

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT ĐÀO SƠN TÂY



TÀI LIỆU HỌC TẬP MÔN TOÁN 12
NĂM HỌC 2024 – 2025 (HỌC KÌ II)

Họ và tên:

Lớp:

Tài liệu lưu hành nội bộ

Mục lục

Chương 4.	NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN	1
Bài 1.	NGUYÊN HÀM	1
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
	1. Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	2
	2. Nguyên hàm của hàm số lượng giác	9
	3. Nguyên hàm của hàm số mũ	12
	4. Bài toán thực tế có sử dụng nguyên hàm	15
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	19
Bài 2.	ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN	25
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	25
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	26
	1. Tích phân của một số hàm cơ bản. Tính chất của tích phân	26
	2. Tích phân của hàm số cho bởi nhiều công thức	32
	3. Bài toán thực tế có sử dụng tích phân	35
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	39
Bài 3.	ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN	47
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	47
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	48
	1. Diện tích phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$)	48
	2. Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ và $x = b$, ($a < b$) quay quanh trục Ox	54
	3. Tính thể tích vật thể khi biết hàm diện tích mặt cắt vuông góc với Ox	58
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN	61
Chương 5.	PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	70
Bài 1.	PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	70
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	70
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	72

1. Xác định véc tơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng.....	72
2. Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan.....	74
3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng.....	78
4. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song.....	81
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.....	84
Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	87
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	87
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	88
1. Xác định điểm thuộc và véc tơ chỉ phương của đường thẳng.....	88
2. Viết phương trình đường thẳng d khi biết vài yếu tố liên quan.....	90
3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng.....	94
4. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.....	97
5. Hình chiếu, đối xứng.....	100
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.....	102
Bài 3. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN	107
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	107
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	108
1. Tính góc trong không gian Oxyz.....	108
2. Tọa độ hóa một số bài toán hình không gian.....	111
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.....	115
Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	118
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	118
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	118
1. Xác định tâm I , bán kính r của mặt cầu cho trước.....	118
2. Lập phương trình mặt cầu và ứng dụng thực tiễn.....	120
3. Vị trí tương đối của điểm, của mặt phẳng với mặt cầu.....	124
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.....	127
Chương 6. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN	130
Bài 1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN	130
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	130
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	131

1. Ôn tập công thức tính xác suất cổ điển. Các quy tắc tính xác suất.....	131
2. Tính xác suất có điều kiện.....	136
3. Tính xác suất có điều kiện sử dụng sơ đồ hình cây.....	140
4. Công thức nhân xác suất.....	143
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.....	144
Bài 2. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN – CÔNG THỨC BAYES	148
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	148
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	148
1. Công thức xác suất toàn phần.....	148
2. Công thức Bayes.....	154
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN.....	159

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

§1. NGUYÊN HÀM



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên K (K là một khoảng, một đoạn hay một nửa khoảng). Hàm số F được gọi là một nguyên hàm của f trên K nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in K.$$

! Ví dụ:

- $F(x) = \frac{x^3}{3}$ là một nguyên hàm của $f(x) = x^2$ vì $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $F(x) = \sin x$ là một nguyên hàm của $f(x) = \cos x$ vì $(\sin x)' = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $F(x) = e^x$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x$ vì $(e^x)' = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

CHÚ Ý

- ① Họ các nguyên hàm của f trên K , kí hiệu $\int f(x) dx$. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì mọi nguyên hàm của f đều có dạng $F(x) + C$, với $C \in \mathbb{R}$. Vậy $\int f(x) dx = F(x) + C$.
- ② Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$.

2 Các tính chất

- ① $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$
- ② $\int f'(x) dx = f(x) + C.$
- ③ $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$, với $k \neq 0$.
- ④ $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

3 Bảng công thức nguyên hàm của các hàm thường gặp

Đạo hàm	Nguyên hàm	Nguyên hàm mở rộng (đọc thêm)
$(x)' = 1$	① $\int 1 dx = x + C$	
$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha}$	② $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^{\alpha} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	③ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	④ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$
$(e^x)' = e^x$	⑤ $\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	⑥ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$
$(\sin x)' = \cos x$	⑦ $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax+b) + C$
$(\cos x)' = -\sin x$	⑧ $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	⑨ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	⑩ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

⚙ Các công thức thường dùng:

$$\begin{aligned} \text{① } \int 1 dx &= x + C & \text{② Với } \alpha \neq -1: \int x^{\alpha} dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C. \\ \text{③ Với } \alpha = -1: \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C. & \text{④ } \int \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

⚙ Chú ý các công thức biến đổi lũy thừa:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{x^n} &= x^{-n}. & \bullet x^m \cdot x^n &= x^{m+n}. \\ \bullet \frac{x^m}{x^n} &= x^{m-n}. & \bullet \sqrt{x} &= x^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ Bài 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^2. & \text{b) } f(x) &= x^4 + x^{-3}. & \text{c) } f(x) &= x^2 + \frac{3}{x}. \\ \text{d) } f(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}. & \text{e) } f(x) &= x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}. & \text{f) } f(x) &= 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

≡ Bài 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

a) $f(x) = 2x(1 + 3x^3).$

b) $f(x) = (3x - 2)^2.$

c) $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}.$

≡ Bài 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

a) $f(x) = \frac{1}{2x - 1}.$

b) $f(x) = \frac{2}{4x - 3}.$

c) $f(x) = \frac{6x + 2}{3x - 1}.$

Bài 4. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1+2x^2}{x}$ thỏa mãn $F(-1) = 3$. Tìm $F(x)$.

Bài 5. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ và $F(0) = 2$. Tính $F(e)$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính $F(-1) + 2F(2)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Tính $F'(25)$.

- A. 25. B. 125. C. 5. D. 625.

.....

.....

.....

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\sqrt{5}}$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{5}-1}x^{\sqrt{5}-1} + C.$ B. $\int f(x)dx = x^{\sqrt{5}+1} + C.$
 C. $\int f(x)dx = \sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1} + C.$ D. $\int f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{5}+1}x^{\sqrt{5}+1} + C.$

.....

.....

.....

Câu 3. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- A. $2x^2 + 4x + C.$ B. $x^2 + 4x + C.$ C. $x^2 + C.$ D. $2x^2 + C.$

.....

.....

.....

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x^3 - 2024$ là

- A. $x^4 - 2024x + C.$ B. $4x^3 - 2024x + C.$ C. $12x^3 + C.$ D. $x^4 + C.$

.....

.....

.....

Câu 5. Biết $F(x) = x^3 + \frac{1}{x} + 1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x.$ B. $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}.$
 C. $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2}.$ D. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x + x + C.$

.....

.....

.....

Câu 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. B. $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$. C. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$. D. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Câu 7. Biết $\int \left(\frac{1}{2x} + x^5 \right) dx = a \ln|x| + bx^6 + C$ với $(a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R})$. Tính $a^2 + b$?

- A. $\frac{5}{12}$. B. 9. C. $\frac{7}{13}$. D. $\frac{7}{6}$.

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$ là

- A. $2x+3+C$. B. $\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$. C. $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$. D. $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Câu 9. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5+2x^4}{x^2}$.

- A. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{5}{x} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5}{x} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + 5 \ln x^2 + C$. D. $\int f(x) dx = 2x^3 - \frac{5}{x} + C$.

Câu 10. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$ thỏa mãn $F(1) = 0$.

A. $F(x) = x^2 + 3\sqrt{x^3}$.

B. $F(x) = x^2 + 2\sqrt[3]{x^2}$.

C. $F(x) = x^2 + 3\sqrt[3]{x^2} - 4$.

D. $F(x) = x^2 + 2\sqrt{x^3} - 3$.

Câu 11. Tìm hàm số $y = f(x)$, biết $f'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$, ($x > 0$) và $f(1) = 1$.

A. $f(x) = 2x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4$.

B. $f(x) = 2x\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2$.

C. $f(x) = \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 3$.

D. $f(x) = x\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 3$.

Câu 12. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 3)^2$ thỏa $F(0) = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_2[3F(1) - 2F(2)]$.

A. $T = 10$.

B. $T = 4$.

C. $T = 2$.

D. $T = -4$.

Câu 13. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1) = 1$, khi đó $F(2)$ bằng

A. $2\ln 3 + 2$.

B. $4\ln 2 + 1$.

C. $\ln 8 + 1$.

D. $2\ln 4$.

Câu 14. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-3}$; biết $F(2) = 1$. Giá trị $F(3)$ bằng

A. $F(3) = 2\ln 3 + 1$.

B. $F(3) = \frac{1}{2}\ln 3 + 1$.

C. $F(3) = \ln 3 + 1$.

D. $F(3) = \frac{1}{2}\ln 3 - 1$.

Câu 15. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ có dạng $F(x) = ax^4 + bx^2$. Tính $T = 4a + b$.

A. $T = 0$.

B. $T = 1$.

C. $T = 2$.

D. $T = 3$.

Câu 16. Với giá trị thực nào của tham số m để hàm số $F(x) = mx^3 + (3m+2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$?

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 2$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 23.

B. 11.

C. 10.

D. 21.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27.

B. 29.

C. 12.

D. 33.

DT

2

Nguyên hàm của hàm số lượng giác

⚙ Công thức thường dùng:

① $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

② $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

③ $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$

④ $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$

⚙ Các phép biến đổi lượng giác thường dùng:

• $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

• $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$

• $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$

• $\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$

• $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$

• $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

• $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$

• $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ **Bài 1.** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

a) $f(x) = 4x + 3 \cos x.$

b) $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}.$

c) $f(x) = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2.$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Tìm hàm $f(x)$.

Bài 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

a) $f(x) = \sin 3x$.

b) $f(x) = \cos(2x + 3)$.

c) $f(x) = \cos 5x \cdot \cos x$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào đây **sai**?

A. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

B. $\int \cos x \, dx = -\sin x + C$.

C. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

D. $\int \cos x \, dx = -\tan x + C$.

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 - \cos x + C$.

