

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1	Ứng Dụng Đạo Hàm Khảo Sát Hàm Số	1
3	GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT	1
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ	1
B	VÍ DỤ MINH HỌA	2
	Dạng 1. Tìm GTLN-GTNN trên Khoảng, đoạn	2
	Dạng 2. Tìm GTLN-GTNN trên Khoảng, đoạn có chứa tham số	4
	Dạng 3. Tìm GTLN-GTNN khi cho $f'(x)$	6
	Dạng 4. GTLN-GTNN Của Hàm Nhiều Biến	7
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	9
D	BẢNG ĐÁP ÁN	11

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

⇔ **Định nghĩa 3.1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$.

$$M = \max_{\mathcal{D}} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}: f(x_0) = M. \end{cases}$$

$$m = \min_{\mathcal{D}} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}: f(x_0) = m. \end{cases}$$

🔵 **Định lý 3.1.** Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Hai bài toán cơ bản cần nhớ

🔵 Bài toán 1. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

📌 Bước 1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Tính $f'(x)$ và tìm những điểm x_i sao cho tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc liên tục nhưng không có đạo hàm.

📌 Bước 2. Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$.

📌 Bước 3. Kết luận:
$$\begin{cases} \max_{[a; b]} f(x) = \max\{f(a); f(b); f(x_i)\} \\ \min_{[a; b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_i)\}. \end{cases}$$

🔵 Bài toán 2. Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$.

📌 Bước 1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$. Cho $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

- 🍃 Bước 2. Xét dấu biểu thức $y' = f'(x)$ và lập bảng biến thiên (có tính giới hạn).
- 🍃 Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để kết luận GTLN (GTNN nếu có)

Định lý 3.2.  Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$.

 Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$.

VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Tìm GTLN-GTNN trên Khoảng, đoạn.

🔗🔗🔗 VÍ DỤ 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$. Tính $M + m$.

- (A) 8. (B) 10. (C) 6. (D) 4.

Lời giải

Xét hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ trên $[0; 3]$

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Ta có $y(0) = 2; y(2) = 6; y(3) = 2$.

Vậy $M = 6; m = 2$ suy ra $M + m = 6 + 2 = 8$.

Ví dụ 2. Giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; \sqrt{3}]$ là

- (A) $M = 9$. (B) $M = 8\sqrt{3}$. (C) $M = 1$. (D) $M = 6$.

Lời giải

$$y = x^4 - 2x^2 + 3 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; \sqrt{3}] \\ x = 1 \in [0; \sqrt{3}] \\ x = -1 \notin [0; \sqrt{3}] \end{cases}$$

$$y(0) = 3; y(1) = 2; y(\sqrt{3}) = 6.$$

Vậy $M = 6$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2} + 2$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng bao nhiêu?

(A) $\sqrt{3} + 2$.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải

Tập xác định $[0; 2]$.

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	0	1	2
y'		-	+
y	2	3	2

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2020.

Dạng 2. Tìm GTLN-GTNN trên Khoảng, đoạn có chứa tham số.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1; 1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m .

- (A) $m = -6$. (B) $m = -3$. (C) $m = -4$. (D) $m = -5$.

Lời giải

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 6x^2 - 6x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1; 1) \\ x = 1 \notin (-1; 1). \end{cases}$$

Vì $y(-1) = -5 - m$; $y(1) = -1 - m$; $y(0) = -m$ nên $\min_{[-1;1]} y = -5 - m = -1 \Rightarrow m = -4$.

❖❖❖❖ **VÍ DỤ** ❖❖❖❖

Ví dụ 1. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m bằng

- (A) 1. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^2 + 2x$.

Ta có $f'(x) = 2x + 2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1)$.

$$f(-2) = 0; f(1) = 3; f(-1) = -1.$$

Do đó $\max_{[-2;1]} f(x) = 3$; $\min_{[-2;1]} f(x) = -1$.

$$\text{Suy ra } \max_{[-2;1]} y = \max\{|m - 5|; |m - 1|\} \geq \frac{|m - 5| + |m - 1|}{2} \geq \frac{|5 - m + m - 1|}{2} = 2.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 5| = |m - 1| \\ (5 - m)(m - 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Ví dụ 2. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \sqrt{2x - x^2} - 3m + 4 \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- (A) $m = \frac{3}{2}$. (B) $m = \frac{5}{3}$. (C) $m = \frac{4}{3}$. (D) $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định $\mathcal{D} = [0; 2]$.

