

A -PHẦN GIẢI TÍCH CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC.

I. HỆ THỨC CƠ BẢN

$$(1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$(2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$(3) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$(4) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$(5) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$(6) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

II. CÔNG THỨC CỘNG

$$1) \cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$2) \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$3) \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$4) \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$5) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} \quad (a, b, a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$6) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} \quad (a, b, a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

III. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

IV. CÔNG THỨC HẠ BẬC

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}; \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \quad \tan^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

Chương I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1: CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1) Hàm số sin: $y = \sin x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị: $[-1, 1]$
- Tính chất: $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ ($k \in \mathbb{Z}$) (chu kỳ là 2π)
- Là hàm số lẻ.

2) Hàm số cosin: $y = \cos x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị: $[-1, 1]$
- Tính chất: $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ ($k \in \mathbb{Z}$) (chu kỳ là 2π)
- Là hàm số chẵn.

3) Hàm số tang: $y = \tan x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Tính chất: $\tan(x + k\pi) = \tan x$ ($k \in \mathbb{Z}$) (chu kỳ là π)
- Là hàm số lẻ.

4) Hàm số cotang: $y = \cot x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Tính chất: $\cot(x + k\pi) = \cot x$ ($k \in \mathbb{Z}$) (chu kỳ là π)
- Là hàm số lẻ

Chú ý: Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D :

- Là hàm số lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ \forall x \in D: f(-x) = -f(x) \end{cases}$
- Là hàm số chẵn $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ \forall x \in D: f(-x) = f(x) \end{cases}$

Bài 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

$$*\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}$$

với $a = \cos \alpha$

$$*\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}$$

với $a = \sin \alpha$

$$*\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \text{ hay } x = \arctan a + k\pi$$

với $a = \tan \alpha$

$$*\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \text{ hay } x = \operatorname{arccot} a + k\pi$$

với $a = \cot \alpha$

Đặc biệt:

$$*\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad * \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$

$$*\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \quad * \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$

$$*\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad * \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$*\cot x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Chú ý: Trong cùng một công thức về nghiệm của phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời 2 đơn vị độ và rad.

BÀI TẬP

Bài 1: Tập xác định của hàm số sau :

Chú ý: $y = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$) , $y = \sqrt{A}$ ($A \geq 0$) , $y = \frac{A}{\sqrt{B}}$ ($B > 0$)

$$1) y = \tan(3x - 20^\circ)$$

$$2) y = \frac{\cos x}{1 - \sin 2x}$$

$$3) y = \frac{2 \sin x}{1 - \cos 2x}$$

$$4) y = \frac{(x+1) \tan x}{\sin x}$$

$$5) y = 1 + 2 \tan\left(4x - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$6) y = y = \cot\left(\frac{x}{3} - 30^\circ\right)$$