B. $6x - \cos x + C$.

C. $x^3 + C$.

D. $x^3 + \sin x + C$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \cos x$ và $f(0) = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 3x - 5 \sin x - 5$.

B. $f(x) = 3x + 5 \sin x + 5$.

C. $f(x) = 3x + 5 \sin x + 2$.

D. $f(x) = 3x - 5 \sin x + 5$.

Câu 4. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 2\cos x$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ là

A. $F(x) = -2\sin x - \cos x + 2.$

B. $F(x) = 2\sin x - \cos x + 2.$

C. $F(x) = \sin x - 2\cos x - 2.$

D. $F(x) = 2\sin x - \cos x - 2.$

Câu 5. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $-\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1.$

B. $-\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$

C. $\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$

D. $-\cos x + \tan x + C.$

Câu 6. Tìm $\int \sin 5x dx.$

A. $\int \sin 5x dx = -5 \cos 5x + C.$

B. $\int \sin 5x dx = -\cos 5x + C.$

C. $\int \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$

D. $\int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \cos 5x + C.$

Câu 7. Với C là hằng số, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\cos 2x$ là

A. $\sin 2x + C.$

B. $2\sin 2x + C.$

C. $-2\sin 2x + C.$

D. $-\sin 2x + C.$

Câu 8. Tìm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

A. $\cos x + \sin x + C.$

B. $-\cos x - \sin x + C.$

C. $-\cot x - \tan x + C.$

D. $\cot x - \tan x + C.$

Câu 9. Nguyên hàm của hàm số $y = \tan^2 x$ là

- A. $\tan x - x + C$.
 B. $-\tan x - x + C$.
 C. $-\tan x + x + C$.
 D. $\tan x + x + C$.

Câu 10. Biết $\int (2 \sin x + \cos x)^2 dx = a \sin 2x - \cos 2x + bx + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. $\frac{17}{2}$.
 B. $\frac{109}{4}$.
 C. $\frac{17}{16}$.
 D. $\frac{109}{16}$.

DT

3

Nguyên hàm của hàm số mũ

⚙️ Công thức thường dùng:

① $\int e^x dx = e^x + C$.

② $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

⚙️ Một số phép biến đổi thường gặp:

• $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

• $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

• $(a^x)^y = a^{xy}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$, biết

a) $f(x) = 2024^x$.

b) $f(x) = 5^x + 1$.

c) $f(x) = e^{-x}$.

d) $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = 8^x \cdot 2^{1-2x}$.

f) $f(x) = \left(3^x - \frac{1}{3^x}\right)^2$.

Bài 2. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

A. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

C. $\int 2^x dx = 2^x + C.$

B. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C.$

D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C.$

Câu 2. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C.$

B. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$

C. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C.$

D. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 3. Gọi $\int 2018^x dx = F(x) + C$, với C là hằng số. Khi đó hàm số $F(x)$ bằng

A. $\frac{2018^{x+1}}{x+1}.$

B. $\frac{2018^x}{\ln 2018}.$

C. $\frac{x \cdot 2018^{x-1}}{\ln 2018}.$

D. $2018^x \ln 2018.$

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = e^x + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = e^x + 3x + C.$

B. $\int f(x) dx = e^x + C.$

C. $\int f(x) dx = e^{x-3} + C.$

D. $\int f(x) dx = e^x - 3x + C.$

Câu 5. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$.

A. $\int e^{2x} dx = e^{2x} + C.$

B. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x+1}}{2x+1} + C.$

C. $\int e^{2x} dx = 2e^{2x} + C.$

D. $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Câu 6. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{e^{3x}}{3x+1} + C.$

B. $\int f(x) dx = e^{3x} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$

D. $\int f(x) dx = 3e^{3x} + C.$

Câu 7. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = (e^x - 1)^2$.

A. $F(x) = 2e^{2x} - 2e^x + C.$

B. $F(x) = 2e^x(e^x - 1).$

C. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x + C.$

D. $F(x) = e^{2x} - 2e^x + x + C.$

Câu 8. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2e^x - 3x^2$ thỏa $F(0) = \frac{9}{2}$ là

- A. $e^x - x^3 + \frac{7}{2}$. B. $2e^x + x^3 - \frac{3}{2}$. C. $2e^x - x^3 + \frac{5}{2}$. D. $2e^x - x^3 + \frac{9}{2}$.

Câu 9. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2e^x + 1$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Khi đó, khẳng định đúng là

- A. $F(x) = 2e^x + x - 1$. B. $F(x) = 2e^x + x + 2$. C. $F(x) = e^{2x} + x$. D. $F(x) = 2e^x + x + 1$.

Câu 10. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4e^{2x} + 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.

- A. $F(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1$. B. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 - 1$.
C. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 + 1$. D. $F(x) = 4e^{2x} + x^2 - 3$.

DT

4

Bài toán thực tế có sử dụng nguyên hàm

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Người ta truyền nhiệt cho một bình nuôi cấy vi sinh vật từ 1°C . Tốc độ tăng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút ($0 \leq t \leq 5$) được cho bởi hàm số $f(t) = 3t^2$ ($^\circ\text{C}/\text{phút}$). Biết rằng nhiệt độ của bình đó tại thời điểm t là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$, tìm nhiệt độ của bình tại thời điểm 3 phút kể từ khi truyền nhiệt.

Bài 2. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 3t + 2$, thời gian tính bằng giây, quãng đường tính bằng mét. Biết tại thời điểm $t = 2$ s thì vật đi được quãng đường 10 m. Tính từ lúc xuất phát đến thời điểm $t = 30$ s thì vật đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?

Bài 3. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là 90 m^3 , sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là 504 m^3 . Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tốc độ tăng trưởng của một đàn gấu mèo tại thời điểm t tháng kể từ khi người ta thả 100 cá thể đầu tiên vào một khu rừng được ước lượng bởi công thức $P'(t) = 8t + 30$ (con/tháng), với $P(t)$ là số lượng cá thể trong đàn tại thời điểm t tháng tương ứng. Dựa vào tốc độ tăng trưởng đã cho, hãy ước tính số cá thể của đàn gấu mèo này tại thời điểm 3 tháng kể từ khi chúng được thả vào rừng.

- A. 226 con . B. 352 con. C. 301 con. D. 205 con.

Câu 2. Cường độ dòng điện (đơn vị: A) trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là

$$I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$$

Với $Q(t)$ là điện lượng (đơn vị: C) truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

- A. 18 C. B. 20 C. C. 15 C. D. 16 C.

Câu 3. Một chất điểm thực hiện chuyển động thẳng trên trục Ox , với vận tốc cho bởi công thức $v(t) = 3t^2 + 4t$ m/s với t là thời gian. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu của chuyển động, chất điểm đang ở vị trí có tọa độ $x = 1$. Tọa độ của chất điểm sau 1 giây chuyển động là

- A. $x = 5$. B. $x = 9$. C. $x = 6$. D. $x = 4$.

Câu 4. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t) = 2t - 7$ (m/s^2). Biết vận tốc đầu bằng 10 m/s, hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 m/s?

- A. 8 s. B. 5 s. C. 6 s. D. 7 s.

Câu 5. Một vật đang chuyển động với vận tốc 6 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = \frac{3}{t+1}$ m/s², trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. 13 m/s. B. 14 m/s. C. 12 m/s. D. 11 m/s.

Câu 6. Cho một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = -20\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ m/s². Biết vận tốc của vật vào thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s) là $15\sqrt{2}$ m/s. Tính vận tốc ban đầu của vật.

- A. $10\sqrt{2}$ m/s. B. $5\sqrt{2}$ m/s. C. 0 m/s. D. $\sqrt{2}$ m/s.

Câu 7. Một chiếc cốc chứa nước ở 95°C được đặt trong phòng có nhiệt độ 20°C. Theo định luật làm mát của Newton, nhiệt độ của nước trong cốc sau t phút (xem $t = 0$ là thời điểm nước ở 95°C) là một hàm số $T(t)$. Tốc độ giảm nhiệt độ của nước trong cốc tại thời điểm t phút được xác định bởi $T'(t) = -\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{50}}$ °C/phút). Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm $t = 30$ phút.

- A. 59,16 °C. B. 61,16 °C. C. 36,06 °C. D. 45,06 °C.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 16. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì

- A. $f'(x) = F(x)$. B. $F(x) = f(x)$. C. $F'(x) = f(x)$. D. $F'(x) = f'(x)$.

Câu 2. Cho biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm $I = \int [3f(x) + 1] dx$.

- A. $I = 3xF(x) + 1 + C$. B. $I = 3F(x) + x + C$.
C. $I = 3F(x) + 1 + C$. D. $I = 3xF(x) + x + C$.

Câu 3. Tìm họ nguyên hàm $\int 3^x dx$, ta được kết quả là

- A. $\frac{3^x}{\ln 3} + C$. B. $3^x \ln 3 + C$. C. $3^{x+1} + C$. D. $3^x + C$.

Câu 4. Tìm nguyên hàm của $\int 5x^6 dx$

- A. $\frac{5}{7}x^7 + C$. B. $\frac{6}{5}x^7 + C$. C. $x^7 + C$. D. $\frac{5}{6}x^7 + C$.

Câu 5. Hàm số $F(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

- A. $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x$. B. $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + 2\sqrt{x}$. C. $f(x) = x^4 + 2x^3$. D. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$.

Câu 6. Tìm hàm số $f(x)$. Biết rằng $f'(x) = 3x^2 + 2$ và $f(1) = 8$.

- A. $f(x) = x^3 + 2x + 5$. B. $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$.
C. $f(x) = x^3 + 2x - 5$. D. $f(x) = 3x^3 + 2x - 3$.