Đặt $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $x \in \mathcal{D}$, ta có $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$f(0) = 0$; $f(2) = 0$; $f(1) = 1$.

Suy ra

$$P = \max_{\mathcal{D}} y = \max\{|3m-4|; |3m-5|\} \geq \frac{|3m-4| + |3m-5|}{2} \geq \frac{|5-3m+3m-4|}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |3m-4| = |3m-5| \\ (5-3m)(3m-4) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Ví dụ 3. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Giá trị của biểu thức $a + 2b$ khi M nhỏ nhất là

(A) 3.

(B) -4.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-1) = -a + b + 1 \\ f(1) = a + b + 1 \\ 3a + b + 9 \end{cases} \Rightarrow f(3) - 2f(1) + f(-1) = 8.$$

$$\text{Gọi } M \text{ là } \max_{[-1;3]} f(x), \text{ nên ta có } \begin{cases} M \geq |f(-1)| \\ M \geq |f(1)| \\ M \geq |f(3)|. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} 4M &\geq |f(3)| + |f(-1)| + |-2f(1)| \\ &\geq |f(3) - 2f(1) + f(-1)| \\ &\geq 8. \end{aligned}$$

Vậy $M = \max_{[-1;3]} f(x) = 2$ khi và chỉ khi

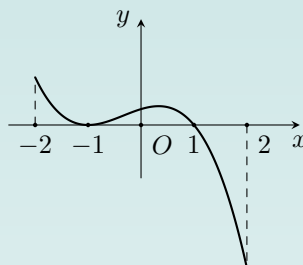
$$\begin{cases} |f(1)| = |f(-1)| = |f(3)| = 2 \\ f(3) \cdot f(-1) > 0 \\ [f(3) + f(-1)] \cdot f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(3) = f(-1) = 2 \\ f(1) = -2 \\ f(3) = f(-1) = -2 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1. \end{cases}$$

Vậy $a + 2b = (-2) + 2(-1) = -4$.

Dạng 3. Tìm GTLN-GTNN khi cho $f'(x)$.

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 2]$, có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$.



- (A) 2. (B) -1. (C) -2. (D) 1.

Lời giải

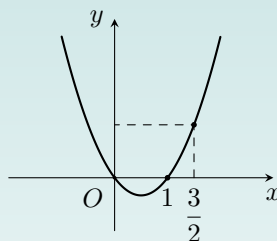
Xét trên $[-2; 2]$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1. \end{cases}$

Bảng biến thiên

t	-2	-1	1	2	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(-2)$ </				

Suy ra $\max_{[-2; 2]} y = f(1)$ khi $x = 1$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?

- (A) 1, 5. (B) -1. (C) 0. (D) 1.

Lời giải

Xét trên $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 1 \text{ (nhận)}. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$f(1)$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$

Suy ra $\min_{\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]} y = f(1)$ khi $x = 1$.

Dạng 4. GTLN-GTNN Của Hàm Nhiều Biến

VÍ DỤ

 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		+
y	$-\infty$	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b$ bằng

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(B) $-\frac{3}{8}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

(D) $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a > 0 \\ y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ac \geq \frac{b^2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= a^2 + c^2 + b \geq 2ac + b \geq \frac{2b^2}{3} + b \\ \Leftrightarrow P &\geq \frac{2}{3} \left(b + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{3}{8} \\ \Rightarrow P &\geq -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Vậy $P_{\min} = -\frac{3}{8}$ đạt được khi $\begin{cases} b = -\frac{3}{4} \\ a = c = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

Ví dụ 2. Cho hai số $x, y > 0$ thỏa điều kiện $\log_3(4^x + 2^{x+1}y + 4y^2) - \log_3(2^{x+1}y) = \frac{2^x(4y - 2^x)}{4y^2}$. Gọi M là giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4^x - y^3 - 4y + 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- (A) $M \in (2; 4)$. (B) $M \in (0; 2)$. (C) $M \in (-2; 0)$. (D) $M \in (4; 6)$.