7) $y = \frac{2 - \sin x}{2 \sin 5x - 2}$	8) $y = \frac{3}{1 + \cos x}$	9) $y = x \cot \left(\frac{\pi}{6} - x \right)$
10) $y = \frac{4}{1 - \sin(3x + 30^\circ)}$	11) $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$	12) $y = \frac{4}{2 + \sin x}$
13) $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x - 1}$	14) $y = \frac{2 \sin x}{1 + \cos x}$	15) $y = \tan(3x + \frac{\pi}{4})$
16) $y = 1 - 2 \cot(2x - \frac{\pi}{4})$	17) $y = \tan \frac{x}{3}$	18) $y = \cot 2x$
19) $y = \frac{3 \sin 2x}{1 - \sin(3x + \frac{\pi}{3})}$	20) $y = \frac{4}{\sin(5x + \frac{\pi}{4}) + 1}$	21) $y = \frac{5}{1 + \cos 4x}$
22) $y = \frac{\tan x}{\cos x + 2}$	23) $y = \frac{\sin 5x}{\sin 5x + 1}$	24) $y = \frac{\cos x}{\tan x}$
25) $y = \frac{1 - \cos x}{2 \sin x + \sqrt{2}}$	26) $y = \frac{\sin x - 2}{\cos 2x - \cos x}$	27) $y = \frac{2}{2 \sin 3x - \sqrt{3}}$
28) $y = \frac{\sin x}{\sqrt{3} - 2 \cos(2x - 30^\circ)}$	29) $y = \frac{2}{2 \sin 5x - 1}$	30) $y = \frac{5}{2 \cos 4x - \sqrt{2}}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	2) $2 \sin 2x + 1 = 0$	3) $\sin 4x = 0$
4) $\sin 2x - \sin 3x = 0$	5) $\sin(3x + \frac{\pi}{5}) = -\frac{1}{2}$	6) $\sin(2x + 20^\circ) + 1 = 0$
7) $\sqrt{2} \sin(3x + 10^\circ) + 1 = 0$	8) $\sin 2x \cdot \sin 3x = 0$	9) $\sin \left(2x - \frac{\pi}{7} \right) = \sin 3x$
10) $3 \sin x + 6 = 0$	11) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	12) $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
13) $\cos \left(2x - \frac{3\pi}{2} \right) - \cos x = 0$	14) $2 \cos(30^\circ - \frac{x}{2}) - 1 = 0$	15) $\cos 3x - \cos \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) = 0$
16) $1 - 3 \cos x = 0$	17) $\sin(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	18) $\sin \frac{3x}{5} = \cos \frac{2\pi}{7}$
19) $\cos \left(\frac{\pi}{3} - 4x \right) = \frac{-1}{2}$	20) $(2 \cos x + 1)(1 - \sin x) = 0$	21) $\cot(2x + \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$
22) $\cot(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$	23) $\tan(\frac{x}{5} - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$	24) $\sin \left(2x - \frac{\pi}{5} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{5} + x \right)$
25) $2 \sin 4x + \sqrt{3} = 0$	26) $2 \cos(5x - 40^\circ) + \sqrt{2} = 0$	27) $2 \sin(5x - 30^\circ) + 1 = 0$
28) $4 \cos(x + \frac{\pi}{3}) + 2\sqrt{2} = 0$	29) $\cos(4x - 45^\circ) = \frac{1}{2}$	30) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$$31) \sin\left(\frac{2\pi}{5} - 2x\right) = \frac{1}{2}$$

$$32) \cos\left(\frac{3x}{2} + 40^\circ\right) = 1$$

$$33) \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$34) \sqrt{3} \tan(\pi - x) + 1 = 0$$

$$35) \cot\left(\frac{x}{3} + 20^\circ\right) = -\sqrt{3}$$

$$36) \sqrt{3} + 3 \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$37) 3 \cot\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 1 = 0$$

$$38) 3 \tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$$

$$39) \tan 2x = \cot \frac{\pi}{5}$$

$$40) \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$41) 6 \cot 2x - 2\sqrt{3} = 0$$

$$42) \tan\left(\frac{x}{2} - 45^\circ\right) = -1$$

Bài 3: Tìm các nghiệm phương trình sau trong khoảng đã cho:

1) $\tan(2x - 15^\circ) = 1$ với $-180^\circ < x < 90^\circ$.

2) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

3) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ với $0 < x < \pi$

Bài 3: MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

1) Phương trình bậc hai đối với 1 hàm số lượng giác:

• Dạng :

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0 \quad (1)$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0 \quad (2) \quad (\text{với } a \neq 0)$$

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0 \quad (3)$$

$$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0 \quad (4)$$

• Cách giải :

Dạng (1), (2) : Đặt $t = \sin x$ hay $t = \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$)

Dạng (3), (4) : Đặt $t = \tan x$ hay $t = \cot x$.

2) Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$:

• Dạng : $a \sin x + b \cos x = c$ ($a^2 + b^2 \neq 0$)

• Cách giải : Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$.

• Điều kiện có nghiệm : $a^2 + b^2 \geq c^2$

3) Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$:

• Dạng : $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

• Cách giải:

* Xét $\cos x = 0$, kết luận nghiệm nếu có.

* Xét $\cos x \neq 0$, chia 2 vế của phương trình cho $\cos^2 x$, ta được phương trình bậc hai theo $\tan x$.