Câu 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

A. $\int f(x) dx = 3 + \cos x + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$

C. $\int f(x) dx = 3x^2 + \cos x + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 27 + \cos x$ và $f(0) = 2019$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = 27x + \sin x + 1991.$

B. $f(x) = 27x - \sin x + 2019.$

C. $f(x) = 27x + \sin x + 2019.$

D. $f(x) = 27x - \sin x - 2019.$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - e^x + 1 - m$. Biết $f(0) = 2, f(2) = 1 - e^2$. Giá trị của m thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(4; 6).$

B. $(5; +\infty).$

C. $(-2; 4).$

D. $(3; 5).$

Câu 10. (TN-2022). Cho $\int f(x) dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = -\sin x.$

B. $f(x) = \cos x.$

C. $f(x) = \sin x.$

D. $f(x) = -\cos x.$

Câu 11. Nếu $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + e^x + C$ thì $f(x)$ bằng

A. $f(x) = x^2 + e^x.$

B. $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x.$

C. $f(x) = 3x^2 + e^x.$

D. $f(x) = \frac{x^4}{3} + e^x.$

Câu 12. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x$ là

A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C.$

B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C.$

C. $84^x + C.$

D. $84^x \cdot \ln 84 + C.$

Câu 13. Hàm số nào trong các hàm số sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = e^{-2x}$?

A. $y = \frac{e^{-2x}}{2}$.

B. $y = 2e^{-2x} + C (C \in \mathbb{R})$.

C. $y = -\frac{e^{-2x}}{2}$.

D. $y = -2e^{-2x} + C (C \in \mathbb{R})$.

Câu 14. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $-\cos x + \tan x + C$.

B. $-\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1$.

C. $\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

D. $-\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1$.

Câu 15. Biết rằng hàm số $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 4x^3 - 18 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Giá trị của biểu thức $F(-1) - F(3)$ bằng

A. 18.

B. 8.

C. 32.

D. 7.

Câu 16. Cho hai vật A, B xuất phát cùng lúc tại cùng một vị trí với vận tốc tính theo thời gian t lần lượt là $v_1(t) = 4t^2 + t + 2$ và $v_2(t) = t^2 + 7t$. Hỏi sau khi xuất phát, có mấy lần mà quãng đường đi được của A, B là bằng nhau?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, và số $k \in \mathbb{R}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$ b) $\int f'(x) dx = f(x) + C.$
 c) $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$ d) $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

Câu 2. Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ xác định trên khoảng K , có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$ trên K . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tồn tại hằng số C để $F(x) = G(x) + C$, với mọi $x \in K$.
 b) $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $k.f(x)$ với $k \neq 0$.
 c) $F(x) + G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) + g(x)$.
 d) $F(x) \cdot G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) \cdot g(x)$.

Câu 3. Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét / tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng centimét) là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $h(t) = \frac{-t^4}{40} + \frac{t^3}{3}$, với $t \geq 0$.
 b) Chiều cao tối đa của cây cà chua đó là 88,4 cm (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
 c) Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài trong 9 tuần.
 d) Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao cây cà chua đạt 54,4 cm (kết quả được làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 4. Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t , trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $P(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = k\sqrt{t}$.
- b) $P(t) = \frac{2k}{3}\sqrt{t^3} + C$ với $0 \leq t \leq 10$ và k, C là hằng số.
- c) $P(t) = 100\sqrt{t^3} + 500$ với $0 \leq t \leq 10$.
- d) Số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 7 ngày là 3352 con.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 5 vào ô kết quả.

Câu 1. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tính $F(0)$.

KQ:

--	--	--	--

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 3$, $f'(1) = 0$. Tính $a + 2b$.

KQ:

--	--	--	--

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 15$), $B'(t)$ tính bằng khách/giờ. Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội. Hỏi sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?

KQ:

--	--	--	--

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc 19 m/s thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t) = 19 - 2t$ (m/s). Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 5 giây là bao nhiêu (tính bằng mét)?

KQ:

--	--	--	--

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 25 - 9,8t$ (m/s). Độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu? (kết quả tính bằng đơn vị mét và làm tròn đến hàng phần chục)

KQ:

--	--	--	--

.....

.....

.....

.....

.....

.....

—HẾT—



§2. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa:

⚙ Công thức tính:

Cho f là một hàm số liên tục trên $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$. Tích phân từ a đến b của $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$ và được tính theo công thức sau:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Chú ý

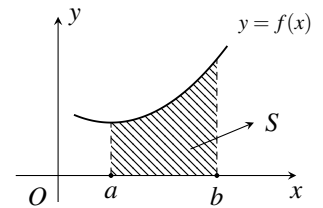
$$\textcircled{1} \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$\textcircled{2} - \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$$

$$\textcircled{3} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

⚙ Ý nghĩa hình học:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ là diện tích S của **hình thang cong** giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ (phần gạch sọc ở hình bên)

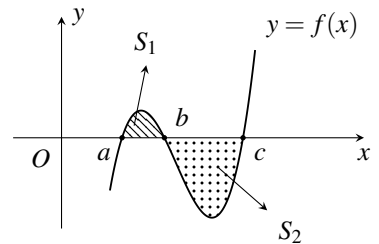


⚠ Một số lưu ý:

$$\textcircled{1} \text{ Nếu } f(x) \leq 0, \forall x \in [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx = -S$$

$\textcircled{2}$ Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a; c]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi S_1, S_2 lần lượt là phần diện tích giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$ với trục hoành (hình vẽ). Khi đó

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = S_1 - S_2$$



2 Tính chất:

Cho các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, $c \in [a; b]$. Ta có các tính chất sau:

$$\textcircled{1} \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ là hằng số}). \quad \textcircled{2} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$\textcircled{3} \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \quad \textcircled{4} \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx.$$



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tính phân của một số hàm cơ bản. Tính chất của tích phân

Các bước tính $\int_a^b f(x) dx$

① Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ (thường chọn $C = 0$)

② Ráp công thức $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính các tích phân sau:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x^7} dx.$

b) $\int_1^2 (x^3 - x) dx.$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x - \cos x) dx$

d) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$

e) $\int_0^1 e^{2x} dx.$

f) $\int_0^1 (2^{2x} \cdot 3^{x-1}) dx.$

Bài 2. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = 2^x$ và $F(0) = 0$. Tính $F(1)$.

Bài 3. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1, x = 4$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, $c \in (a; b)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_a^b k \, dx = k(a - b), \forall k \in \mathbb{R}.$

B. $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx.$

C. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt.$

D. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$

Câu 2. Tích phân $\int_{-2}^1 x^3 \, dx$ bằng

A. $-\frac{9}{4}.$

B. $\frac{17}{4}.$

C. 17.

D. $-\frac{15}{4}.$

Câu 3. Tích phân $\int_0^2 (x^2 - 3x) \, dx$ bằng

A. $\frac{10}{3}.$

B. $-\frac{10}{3}.$

C. $\frac{7}{3}.$

D. 12.

Câu 4. Tích phân $\int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

- A. $2^{2018} - 1$. B. $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$. C. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$. D. 2^{2018} .

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_1^{2018} 10^x dx$.

- A. $\frac{10^{2017} - 10}{\ln 10}$. B. $\frac{10^{2018} - 1}{\ln 10}$. C. $\frac{10^{2018} - 10}{\ln 10}$. D. $\frac{10^{2019} - 10}{\ln 10}$.

Câu 6. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$ bằng

- A. $\frac{2 + \sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{-2 + \sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{-2 - \sqrt{2}}{6}$. D. $\frac{2 - \sqrt{2}}{6}$.

Câu 7. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a + b\sqrt{3}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T = 2a + 6b$.

- A. $T = 2$. B. $T = -1$. C. $T = -4$. D. $T = 3$.

Câu 8. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \cos 2x$ và $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Giá trị $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$.

B. $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 9. (TN2020 -Mã đề 101). Biết $\int_1^3 f(x)dx = 3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)dx = 3$ bằng

A. 5.

B. 9.

C. 6.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Khi đó $I = \int_1^2 f'(x)dx$ bằng

A. $I = -1$.

B. $I = 1$.

C. $I = \frac{7}{2}$.

D. $I = 3$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $\int_1^4 f'(x)dx = 17$. Tính $f(4)$.

A. 29.

B. 9.

C. 26.

D. 5.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Tích phân $I = \int_0^1 [f'(x) - e^x] dx$ bằng

A. $1 - e$.

B. $1 + e$.

C. $3 - e$.

D. $3 + e$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$. Tính giá trị của biểu thức $f(2) - f(1)$.

- A. -3. B. 2. C. 3. D. -2.

Câu 14. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$, $\int_2^5 f(x) dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x) dx$ bằng

- A. -2. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 15. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_4^2 f(x) dx = 1$. Khi đó $\int_0^4 f(x) dx$ bằng

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 16. Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = -5$, khi đó $\int_0^2 [3f(x) + 4g(x)] dx$ bằng

- A. 29. B. -3. C. -11. D. 4.

Câu 17. Cho $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ và $\int_{-1}^1 g(x) dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_1^{-1} [2f(x) - 5g(x)] dx$.

- A. $I = -7$. B. $I = 7$. C. $I = -14$. D. $I = 14$.

Câu 18. Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$, $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Tính tích phân $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{11}{2}$.

D. $I = \frac{17}{2}$.

Câu 19. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 [3f(x) - g(x)] dx = 2$ thì $\int_1^2 g(x) dx$ bằng

A. 11.

B. 5.

C. 1.

D. 7.

Câu 20. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

A. $5 + \frac{\pi}{2}$.

B. 7.

C. 3.

D. $5 + \pi$.

Câu 21. Nếu $\int_{-2}^1 [2f(x) - 1] dx = 3$ thì $\int_{-2}^1 f(x) dx$ bằng

A. 5.

B. -9.

C. 3.

D. -3.

Câu 22. Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tính $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$.

A. 5.

B. 3.

C. $\frac{13}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Câu 23. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = 2 - x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 1$.

- A. $\frac{10}{3}$. B. $\frac{9}{5}$. C. $\frac{11}{3}$. D. $\frac{13}{5}$.

Câu 24. Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.

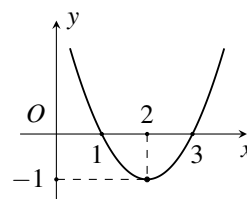
- A. $e + 1$. B. $e - 2$. C. $e - 1$. D. $e + 2$.