Lời giải

Đặt $a = 2^x > 0$, $b = 2y > 0$ ta được

$$\log_3(a^2 + ab + b^2) - \log_3(ab) = \frac{2a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{2a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

$$\text{Mà } VT = \log_3\left(\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}\right) \geq \log_3 3 = 1 \text{ và } VP = \frac{2a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 \leq 1.$$

Nên đẳng thức xảy ra khi $a = b$ hay $2^x = 2y$.

Khi đó, $P = 4y^2 - y^3 - 4y + 1$ với $y > 0$.

$$\text{Ta có } P' = -3y^2 + 8y - 4 \Rightarrow P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

y	0	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$f'(y)$		0	0	
$f(y)$	1	$-\frac{5}{27}$	1	$-\infty$

Theo BBT ta suy ra $M = 1$.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a > 1, b > 0, c > 0$ và bất phương trình $a^{x^2} \cdot (b+4c)^{2x+3} \geq 1$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{16a}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a = m, b = n, c = p$. Khi đó, tổng $m + n + p$ bằng

(A) $\frac{81}{16}$. (B) $\frac{57}{20}$. (C) $\frac{32}{3}$. (D) $\frac{51}{16}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} a^{x^2} \cdot (b+4c)^{2x+3} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x \log_2(b+4c) + 3 \log_a(b+4c) &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \Delta' = \log_2^2(b+4c) - 3 \log_a(b+4c) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 0 \leq \log_a(b+4c) &\leq 3 \\ \Leftrightarrow 1 \leq b+4c &\leq a^3. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{16a}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ &= \frac{16a}{3} + \frac{1}{b} + \frac{4}{4c} \\ &\geq \frac{16a}{3} + \frac{9}{b+4c} \\ &\geq \frac{16a}{3} + \frac{9}{a^3} = 3 \cdot \frac{16a}{9} + \frac{9}{a^3} \\ &\geq 4 \sqrt[4]{\frac{16^3}{9^2}} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{3}{2}, b = \frac{9}{8}, c = \frac{9}{16} \Rightarrow m + n + p = \frac{51}{16}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Gọi d là hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+3}{2x-1}$ trên đoạn $[1; 4]$. Tính giá trị của d ?

- (A) $d = 2$. (B) $d = 4$. (C) $d = 5$. (D) $d = 3$.

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) $\frac{13}{4}$. (C) -3 . (D) 1 .

Câu 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[-4; -2]$.

(A) $\min_{[-4; -2]} f(x) = -6.$

(B) $\min_{[-4; -2]} f(x) = -7.$

(C) $\min_{[-4; -2]} f(x) = -8.$

(D) $\min_{[-4; -2]} f(x) = -\frac{19}{3}.$

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \frac{1}{x+1}$ trên đoạn $[1; 3]$ là

(A) $\frac{1}{2}.$

(B) 3.

(C) $\frac{7}{4}.$

(D) $\frac{11}{4}.$

Câu 5. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; 3]$ có bảng biến thiên

x	-1	2	3
y'	-	0	+
y	2	-2	5

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ là

(A) 2.

(B) 1.

(C) -2.

(D) 0.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-2; 3]$.

(A) 9.

(B) 3.

(C) Không tồn tại.

(D) 4.

Câu 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x - 1}{x + 3}$ trên đoạn $[-2; 0]$.

(A) -6.

(B) -5.

(C) 2.

(D) $-\frac{1}{3}.$

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ bằng

(A) $\sqrt{5}.$

(B) $\sqrt{2}.$

(C) 2.

(D) $\sqrt{3}.$

Câu 9. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?

(A) 24 m/s.

(B) 108 m/s.

(C) 64 m/s.

(D) 18 m/s.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 - m^2x + 2$ với tham số $m > 0$. Biết $\min_{[-m; m]} f(x) = \frac{14}{27}$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng

(A) $m \in (1; 3).$

(B) $m \in (-3; -1).$

(C) $m \in (-\infty; -3).$

(D) $m \in (3; +\infty).$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m^2 - m - 1|$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng các phần tử của S là

(A) -1.

(B) $\frac{1}{2}.$

(C) $-\frac{1}{2}.$

(D) 1.

-  **Câu 12.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ là
- (A) $-\frac{13}{3}$. (B) 1. (C) -3. (D) $-\frac{7}{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

🔗🔗🔗 BẢNG ĐÁP ÁN 🔗🔗🔗

1. D	2. B	3. B	4. A	5. C	6. A	7. B	8. B	9. A	10. A
11. D	12. C								