Chú ý : có thể giải theo phương pháp đưa về phương trình bậc nhất theo $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

Ví dụ: Giải pt: $2 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$

$$* \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 (\text{vô lí}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ không là nghiệm}$$

* $\cos x \neq 0$. Chia 2 vế pt cho $\cos^2 x$. Ta được pt

$$2 \tan^2 x + \tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{3}{2}\right) + k\pi \end{cases}$$

BÀI TẬP

Bài 1 : Giải các phương trình sau:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ | 2) $2\sin^2 3x + 5\sin 3x - 3 = 0$ | 3) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ |
| 4) $6\sin^2 x - 5 = 5 \cos x$ | 5) $4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} = 0$ | 6) $8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$ |
| 7) $2\cos 2x + \sin x + 3 = 0$ | 8) $\cos 6x + 9\cos 3x + 5 = 0$ | 9) $2\cos^2 5x + 3\sin 5x = 3$ |
| 10) $\tan^2 \frac{x}{2} - 7 \tan \frac{x}{2} + 10 = 0$ | 11) $2\sin^2 x + 4\sin x = 3\cos^2 x$ | 12) $3\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ |
| 13) $2 - \cos^2 x = \sin^4 x$ | 14) $\cos 2x - \sin x = 1$ | 15) $2\sin^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$ |
| 16) $3\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$ | 17) $5\sin^2 x + 3\cos x + 3 = 0$ | 18) $\cos^2 \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} + 1 = 0$ |
| 19) $\cos 4x - 5 \sin 2x = 3$ | 20) $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$ | 21) $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0$ |
| 22) $2 - 6\sin x \cos x = \cos 4x$ | 23) $\cos 4x + \cos^2 2x - \sin 2x = 0$ | 24) $\tan^2 x - \tan x = 2$ |
| 25) $2 + \cos 2x - \cos 4x = 0$ | 26) $2\sin^2 x - 3\cos 2x - 5\cos x + 1 = 0$ | 27) $2\tan^2 \frac{3x}{2} + 5\tan \frac{3x}{2} = -3$ |
| 28) $\cot^2 2x - 3\cot 2x - 10 = 0$ | 29) $\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$ | 30) $\sin^2 5x - 3\cos 5x + 3 = 0$ |

Bài 2 : Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|---|
| 1) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$ | 2) $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = -1$ |
| 3) $\cos x - \sin x = 1$ | 4) $2\cos x + \sin x = \sqrt{5}$ |
| 5) $3\cos x - 4\sin x = 3$ | 6) $2\sin x \cos x - \sqrt{3} \cos 2x = 1$ |
| 7) $5\sin 2x + 12\cos 2x = -13$ | 8) $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 0$ |
| 9) $3\sin 4x - \sqrt{3} \cos 4x = \sqrt{3}$ | 10) $\sqrt{3} \cos 2x + (\sin x + \cos x)^2 = 0$ |
| 11) $\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) - \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 1$ | 12) $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ |
| 13) $\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2$ | 14) $\sin 4x + \cos 4x = -1$ |
| 15) $\sqrt{3} \cos 7x + \sin 7x = \sqrt{2}$ | 16) $\sin 2x - \cos 2x = 1$ |
| 17) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$ | 18) $\sqrt{5} \sin x + 2\cos x = 4$ |
| 19) $\sqrt{3} \cos 3x - 3\sin 3x - \sqrt{6} = 0$ | 20) $\sin x = \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3} \cos x)$ |

Bài 3 : Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|---|
| 1) $3\sin^2 x + \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$ | 2) $2\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$ |
| 3) $4\cos^2 x + 3\sin x \cos x - \sin^2 x = 3$ | 4) $2\sin^2 x + 2\sin 2x - 4\cos^2 x = 1$ |
| 5) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 3$ | 6) $\sqrt{3} \cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x - 1 = 0$ |
| 7) $4\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 3\sin^2 x = 1$ | 8) $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2$ |

$$9) 6\sin^2 x - \cos^2 x = 3 + \sin x \cos x$$

$$10) 4\cos^2 x + \sin x \cos x + 3\sin^2 x - 3 = 0$$

$$11) \cos^2 x + \sin 2x + 5\sin^2 x = 2$$

$$12) \sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$13) \sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 1 - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$$

$$14) 3\cos^2 x - \sin 2x + \sin^2 x = 3$$

Chương II: TỔ HỢP & XÁC SUẤT

1/ Quy tắc cộng: (SGK)