Câu 25.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là một parabol như hình bên. Tính

$$\int_0^3 (x-1)f(x) dx$$

- A. $\frac{9}{4}$. B. $-\frac{9}{4}$. C. $\frac{135}{4}$. D. $-\frac{135}{4}$.



DT

2

Tích phân của hàm số cho bởi nhiều công thức

Giả sử hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x < b \\ f_2(x) & \text{khi } x \geq b \end{cases}$$

Xét $a < b < c$. Khi đó

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_b^c f_2(x) dx.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính $\int_0^3 f(x) dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{nếu } x > 0 \\ \cos x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$. Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_0^2 f(x) dx$.

- A. $I = 4$. B. $I = \frac{5}{2}$. C. $I = 2$. D. $I = \frac{3}{2}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 2x & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{13}{3}$.

B. $\frac{10}{3}$.

C. $\frac{7}{3}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 4. Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - b$.

A. $S = 9$.

B. $S = 5$.

C. $S = -3$.

D. $S = 11$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 18.

B. 20.

C. 9.

D. 24.

a) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) \, dx.$$

b) Giá trị trung bình của hàm số liên tục $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

c) Ta đã biết rằng, đạo hàm của quãng đường di chuyển theo thời gian bằng tốc độ của chuyển động tại mỗi thời điểm ($v(t) = s'(t)$). Do đó, nếu biết tốc độ $v(t)$ tại mọi thời điểm $t \in [a; b]$ thì tính được quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b theo công thức

$$s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t) \, dt.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Giả sử nhiệt độ (tính bằng $^{\circ}\text{C}$) tại thời điểm t giờ trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa ở một địa phương vào một ngày nào đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$T(t) = 20 + 1,5(t - 6), 6 \leq t \leq 12.$$

Tìm nhiệt độ trung bình vào ngày đó trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng đến 12 giờ trưa.

Bài 2. Lợi nhuận biên của một sản phẩm được mô hình hoá bởi

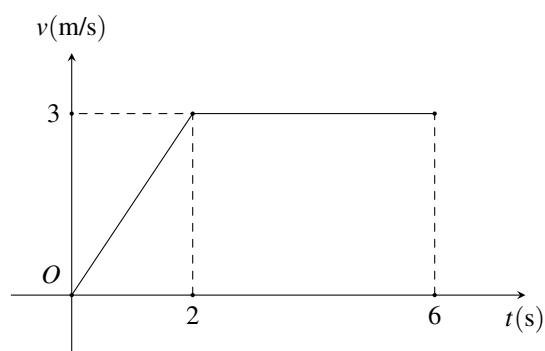
$$P'(x) = -0,0005x + 12,2$$

- Tìm sự thay đổi lợi nhuận khi doanh số bán hàng tăng từ 100 lên 101 đơn vị.
- Tìm sự thay đổi lợi nhuận khi doanh số bán hàng tăng từ 100 lên 110 đơn vị.

Bài 3.

Hình bên là đồ thị vận tốc $v(t)$ của một vật ($t = 0$ là thời điểm vật bắt đầu chuyển động).

- Viết công thức của hàm số $v(t)$ với $t \in [0; 6]$.
- Tính quãng đường vật di chuyển được trong 6 giây đầu tiên.



Bài 4. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15 m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15$ m/s, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Một vật chuyển động theo phương trình $v = 10t + 5$ m/s. Tính quãng đường vật đi được kể từ thời điểm $t = 0$ (giây) đến thời điểm $t = 3$ (giây).

- A. 60 m. B. 15 m. C. 30 m. D. 50 m.

Câu 2. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 - 2 \sin 2t$ (m/s). Gọi s là quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (giây). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $s = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t) dt.$

B. $s = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - 2 \sin 2t)^2 dt.$

C. $s = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} |1 - 2 \sin 2t| dt.$

D. $s = v\left(\frac{3\pi}{4}\right) - v(0).$

Câu 3. Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 180 - 20t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển từ thời điểm $t = 0$ đến lúc vật dừng lại.

- A. 180 m. B. 9 m. C. 160 m. D. 810 m.

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 (m/s) thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe 45 m (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Hỏi khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu mét?

- A. 3. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 5. Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -35$ (m/s²). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

- A. 96,5 mét. B. 105 mét. C. 87,5 mét. D. 102,5 mét.

Câu 6. Tốc độ v (m/s) của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức:

$$v(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 2, \\ 2, & 2 < t \leq 20, \\ 12 - 0,5t, & 20 < t \leq 24. \end{cases}$$

Tính quãng đường chuyển động và tốc độ trung bình của thang máy.

- A. 1,8 (m/s). B. 1,75 (m/s). C. 1,5 (m/s). D. 1,65 (m/s).

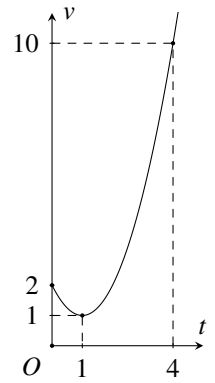
Câu 7. Khi nghiên cứu một quần thể vi khuẩn, người ta nhận thấy quần thể vi khuẩn đó ở ngày thứ t có số lượng $N(t)$ con. Biết rằng tốc độ phát triển của quần thể đó là $N'(t) = \frac{8000}{t}$ và sau ngày thứ nhất ($t = 1$) có 250000 con. Sau 6 ngày ($t = 6$), số lượng của quần thể vi khuẩn là

- A. 353584 con. B. 234167 con. C. 288959 con. D. 264334 con.

Câu 8.

Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1; 1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.

- A. $s = \frac{46}{3}(\text{km})$. B. $s = \frac{40}{3}(\text{km})$. C. $s = 8(\text{km})$. D. $s = 6(\text{km})$.

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 16. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tính tích phân $\int_1^2 (2x - 1) dx$

- A. $I = 3$. B. $I = \frac{5}{6}$. C. $I = 2$. D. $I = 1$.

Câu 2. Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^1 4f(x) dx$ bằng

- A. 4. B. 8. C. 2. D. 16.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 4$ và $f(-2) = 0$. Tính $I = \int_{-2}^2 f'(x) dx$.

- A. $I = 0$. B. $I = 3$. C. $I = -4$. D. $I = 4$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$, biết $\int_0^9 f(x) dx = 9$ và $F(0) = 3$. Tính $F(9)$.

- A. $F(9) = 12$. B. $F(9) = -6$. C. $F(9) = -12$. D. $F(9) = 6$.

Câu 5. Hàm số $f(x) = x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Giá trị của biểu thức $F(2) - F(0)$ bằng

- A. 1. B. 4. C. 8. D. 16.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a là số dương. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\int_a^a f(x) dx = 0$. B. $\int_a^a f(x) dx = a^2$. C. $\int_a^a f(x) dx = 1$. D. $\int_a^a f(x) dx = 2a$.

Câu 7. $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3}(e^4 - e)$. B. $e^3 - e$. C. $\frac{1}{3}(e^4 + e)$. D. $e^4 - e$.

Câu 8. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$ khi đó $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

- A. 1. B. -3. C. -8. D. 12.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_1^3 f(x)dx = 5$ và $\int_{-1}^3 f(x)dx = 1$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$.

- A. $I = -6$. B. $I = 6$. C. $I = -4$. D. $I = 4$.

Câu 10. Cho $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = -1$. Giá trị của $\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x]dx$ bằng

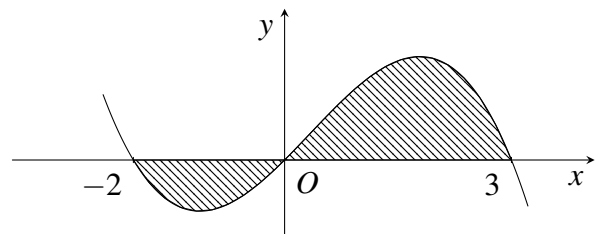
- A. 0. B. 12. C. 10. D. 8.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{khí } x \geq 1 \\ x^2+b & \text{khí } x < 1 \end{cases}$ với a, b là các tham số thực. Biết rằng $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$ bằng

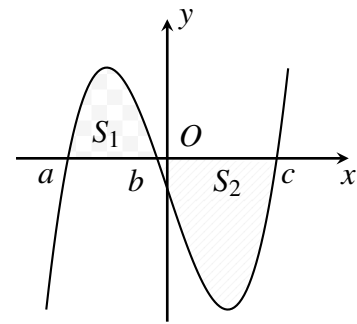
- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{19}{3}$. C. $\frac{26}{3}$. D. $\frac{25}{3}$.

Câu 12. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox nằm phía trên và phía dưới trục Ox lần lượt là 3 và 1. Khi đó $\int_{-2}^3 f(x)dx$ bằng

- A. 2. B. -2. C. 3. D. 4.



Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị (C) cắt trục Ox tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c ($a < b < c$). Biết phần hình phẳng nằm phía trên trục Ox giới hạn bởi đồ thị (C) và trục Ox có diện tích là $S_1 = \frac{7}{10}$, phần hình phẳng nằm phía dưới trục Ox giới hạn bởi đồ thị (C)



và trục Ox có diện tích là $S_2 = 2$ (như hình vẽ). Tính $I = \int_a^c f(x) dx$.

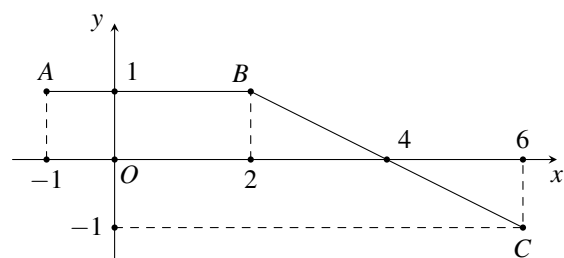
A. $I = -\frac{13}{10}$.

