh của điểm C qua phép quay tâm A góc 90°
 - b) Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc -90°
- 2 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2; 0)$ và đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90° .