2/ Quy tắc nhân: (SGK)

3/ Hoán vị: (SGK) $P_n = n! = 1.2....(n-1)n$

4/ Chỉnh hợp: (SGK) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 1 \leq k \leq n$

Chú ý: chỉnh hợp mang tính thứ tự và đặc biệt $A_n^n = P_n$

5/ Tổ hợp: (SGK) $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}; 1 \leq k \leq n$.(Tổ hợp không mang tính thứ tự)

Những kết quả cần chú ý:

$$1/ C_n^0 = C_n^n = 1; C_n^1 = n \quad 2/ C_n^k = C_n^{n-k} \quad 3/ C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$$

$$6/ \text{ Nhị thức Newton: } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

*Chú ý :- Trong khai triển có $(n+1)$ số hạng

- Số hạng tổng quát thứ $(k+1)$ trong khai triển là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

7/ Xác suất của biến cố A trong không gian mẫu là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

(Là thương giữa số phần tử của biến cố A và số phần tử KGM)

BÀI TẬP

Bài 1 : (Quy tắc cộng và quy tắc nhân)

- 1) Có 10 cái áo khác nhau và 12 cái quần khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một bộ quần áo
- 2) Lớp học có 12 học sinh nam, 18 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn:
 - a) 1 học sinh đi thi học sinh thanh lịch
 - b) Chọn một ban cán sự gồm: lớp trưởng, lớp phó và thủ quỹ
 - c) Chọn một ban cán sự gồm: lớp trưởng, lớp phó và thủ quỹ với điều kiện thủ quỹ là nữ
 - d) Chọn một ban cán sự gồm: lớp trưởng, lớp phó và thủ quỹ với điều kiện lớp trưởng là nam
- 3) Có bao nhiêu số nguyên dương gồm 3 chữ số trong mỗi trường hợp sau:
 - a) Bất kì
 - b) Chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị giống nhau
 - c) Chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị giống nhau và 2 chữ số này khác chữ số hàng trăm
- 4) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Có thể lập được bao nhiêu số nguyên dương trong mỗi trường hợp sau:
 - a) Gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và bắt đầu bằng 56 hoặc 65
 - b) Gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và tận cùng bằng một chữ số khác 3
- 5) Có bao nhiêu số nguyên dương gồm 5 chữ số trong mỗi trường hợp sau đây:
 - a) Không chia hết cho 10
 - b) Là số lẻ

- 6) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 2 ?
 7) Cho $A=\{0,1,3,4,6,7\}$, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và là số chẵn ?
 8) Từ các số tự nhiên 0,1,2,3,4,5,6,7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?
 9) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5 ?
 10) Từ các số 0,2,3,4,5,7,8,9, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau và chia hết cho 2 ?

Bài 2 : (Hoán vị - Tổ hợp – Chinh hợp)

- 1) Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên trong mỗi trường hợp sau;
 a) có 5 chữ số đôi một khác nhau
 b) số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau
 c) số lẻ có 5 chữ số đôi một khác nhau
 ĐS: a) 120 ; b) 48 ; c) 72
- 2) Một lớp học có 10 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Cần chọn ra 5 người trong lớp để đi làm công tác phong trào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 5 người đó phải có ít nhất :
 a) 02 học sinh nam và 02 học sinh nữ.
 b) 01 học sinh nam và 01 học sinh nữ.
- 3) Cần phân công ba bạn từ một tổ có 5 nam, 5 nữ làm trực nhật . Hỏi có bao nhiêu cách phân công sao cho:
 a) Toàn nam b) Toàn nữ c) Có cả nam lẫn nữ
- 4) Trong mặt phẳng cho 8 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hãy xác định:
 a) Số đoạn thẳng lập từ 8 điểm đó
 b) Số vector lập từ 8 điểm đó
 c) Số tam giác lập từ 8 điểm đó
 d) Giả sử 8 điểm đó lập thành 1 đa giác đều, tính số đường chéo của đa giác đó.