B. $I = \frac{13}{10}$.

C. $I = \frac{27}{10}$.

D. $I = -\frac{27}{10}$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 6]$ và có đồ thị là đường gấp khúc ABC trong hình bên. Biết F là nguyên hàm của f thỏa mãn $F(-1) = -1$. Giá trị của $F(4) + F(6)$ bằng



A. 10.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Câu 15. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$ m/s². Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là

A. $\frac{400}{3}$ m.

B. $\frac{4300}{3}$ m.

C. $\frac{430}{3}$ m.

D. $\frac{4000}{3}$ m.

Câu 16.

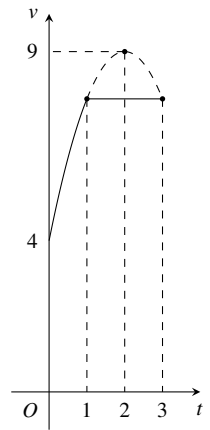
Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của Parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) là

A. $s = 15,50$ (km).

B. $s = 23,25$ (km).

C. $s = 13,83$ (km).

D. $s = 21,58$ (km).



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ có đạo hàm $f'(x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_{-1}^2 f'(x) dx = 3$. b) $\int_0^1 f(x) dx = 7$. c) $\int_0^2 3f(x) dx = 42$. d) $\int_0^1 xf(x) dx = \frac{31}{12}$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x \sin x$ có đạo hàm là $f'(x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2f'(x)dx = \pi.$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - \sin x] dx = \frac{\pi}{2}.$

c) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\sin x} dx = \frac{5\pi}{72}.$

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{[f(x)]^2} dx = 1.$

Câu 3.

Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$, trong đó t được tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 13$), $Q'(t)$ tính bằng khách/ giờ. Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2$.

b) Sau 5 giờ lượng khách tham quan là 1325 người.

c) Lượng khách tham quan lớn nhất là 1296 người.

d) Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 6$.

Câu 4. Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 2\cos t$ (m/s²). Tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 2 \sin t$ (m/s).
- b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ là 1 m/s.
- c) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm $t = \pi$ (s) là 4 m.
- d) Quãng đường vật đi được từ thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (s) là 2 m.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 5 vào ô kết quả.

Câu 1. Biết $\int_1^4 \frac{x^2+3}{x} dx = \frac{a}{b} + c \ln 2$, với $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Tính $a + b - 2c$.

KQ:				
-----	--	--	--	--

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$ với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 - 3 \ln 2$.

Tính $T = a + b$.

KQ:

--	--	--	--

Câu 3. Nước chảy từ đáy bể chứa với tốc độ $r(t) = 200 - 4t$ (lit/phút), trong đó $0 \leq t \leq 50$. Tìm lượng nước chảy ra khỏi bể trong 10 phút đầu tiên (tính bằng lít).

KQ:

--	--	--	--

Câu 4. Mật độ khối lượng của một thanh kim loại có chiều dài 4 mét được cho bởi công thức $\rho(x) = 1000 + x - \sqrt{x}$ (kg/m³), trong đó x là khoảng cách bằng mét tính từ một đầu của thanh. Mật độ khối lượng trung bình (kg/m³) trên toàn bộ chiều dài của thanh là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị)

KQ:

--	--	--	--

Câu 5. Gia tốc tại thời điểm t của một vật chuyển động thẳng được cho bởi công thức $a(t) = 4\pi \cos t$ (cm/s²). Nếu vận tốc của vật bằng 0 tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc trung bình (cm/s) của vật trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq \pi$ là bao nhiêu?

KQ:

--	--	--	--

—HẾT—

§3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

- 1** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$).

⚙ Công thức tính:

$$S_{(H)} = \int_a^b |f(x)| dx$$

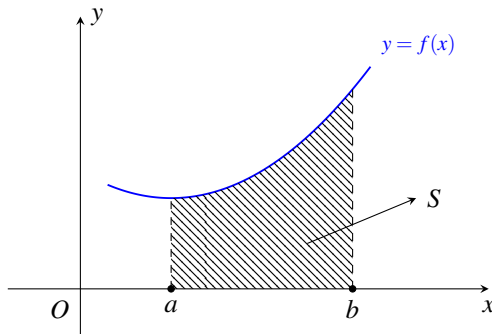
Lưu ý

- ✓ Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì

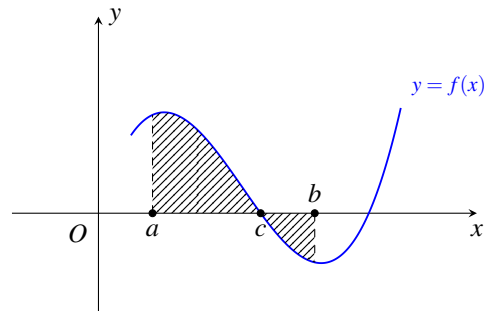
$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

- ✓ Nếu đề chưa cho (hoặc thiếu) cận, thì ta giải phương trình $f(x) = 0$ để tìm cận.

⚙ Minh họa hình ảnh:



$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f(x) dx$$



$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$

- 2** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$).

⚙ Công thức tính:

$$S_{(H)} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

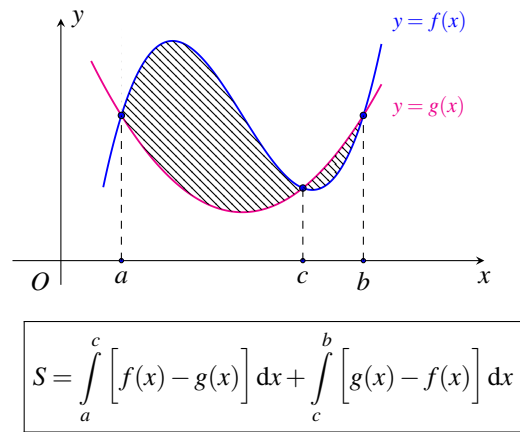
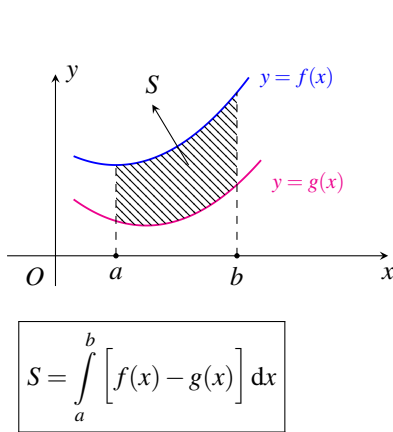
Lưu ý

- ✓ Nếu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|.$$

- ✓ Nếu đề chưa cho (hoặc thiếu) cận, thì ta giải phương trình $f(x) = g(x)$ để tìm cận.

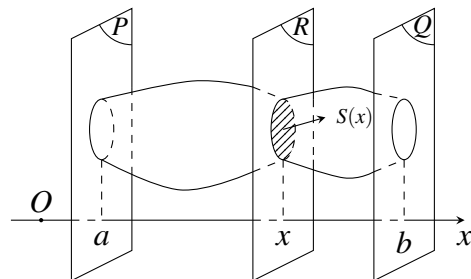
Minh họa hình ảnh:



3 Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = a, x = b$.

Cho T là một vật thể nằm giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = a$ và $x = b$ (hình vẽ). Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại điểm có hoành độ x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là một hàm liên tục. Khi đó thể tích của vật thể T được tính theo công thức

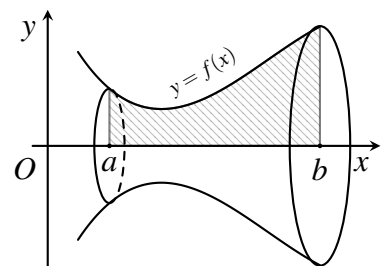
$$V = \int_a^b S(x) dx$$



4 Tính thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ (phần gạch sọc). Khi cho (H) quay quanh trục Ox , ta được một khối tròn xoay. Thể tích khối này được tính theo công thức sau

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Diện tích phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$)

Diện tích được tính theo công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

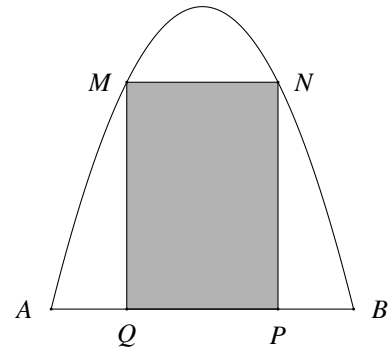
Bài 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi

- a) Đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành Ox , các đường thẳng $x = 1, x = 2$.
- b) Đồ thị hàm số $y = \cos x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = \pi$.
- c) Đồ thị các hàm số $y = 3x^2, y = 2x + 5, x = -1$ và $x = 2$.
- d) Đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ và $y = -x^2 + x$.

Bài 2. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0$ và $x = \ln 8$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 8$) chia hình (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 . Tìm k để $S_1 = S_2$.

Bài 3.

Một chiếc cổng có hình dạng là một Parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là $AB = 8$ m. Người ta treo một tấm phong hình chữ nhật có hai đỉnh M, N nằm trên Parabol và hai đỉnh P, Q nằm trên mặt đất (như hình vẽ). Ở phần phía ngoài phong (phần không tô đen) người ta mua hoa để trang trí với chi phí 1 m^2 cần số tiền mua hoa là 200.000 đồng, biết $MN = 4$ m, $MQ = 6$ m. Hỏi số tiền mua hoa trang trí chiếc cổng gần với số tiền nào sau đây?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$.

- A. 19. B. 18. C. $\frac{2186}{7}\pi$. D. 20.

Câu 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sin x; y = 0; x = 0$ và $x = 2\pi$ là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 3. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \int_0^2 3^x dx$. B. $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx$. C. $S = \int_0^2 3^{2x} dx$. D. $S = \pi \int_0^2 3^x dx$.

Câu 4. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 3x^2$, $y = 2x + 5$, $x = -1$ và $x = 2$.

- A. $S = 27$. B. $S = \frac{256}{27}$. C. $S = \frac{269}{27}$. D. $S = 9$.

Câu 5. Tính diện tích (S) của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 - x$, $y = 2x + 4$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = 4$.

