Toán 11- Tuần 6,7

PHẦN ĐẠI SỐ
Bài 3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

I - PHƯƠNG TRÌNH BÂC NHẤT ĐỐI VÓI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Định nghĩa: Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng
   $at+b=0$, trong đó a, b là các hằng số $(a \neq 0)$ và t là một trong các hàm số lượng giác.

2. Cách giải: Chuyển vế rồi chia hai vế của phương trình cho a, ta đưa phương trình về phương trình lượng giác cơ bản.
   Vi du 2. Giải các phương trình sau:
   a) $3\cos x+5=0$
   Chuyển vế ta có $3\cos x=-5$.Chia hai vế của phương trình cho 3, ta được $\cos x=-\frac{5}{3}$.
   Vì $-\frac{5}{3}<-1$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.
   b) $\sqrt{3}\cot x-3=0$, chuyển vế ta có $\sqrt{3}\cot x=3$. Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{3}$, ta được $\cot x=\sqrt{3}$. Vì $\sqrt{3}=\cot\frac{\pi}{6}$ nên $\cot x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x=\cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$
3. Phương trình đưa về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác
   Ví dụ 3. Giải các phương trình sau :
   a) $5\cos x-2\sin 2x=0 \Leftrightarrow 5\cos x-4\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(5-4\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 5-4\sin x=0\end{array}\right.$

   $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

   $5-4\sin x=0 \Leftrightarrow 4\sin x=5 \Leftrightarrow \sin x=\frac{5}{4}$, vì $\frac{5}{4}>1$ nên phương trình này vô nghiệm.
   Vậy phương trình có các nghiệm là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
   $b)$ $8\sin x\cos x\cos 2x=-1 \Leftrightarrow 4\sin 2x\cos 2x=-1 \Leftrightarrow 2\sin 4x=-1$
   $$\Leftrightarrow \sin 4x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 4x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{7\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

II - PHƯƠNG TRÌNH BÂC HAI ĐỐI VỐ MỘT HÀM SỐ LỰNG GIÁC

1. Định nghĩa: Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng
   $at^2+bt+c=0$ trong đó a, b, c là các hằng số $(a\neq 0)$ và t là một trong các hàm số lượng giác.
2. Cách giải: Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này. Cuối cùng, ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

Ví du . Giải phương trình $2\sin^2\frac{x}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}-2=0$

Giải. Đặt $\sin\frac{x}{2}=t$ với điều kiện $-1\leq t\leq 1$ ta được phương trình bậc hai theo t $2t^2+\sqrt{2}t-2=0$

Phương trình (1) có hai nghiệm $t_1=-\sqrt{2}$ và $t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ nhưng chỉ có $t_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$ thoả mãn điều kiện (*).
Vậy ta có

$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + k4\pi$$

III - PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI $\sin x$ và $\cos x$

1. Công thức biến đổi biểu thức $a\sin x + b\cos x$

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha),$$

$$\text{với } \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ và } \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2. Phương trình dạng $a\sin x + b\cos x = c$
   với $a, b, c \in \mathbb{R}; a, b$ không đồng thời bằng 0 $(a^2 + b^2 \neq 0)$.
   Nếu $a = 0, b \neq 0$ hoặc $a \neq 0, b = 0$, phương trình (2) có thể đưa ngay về phương trình lượng giác cơ bản.
   Nếu $a \neq 0, b \neq 0$, ta áp dụng công thức (1).

   Ví du . Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

   Giải. Theo công thức (1) ta có $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}\sin(x + \alpha) = 2\sin(x + \alpha)$
   trong đó $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Từ đó lấy $\alpha = \frac{\pi}{3}$ thì ta có $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

   Khi đó

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \quad \Leftrightarrow 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Bài tập

1 Giải phương trình $\sin^2 x - \sin x = 0$

2 Giải các phương trình sau :
a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$
b) $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$

3 Giải các phương trình sau :
a) $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$
b) $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$
c) $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$
d) $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$

4 Giải các phương trình sau :
a) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$
b) $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5$
c) $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$
d) $5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$

Bài tập ôn tập chương I

1 a) Hàm số $y = \cos 3x$ có phải là hàm số chẵn không ? Tại sao?
b) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ có phải là hàm số lẻ không ? Tại sao ?

2 Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, tìm những giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ để hàm số đó :
a) Nhận giá trị bằng -1;
b) Nhận giá trị âm.

3 Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số sau :
a) $y = \sqrt{2(1 + \cos x)} + 1$
b) $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

4 Giải các phương trình sau :
a) $\sin(x + 1) = \frac{2}{3}$
b) $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$
c) $\cot^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$;
d) $\tan\left(\frac{\pi}{12} + 12x\right) = -\sqrt{3}$.

5 Giải các phương trình sau :
a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$
b) $25\sin^2 x + 15\sin 2x + 9\cos^2 x = 25$
c) $2\sin x + \cos x = 1$;
d) $\sin x + 1{,}5\cot x = 0$.

Bài tập trắc nghiệm
Chon phương án đúng :

6 Phương trình $\cos x = \sin x$ có số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$ là :
(A) 2; (B) 4; (C) 5 ; (D) 6.

7 Phương trình $\frac{\cos 4x}{\cos 2x} = \tan 2x$ có số nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là :
(A) 2 ; (B) 3 ; (C) 4; (D) 5 .

8 Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos^2 x$ là :
(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$; (D) $\frac{\pi}{3}$.

9 Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là :
(A) $-\frac{\pi}{3}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) $-\frac{\pi}{6}$; (D) $-\frac{5\pi}{6}$

PHẦN HÌNH HỌC

Bài 7. PHÉP VỊ TỰ

I. ĐINH NGHĨA

Định nghĩa: Cho điểm O và só $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi diểm M thành diểm M' sao cho $\overrightarrow{OM}' = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tụ tâm O, tỉ số k.

Phép vị tự tâm O, tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O,k)}$.

Nhận xét

1. Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.
2. Khi $k = 1$, phép vị tự là phép đồng nhất.
3. Khi $k = -1$, phép vị tự là phép đối xứng qua tâm vị tự.
4. $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}(M')$

II. TÍNH CHẤT

Tinh chất 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tuỳ ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k| \cdot MN$

Tinh chất 2 Phép vị tự tỉ số k :

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các diểm ấy.

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoan thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn bán kính R thành đương tròn bán kinh $|k|R$.

III. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Định lí: Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tư biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Bài 8 . PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. ĐINH NGHĨA

Đinh nghĩa: Phép biến hình F được goi là phép đồng dạng tỉ só k $(k > 0)$, nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta luôn có $M'N' = kMN$

Nhân xét

1. Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.
2. Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$
3. Nếu thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số k và phép đồng dạng tỉ số p ta được phép đồng dạng tỉ số pk.

II. TÍNH CHẤT

Tính chất: Phép đồng dạng tỉ số k :

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoan thẳng thành đoan thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính kR.

III. HÌNH ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa:

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

Bài tập.

1. Cho hình chữ nhật $ABCD, AC$ và BD cắt nhau tại I. Gọi H, K, L và J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC và IC. Chứng minh hai hình thang $JLKI$ và $IHDC$ đồng dạng với nhau.

2.Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $I(1; 1)$ và đường tròn tâm I bán kính 2 . Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 45° và phép vị tự tâm O, tỉ số $\sqrt{2}$