Bài 3: Khai triển nhị thức

$$\begin{array}{llll} a)(x+3)^5 & b)(2x-5)^6 & c)\left(x-\frac{2}{x}\right)^5 & d)(2a-3b)^5 \\ e)\left(\frac{1}{2}x-y\right)^4 & f)\left(\frac{2}{3}+3y\right)^5 & g)\left(\frac{3}{5}-x^2\right)^5 & h)\left(2x-\frac{1}{3}\right)^5 \\ i)\left(\frac{2}{3}-x\right)^5 & j)\left(\frac{3}{4}-2x\right)^5 & k)\left(2a^2-\frac{1}{3}\right)^5 & l)\left(\frac{2}{5}-3x^2\right)^5 \end{array}$$

Bài 4: Tìm hệ số của một số hạng thỏa đề bài:

- 1) Tìm hệ số của x^6 trong các khai triển : a) $\left(6+\frac{3}{2}x\right)^{18}$ b) $(4x+1)^{2010}$
- 2) Tìm hệ số của x^8 trong các khai triển : a) $\left(\frac{2}{3}-10x\right)^{20}$ b) $(3x-6)^{20}$ c) $\left(3x^3-\frac{5}{2x}\right)^8$
- 3) Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong các khai triển:
 a) $\left(3x-\frac{2}{x}\right)^{14}$ b) $\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)^{21}$ c) $\left(3x-\frac{6}{x^3}\right)^{20}$ d) $\left(4x^3-\frac{2}{3x}\right)^{12}$
- 4) Tìm số hạng thứ 15 trong khai triển : $\left(3x^3-\frac{2}{x}\right)^9$

- 5) Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển : $\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{3x^2}\right)^{10}$
- 6) Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển : $\left(3x^3 - \frac{2}{5x}\right)^9$
- 7) Tìm số hạng chứa x^6 trong khai triển : $\left(\frac{2}{7x} - 5x^3\right)^{10}$
- 8) Tìm hệ số của x^5 trong khai triển : $\left(2x^2 - \frac{7}{2x}\right)^{13}$
- 9) Tìm hệ số của x^{24} trong khai triển : $\left(\frac{3}{2x^3} - 5x^6\right)^{10}$
- 10) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển : $\left(4x - \frac{2}{3x^2}\right)^{12}$

Bài 5: Giải phương trình có liên quan đến P_n , A_n^k , C_n^k

Giải phương trình với ẩn số x (hoặc n):

- | | | |
|----------------------------------|---|--|
| 1) $C_n^3 = 5C_n^1$ | 2) $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$ | 3*) $23A_x^4 = 24(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4})$ |
| 4) $A_x^3 + 2C_x^{x-2} = 9x$ | 5) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$ | 6) $A_x^3 + 5A_x^2 = 21x$ |
| 7) $C_{n-1}^1 + A_n^2 = 15(n-1)$ | 8) $A_{n-1}^2 - C_n^1 = 79$ | 9) $A_x^3 = 30x$ |
| 10) $2A_n^2 - C_n^{n-1} = 23n$ | 11) $\frac{C_{x+1}^2}{C_x^3} = \frac{4}{5}$ | 12) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$ |
| 13) $A_n^2 - 3C_n^2 + 4n = 0$ | 14) $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$ | 15) $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$ |
| 16) $A_{x+3}^2 = C_{x+2}^3 + 20$ | 17) $3C_{x+1}^2 - 2A_x^2 = x$ | 18*) $C_x^3 + C_x^4 = 11C_{x+1}^2$ |

Bài 6: (Tính xác suất của biến cố).