- A. $S = \frac{1539}{10}$. B. $S = \frac{27}{2}$. C. $S = \frac{125}{6}$. D. $S = \frac{81}{2}$.

Câu 6. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$, $y = x + 3$.

- A. $\frac{32}{3}$. B. $\frac{16}{3}$. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

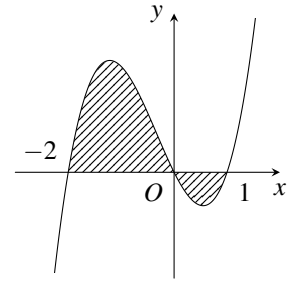
Câu 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x$ và $y = -3x$.

- A. $\frac{125}{2}$. B. $\frac{125}{3}$. C. $\frac{125}{6}$. D. $\frac{125}{8}$.

Câu 8.

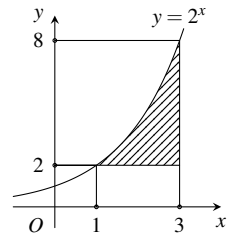
Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là diện tích hình phẳng (phần gạch chéo trong hình), chọn khẳng định đúng.

- A. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$. B. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$.
- C. $S = \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$. D. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx$.



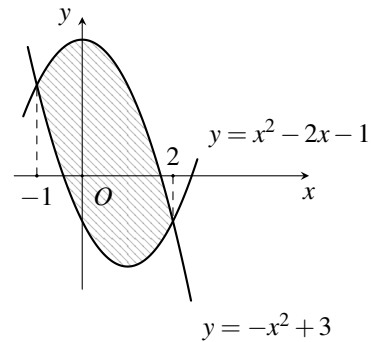
Câu 9. Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên bằng

- A. $\int_3^1 2^x dx$. B. $\int_1^3 2^x dx$. C. $\int_3^1 (2^x - 2) dx$. D. $\int_1^3 (2^x - 2) dx$.



Câu 10. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

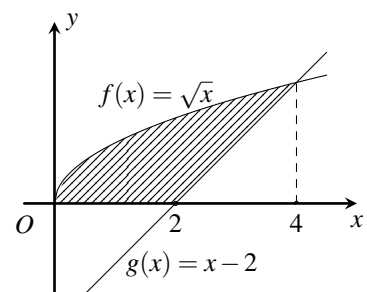
- A. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$. B. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$.
- C. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$. D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.



Câu 11.

Cho $(\mathcal{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục hoành (hình vẽ). Diện tích của $(\mathcal{H})$ bằng

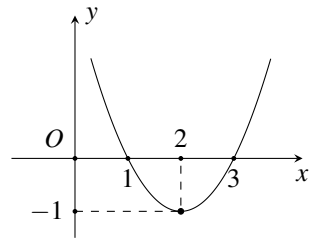
- A. $\frac{16}{3}$. B. $\frac{10}{3}$.
- C. $\frac{7}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.



Câu 12.

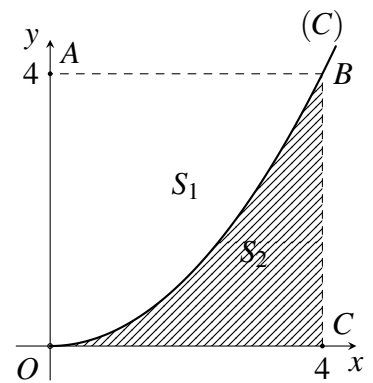
Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục hoành.

- A. 1. B. 2. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.



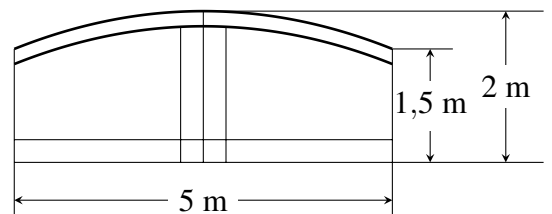
Câu 13. Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = 0,25x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và phần bị gạch (như hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 1,5. D. $\frac{1}{2}$.

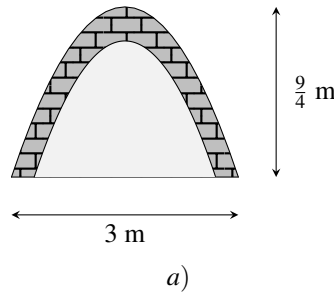


Câu 14. Ông A muốn làm cửa sắt được thiết kế như hình bên. Vòm cổng có hình dạng một parabol. Giá 1m^2 cửa sắt là 660000 đồng. Cửa sắt có giá (nghìn đồng) là

- A. 6500. B. $\frac{55}{6} \cdot 10^3$.
C. 5600. D. 6050.



Câu 15. Cửa vòm lấy ánh sáng của một toà nhà được thiết kế với kích thước như hình (a). Cửa có hình dạng một parabol có đỉnh I và đi qua hai điểm A, B như hình (b). Người ta dự định lắp kính cho cửa này. Tính diện tích kính cần lắp, biết rằng người ta chỉ sử dụng một lớp kính và bỏ qua diện tích khung cửa.



A. $\frac{9}{4} \text{ m}^2$.

B. $\frac{11}{2} \text{ m}^2$.

C. $\frac{11}{4} \text{ m}^2$.

D. $\frac{9}{2} \text{ m}^2$.

DT

2

Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ và $x = b$, ($a < b$) quay quanh trục Ox

Thể tích được tính theo công thức $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.



Lưu ý: Công thức tính có π .

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quanh trục hoành:

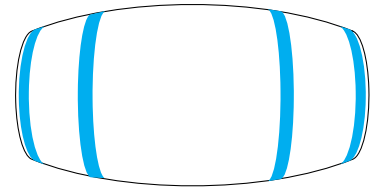
a) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$ và hai đường thẳng $x = -1$, $x = 2$.

b) $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

c) $y = \sqrt{2 + \cos x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

Bài 2.

Một thùng đựng rượu làm bằng gỗ là một hình tròn xoay (tham khảo hình bên). Bán kính các đáy là 30 cm, khoảng cách giữa hai đáy là 1 m, thiết diện qua trục vuông góc với trục và cách đều hai đáy có chu vi là 80π cm. Biết rằng mặt phẳng qua trục cắt mặt xung quanh của bình là các đường parabol. Thể tích của thùng gần với số nào sau đây?

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

Câu 1. Khối tròn xoay do quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ có thể tích bằng

A. π .B. $\frac{\pi}{2}$.C. $\pi \ln 4$.D. $\pi \ln 2$.

Câu 2. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sin x$; Ox ; $x = 0$; $x = \pi$. Quay (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. π^2 .B. 2π .C. $\frac{\pi^2}{2}$.D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 3. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \tan x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng

- A. π^2 . B. $\frac{\pi^2}{4} + \pi$. C. $1 - \frac{\pi}{4}$. D. $\pi - \frac{\pi^2}{4}$.

Câu 4. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, trục hoành với hai đường thẳng $x = 1, x = 3$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

- A. $\frac{4\pi}{3}$. B. $\frac{16\pi}{15}$. C. $\frac{16}{15}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 5. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox .

- A. $V = \frac{4}{3}$. B. $V = \frac{4}{3}\pi$. C. $V = \frac{16}{15}\pi$. D. $V = \frac{16}{15}$.

Câu 6. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành, $x = 2, x = 5$ quanh trục Ox bằng

- A. $\pi \int_2^5 \sqrt{x-1} dx$. B. $\pi \int_2^5 (x-1) dx$. C. $\pi \int_2^5 (y^2 + 1)^2 dx$. D. $\int_2^5 (x-1) dx$.

Câu 7. Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2 - ax$ với trục hoành ($a \neq 0$). Quay hình (H) xung quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích $V = \frac{16\pi}{15}$. Tìm a .

A. $a = -3$.

B. $a = -2$.

C. $a = 2$.

D. $a = \pm 2$.

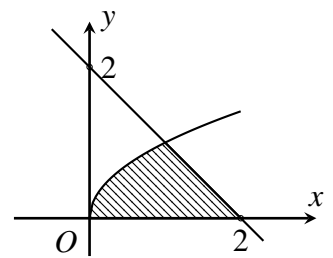
Câu 8. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$.

B. $\frac{5\pi}{6}$.

C. $\frac{7\pi}{6}$.

D. $\frac{5\pi}{4}$.



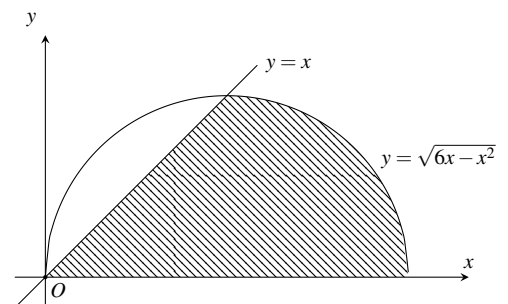
Câu 9. Thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng (phần gạch sọc của hình vẽ) xung quanh trục Ox bằng

A. 27π .

B. 24π .

C. 25π .

D. 26π .



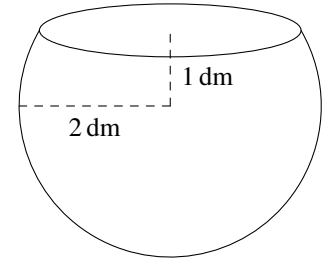
Câu 10. Một bể cá có dạng là một phần hình cầu được tạo thành khi cắt hình cầu bán kính 2 dm bằng mặt phẳng cách tâm của hình cầu 1 dm (Hình bên). Tính dung tích của bể cá (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của đềximét khối).

A. 28,7 (dm³).

B. 28,5 (dm³).

C. 28,3 (dm³).

D. 28,1 (dm³).



DT

3

Tính thể tích vật thể khi biết hàm diện tích mặt cắt vuông góc với Ox

Các bước giải:

- ① Xác định cận giới hạn $x = a, x = b$;
- ② Xác định và tính diện tích $S(x)$ của mặt cắt;
- ③ Tính thể tích theo công thức $V = \int_a^b S(x) dx$

Lưu ý:

- ① Công thức tính không có π .
- ② Công thức tính diện tích các hình thường gặp:
 - Diện tích hình vuông: $S = (\text{cạnh})^2$.
 - Diện tích hình chữ nhật: $S = (\text{dài}) \cdot (\text{rộng})$.
 - Diện tích tam giác đều: $S = \frac{(\text{cạnh})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.
 - Diện tích hình tròn: $S = \pi \cdot R^2$.