- 1) Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất
 - a) Để ít nhất 1 lần xuất hiện mặt chẵn.
 - b) Để ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 3 chấm
- 2) Gieo đồng thời hai con xúc sắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất
 - a) Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc sắc là 7
 - b) ít nhất một con là sô chẵn
- 3) Một hộp đựng 12 bóng đèn trong đó có 8 bóng tốt . Lấy ngẫu nhiên 3 bóng . Tính xác suất để lấy được :
 - a) Một bóng hỏng
 - b) Ít nhất một bóng hỏng
- 4) Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lí chọn ngẫu nhiên 6 người. Tính xác suất để :
 - a) Cả 6 người đều là nam.
 - b) Có 4 nam và 2 nữ.
 - c) Có ít nhất hai nữ.
- 5) Trên giá sách có 10 quyển Toán, 5 quyển Lý, 5 quyển Hóa, các quyển sách này đều khác nhau. Bạn Lan chọn ngẫu nhiên 3 trong số các quyển đó.
 - a) Tính số phần tử của không gian mẫu
 - b) Tính xác suất sao cho:

- b1) Ba quyền ở 3 môn khác nhau
 - b2) Ba quyền ở cùng một môn
 - b3) Không có quyền Toán nào
 - b4) Ba quyền có ít nhất một quyền Toán
- 6) Lấy ngẫu nhiên một thẻ từ một hộp chứa 20 thẻ đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để hai thẻ lấy ra thỏa: a) đều chẵn b) đều lẻ c) có chẵn, có lẻ
- 7) Có 11 nam và 10 nữ, chọn ngẫu nhiên 8 người, tính các xác suất sao cho:
a) Tất cả là nam b) Có ít nhất 1 nam
c) Tất cả là nữ d) Có ít nhất 1 nữ
- 8) Một lớp có 45 học sinh gồm 30 nam và 15 nữ. Giáo viên chọn 4 học sinh đi lao động. Tính xác suất để trong 4 học sinh được chọn có ít nhất 1 học sinh nam.
- 9) Một hộp có chứa 5 viên bi trắng và 8 bi vàng. Tính xác suất để khi chọn 4 bi ta chỉ chọn được 1 loại màu.
- 10) Một tổ có 7 nam và 8 nữ, chọn ngẫu nhiên 4 bạn làm vệ sinh lớp. Tính xác suất để trong 4 bạn được chọn có cả nam lẫn nữ và không quá 2 nữ.
- 11) Một hộp chứa 5 quả cầu trắng, 8 quả cầu xanh, 4 quả cầu vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để 4 quả lấy được có đủ 3 màu.
- 12) Một hộp có chứa 10 viết xanh, 8 viết đỏ, 6 viết đen. Lấy ngẫu nhiên 4 cây viết. Tính xác suất để 4 cây viết được lấy có đủ 3 màu và có 1 viết đen.

B -PHẦN HÌNH HỌC

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

1) Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng:

- **Dạng 1:** Tìm 2 điểm chung của 2 mặt phẳng $\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = AB$

- **Dạng 2:** 2 mặt phẳng lần lượt chứa 2 đường thẳng song song nhau thì ta tìm 1 điểm chung của 2 mp đó. Giao tuyến cần tìm là đường thẳng đi qua điểm chung và song song với 2 đường thẳng ấy.

$$\begin{cases} S \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Sx // a // b \\ a // b \end{cases}$$

2) Tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P):

$$C.1: \begin{cases} a \cap b = I \\ b \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \cap (\alpha) = I$$

$$C.2: \begin{cases} a \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = b \Rightarrow a \cap (\alpha) = I; (\beta) \text{ là mp tùy chọn chứa } a \\ a \cap b = I \end{cases}$$

3) CM đường thẳng a song song mặt phẳng (P) :

$$C1: \begin{cases} a // b \\ b \subset (\alpha) \Rightarrow a // (\alpha) \text{ hoặc } \begin{cases} A \in a, A \notin (\alpha) \\ b \subset (\alpha), a // b \end{cases} \Rightarrow a // (\alpha) \\ a \not\subset (\alpha) \end{cases}$$

C2: - Xét mp(β) chứa a.

- Tìm giao tuyến của (α) và (β); (α) $\cap$ (β) = b
- Chứng minh a//b $\Rightarrow$ a//(α)

4) CM hai mặt phẳng song song nhau: Chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng này lần lượt song song với 2 đường thẳng cắt nhau trong mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha), a \cap b = M \\ c, d \subset (\beta), c \cap d = N \Rightarrow (\alpha) // (\beta) \\ a // c, b // d \end{cases}$$

BÀI TẬP

Bài 1 : Giao tuyến của hai mặt phẳng (Dạng 1) :

- 1) Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là tứ giác (có các cạnh đối không song song). Lấy điểm M trên đoạn SD. Tìm giao tuyến của:
 - a) (SAD) và (SBC); (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD)
 - b) (MBC) với lần lượt các mp (SAD); (SCD); (SBD); (SAC)
- 2) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là thang (AB là đáy lớn, CD là đáy bé). Gọi M là trung điểm của cạnh SA. Tìm giao tuyến của:
 - a) (SAC) và (SBD); (SAD) và (SBC) ?
 - b) (MBC) và (SAD); (MBD) và (SAC) ?
- 3) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M là trung điểm SD. Tìm giao tuyến của :
 - a) (SAB) và (SCD) b) (AMC) và (SBD).

4) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang (AD là đáy lớn) . Gọi M là trung điểm AB, K là điểm tùy ý trên SB. Tìm giao tuyến của :

- a) (SAB) và (SCD) b) (SMC) và (SAD) c) (KAC) và (SBD)

5*) Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là tứ giác (có các cạnh đối không song song). Lấy I thuộc SA, J thuộc SB sao cho IJ không song song AB. Lấy điểm K trong tứ giác ABCD. Tìm giao tuyến của (IJK) với các mp sau: (ABCD); (SBC); (SAD); (SCD)

Bài 2 : Giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng (kết hợp bài toán giao tuyến _ dạng 1)

- Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M là trung điểm SD, N là điểm trên SB sao cho $SN=2NB$. Tìm giao điểm của MN với mp (ABCD) .
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác có các cạnh đối không song song. Lấy E, F trên SA, SC sao cho EF không song song với AC. Tìm giao điểm EF và mp(SBD).
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AB là đáy lớn) . Gọi H là trung điểm DC, K là điểm tùy ý trên SC.
 - Tìm giao tuyến của hai mp(SAC) và (SBD).
 - Gọi I là điểm bất kì trên AB. Tìm giao điểm của SA và (KIH).
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song. Gọi E, F lần lượt là trung điểm SD, SC.
 - Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD); (AEC) và (SBD)
 - Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tìm giao tuyến của SG và mp(AFB)
- Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SB. Lấy điểm M tùy ý trên SD.
 - Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC); (SAC) và (SBD)
 - Tìm giao điểm của IM với (SBC); JM với (SAC).

Bài 3 : Giao tuyến của hai mặt phẳng (Dạng 2)

- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AD là đáy lớn) . Tìm giao tuyến của hai mp(SAD) và (SCB)
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, SC, SD. Tìm giao tuyến của các mp :
 - (SAB) và (SCD) b) (SAD) và (SBC) c) (MNP) và (SAB).
- Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tìm giao tuyến của các mp :
 - (SAB) và (SCD) b) (CMN) và (ABCD).

Bài 4 : Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng :

- Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB lấy 2 điểm M, N sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$. CMR:
 - $AD \parallel (SBC)$; $DC \parallel (SAB)$ b) $MN \parallel ABCD$; $AB \parallel (MNCD)$ c) $MN \parallel (SCD)$
- Cho hình chóp SABCD có đáy là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD. Điểm E trên cạnh DC sao cho $DE = \frac{1}{3}DC$; I là trung điểm AD. CMR: $GE \parallel (SBC)$
- Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.
 - CMR: $MN \parallel (SBC)$, $MN \parallel (SAD)$
 - Gọi P là trung điểm SA. CMR: $SB \parallel (MNP)$, $SC \parallel (MNP)$
 - Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, I thuộc cạnh BD sao cho $BI = \frac{1}{3}BD$. CMR: $GI \parallel (SAB)$.

- ## **Bài 6 : Tổng hợp**

- 12