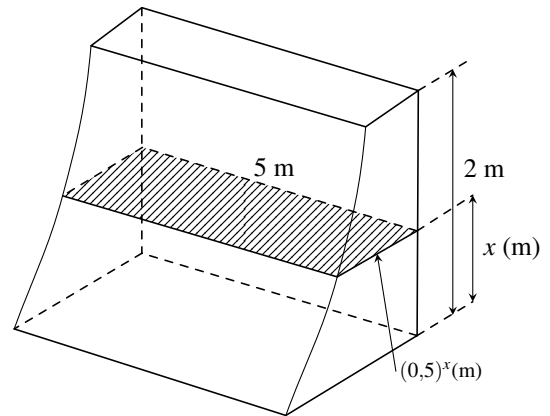
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước bằng $3x$ và $2\sqrt{3x^2 - 2}$.

Bài 2. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.

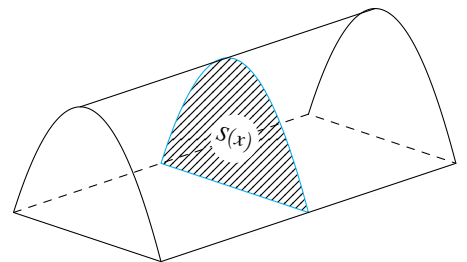
Bài 3.

Một khối bê tông cao 2 m được đặt trên mặt đất phẳng. Nếu cắt khối bê tông này bằng mặt phẳng nằm ngang, cắt mặt đất x (m) ($0 \leq x \leq 2$) thì được mặt cắt là hình chữ nhật có chiều dài 5 m, chiều rộng $(0,5)^x$ (m). Tính thể tích của khối bê tông (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của mét khối).



Bài 4.

Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12A dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Vật thể B giới hạn bởi mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt vật thể B với mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x , ($0 \leq x \leq 2$) ta được thiết diện có diện tích bằng $x^2(2 - x)$. Thể tích của vật thể B là

A. $V = \frac{2}{3}\pi$.

B. $V = \frac{2}{3}$.

C. $V = \frac{4}{3}$.

D. $V = \frac{4}{3}\pi$.

Câu 2. Cho vật thể (T) nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$, $x = 1$. Tính thể tích V của (T) biết rằng khi cắt (T) bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x , ($0 \leq x \leq 1$) ta được thiết diện là một tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{1 + x}$.

A. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

B. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$.

C. $V = \frac{3}{2}$.

D. $V = \frac{3}{2}\pi$.

Câu 3. Xét vật thể (T) nằm giữa hai mặt phẳng $x = -1$ và $x = 1$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) là một hình vuông có cạnh $2\sqrt{1 - x^2}$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\frac{16\pi}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. π .

D. $\frac{8}{3}$.

Câu 4. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình tròn có đường kính bằng $\sqrt{36 - 3x^2}$.

A. $V = \frac{81\pi}{4}$.

B. $V = \frac{81}{4}$.

C. $V = 81\pi$.

D. $V = 81$.

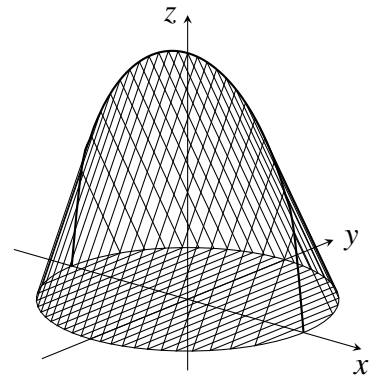
Câu 5. Một cột bê tông hình trụ có chiều cao 9 (m). Nếu cắt cột bê tông bằng mặt phẳng nằm ngang cách chân cột x (m) thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $1 - \frac{\sqrt{x}}{4}$ (m) với $0 \leq x \leq 9$. Tính thể tích của cột bê tông (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của mét khối).

- A. 6,85 (m³). B. 7,95 (m³). C. 7,85 (m³). D. 6,95 (m³).

Câu 6.

Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.

- A. $V = \sqrt{3}$. B. $V = 3\sqrt{3}$.
C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $V = \pi$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 16. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox , trục Oy , đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $x = 2$ được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $\int_2^0 |f(x)| dx$. B. $\int_0^2 |f(x) - 2| dx$. C. $\int_0^2 f(x) dx$. D. $\int_0^2 |f(x)| dx$.

Câu 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành.

- A. $S = 6$. B. $S = 16$. C. $S = \frac{13}{6}$. D. $S = 13$.

Câu 3. Tính diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 4x$, trục hoành, $x = -3$ và $x = 4$.

- A. 36. B. 44. C. $\frac{201}{4}$. D. $\frac{119}{4}$.

Câu 4. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ và trục hoành.

- A. $S = \frac{27}{4}$. B. $S = \frac{27\pi}{4}$. C. $S = 4$. D. $S = 1$.

Câu 5. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = \sin x$, $y = \cos x$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = \pi$ bằng

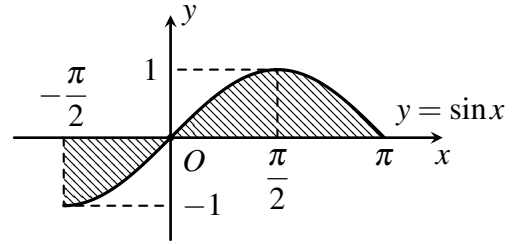
- A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $-2\sqrt{2}$.

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị của các hàm số $y = x^2$ và $y = x$ là

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{1}{6}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

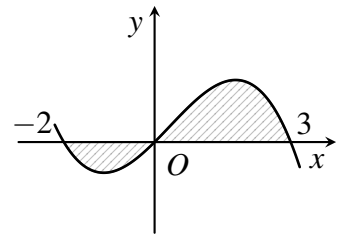
Câu 7. Cho hàm số $y = \sin x$ có đồ thị như hình bên. Tổng diện tích của các phần gạch chéo bằng

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.



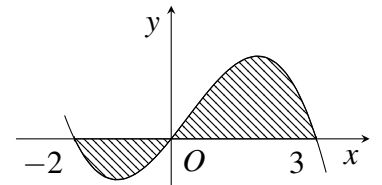
Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích S của hình phẳng (phần tô đậm của hình vẽ dưới) là

- A. $S = \int_{-2}^3 f(x) dx.$ B. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx.$
 C. $S = \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx.$ D. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx.$



Câu 9. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox nằm phía trên và phía dưới trục Ox lần lượt là 3 và 1. Khi đó $\int_{-2}^3 f(x) dx$ bằng

- A. 2. B. -2. C. 3. D. 4.



Câu 10. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay có được khi (H) quay quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{\pi^2}{4}.$ B. $2\pi.$ C. $\frac{\pi}{4}.$ D. $\frac{\pi^2}{2}.$

Câu 11. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x\sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$ xoay quanh trục Ox là

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{2\pi}{5}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 12. Cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục hoành tại các điểm có hoành độ $x = 1$ và $x = 3$. Nếu cắt vật thể đó theo một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có các kích thước là $3x$ và $4x$. Tính thể tích V của vật đó.

A. $V = 28\pi$.

B. $V = 28$.

C. $V = 104$.

D. $V = 104\pi$.

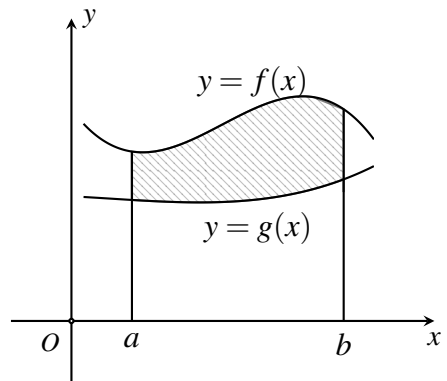
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ (có đồ thị như hình vẽ). Gọi H là hình phẳng được tô đậm trong hình, khi quay H quanh trục Ox ta thu được khối tròn xoay có thể tích V . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây

A. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$.

B. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

C. $V = \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$.

D. $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$.



Câu 14. Xét (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = a$ ($a > 0$). Giá trị của a sao cho thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng 57π là

A. $a = 3$.

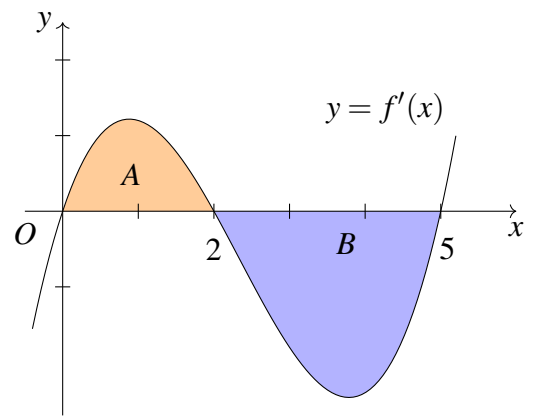
B. $a = 5$.

C. $a = 4$.

D. $a = 2$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của đạo hàm $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 2$ và $S_B = 3$. Nếu $f(0) = 4$ thì giá trị của $f(5)$ bằng

- A. 3. B. 5.
C. 9. D. -1.



Câu 16. (TN.2022) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f(x) dx = F(3) - G(0) + a$ ($a > 0$). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 3$. Khi $S = 15$ thì a bằng

- A. 15. B. 12. C. 18. D. 5.

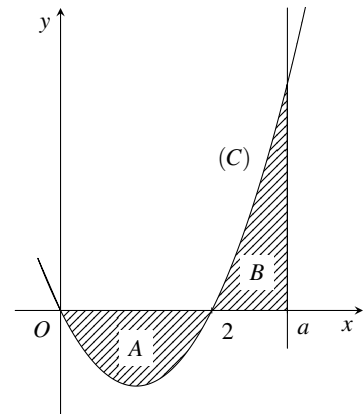
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{2}{x}$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = 4$.

- a) $\int_1^m \frac{1}{x} dx = 2$ khi $m = e^2$.
- b) Diện tích hình (H) bằng $4 \ln 2$.
- c) Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình (H) xung quanh trục hoành bằng 2π .
- d) Gọi $x = k$ là đường thẳng chia hình (H) thành 2 phần có diện tích bằng nhau. Khi đó $k = 1$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (C) . Kí hiệu A là hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$; B là hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 2$, $x = a$ ($a > 2$). Gọi S_A , S_B lần lượt là diện tích của hình phẳng A , B . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $S_A = \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$.
- b) $S_B = \int_2^a (x^2 - 2x) dx$.
- c) Với $a = 3$ thì $S(A) = S(B)$.
- d) $\int_0^a (2x - x^2) dx = S(A) + S(B)$.



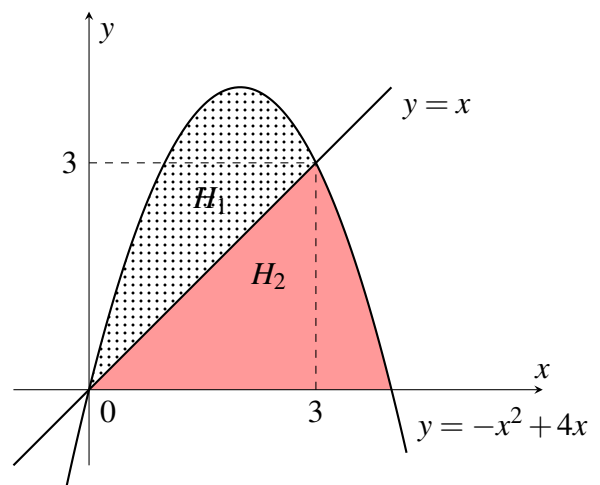
Câu 3. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2, x = 6$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Diện tích hình phẳng (H) là $S = 4 + \ln 3$.
- b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 2; x = 6$ là $S = 2 \ln 3$.
- c) Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay (H) quanh trục Ox là $V = \frac{(13 + 6 \ln 3)\pi}{3}$.
- d) Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và các đường thẳng $y = 1, x = 2, x = 6$ quanh trục Ox là $V = \frac{1 + 6 \ln 3}{3}$.

Câu 4.

Biết (H_1), (H_2) là hình phẳng được giới hạn bởi các đường như hình vẽ bên. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng (H_1), (H_2). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $S_1 = \frac{9}{2}$.
- b) $S_2 = \frac{19}{3}$.
- c) Quay (H_1) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng $\frac{81\pi}{10}$.
- d) Quay (H_2) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích bằng $\frac{188\pi}{15}$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 5 vào ô kết quả.

Câu 1. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

.....

.....

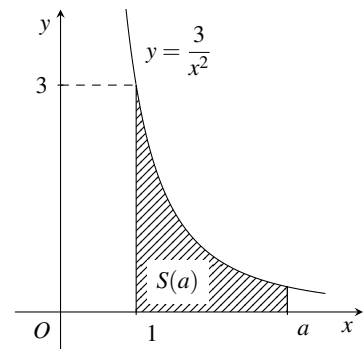
.....

.....

.....

Câu 2. Kí hiệu $S(a)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \frac{3}{x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = a$ với $a > 1$ (Hình bên). Tính giới hạn $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a)$.

KQ:



.....

.....

.....

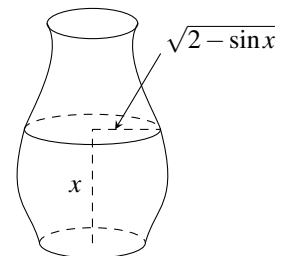
.....

.....

.....

Câu 3. Một bình chứa nước dạng như Hình bên có chiều cao là $\frac{3\pi}{2}$ dm. Nếu lượng nước trong bình có chiều cao là x (dm) thì mặt nước là hình tròn có bán kính $\sqrt{2 - \sin x}$ (dm) với $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. Tính dung tích của bình (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của đềximét khối).

KQ:



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Người ta tạo ra mô hình một quả trứng ngỗng bằng cách quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{30}\sqrt{7569 - 400x^2}$ và trục hoành với $-4,35 \leq x \leq 4,35$ quanh trục hoành. Tính thể tích quả trứng, biết thể tích mô hình này xem như bằng thể tích quả trứng ngỗng và x, y tính theo centimét (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = (0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666)^2, 0 \leq x \leq 100$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2009 có giá trị gần nhất với giá trị là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

KQ:

--	--	--	--

.....

.....

.....

.....

.....

.....

—HẾT—

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



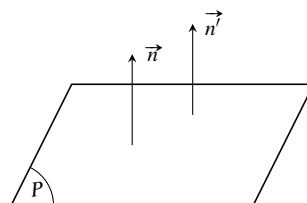
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng

Định nghĩa: Vec tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (P) là những vec tơ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (P) .

Chú ý:

- $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với (P) ;
- Nếu $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ cùng là vec tơ pháp tuyến của (P) thì $\vec{n}' = k \cdot \vec{n}$ (tọa độ tỉ lệ nhau).



2 Cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng

Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vec-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ được gọi là cặp vec-tơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và có giá nằm trong hoặc song song với mặt phẳng (P) .

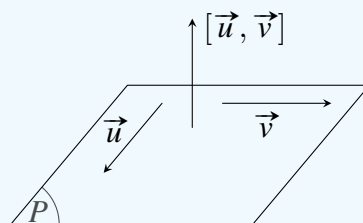
Chú ý:

- Cho hai vectơ $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{v} = (a'; b'; c')$. Khi đó

$$\vec{n} = (bc' - b'c; ca' - c'a; ab' - a'b)$$

vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, được gọi là tích có hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu là $[\vec{u}, \vec{v}]$.

- Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ là cặp vec-tơ chỉ phương của (P) thì $[\vec{u}, \vec{v}]$ là một vec-tơ pháp tuyến của (P) .



3 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Công thức: Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm vec tơ pháp tuyến có phương trình là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Thu gọn ta được dạng

$$ax + by + cz + d = 0$$

⚙ Chú ý:

① Phương trình các mặt phẳng tọa độ:

- $(Oxy): z = 0.$
- $(Oxz): y = 0.$
- $(Oyz): x = 0.$

② Phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng tọa độ:

- $(\alpha) \parallel (Oxy) \Rightarrow z = a \quad a \neq 0.$
- $(\alpha) \parallel (Oxz) \Rightarrow y = b \quad b \neq 0.$
- $(\alpha) \parallel (Oyz) \Rightarrow x = c \quad c \neq 0.$

4 Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.
Gọi $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là véc tơ pháp tuyến của (P) và (Q) .

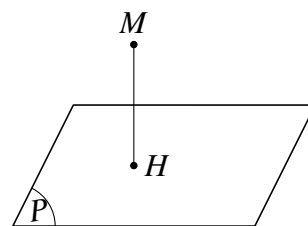
- ① Nếu $\begin{cases} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \\ d_1 = k \cdot d_2 \end{cases}$ thì (P) trùng (Q) .
- ② Nếu $\begin{cases} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \\ d_1 \neq k \cdot d_2 \end{cases}$ thì (P) song song (Q) .
- ③ Nếu $\vec{n}_1$ không cùng phương với $\vec{n}_2$ thì (P) cắt (Q) .
- ④ Nếu $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ hay $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ thì $(P) \perp (Q)$.

5 Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

⚙ **Định nghĩa:** Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P) . Khi đó độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến (P) . Kí hiệu $d(M, (P))$.

⚙ **Công thức tính:**

$$d(M, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



⚙ **Đặc biệt:**

- ① $d(M, (Oxy)) = |z_M|.$
- ② $d(M, (Oxz)) = |y_M|.$
- ③ $d(M, (Oyz)) = |x_M|.$



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Xác định véc tơ pháp tuyến và điểm thuộc mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) .

- ① Nếu véc tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là véc tơ pháp tuyến của (α) .
- ② Nếu hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ được gọi là cặp véc tơ chỉ phương của (α) . Khi đó, nếu $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

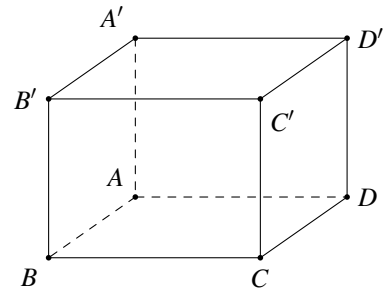
- ③ Nếu $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$ thì véc tơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n} = (a; b; c)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Xác định véc tơ pháp tuyến của các mặt phẳng $(ABCD)$, $(ABB'A')$, $(ACC'A')$, $(ADD'A')$.
- b) Chứng minh $\vec{AB'}$ là một véc tơ pháp tuyến của $(BCD'A')$.



Bài 2. Cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z + 5 = 0$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (P) và hai điểm thuộc (P) .

Bài 3. Cho (P) là mặt phẳng trung trực của MN với $M(1; -2; 3)$, $N(1; 4; 1)$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của (P) và một điểm thuộc (P) .

Bài 4. Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) biết

a) (α) đi qua $A(-1; 3; 5)$, $B(3; 2; -2)$ và $C(0; 3; 0)$

b) (α) đi qua $M(0; 3; 1)$, $N(-3; 2; 5)$ và $P(-2; 0; 0)$

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh là $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$ và $D(4; 0; 6)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa cạnh AB và song song với cạnh CD . Hãy tìm một điểm thuộc (α) và một vectơ pháp tuyến của (α) .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 2 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (α) ?

- A. $A(1; -3; 1)$. B. $B(2; -1; -1)$. C. $C(2; -1; 1)$. D. $D(1; 2; 3)$.

Câu 2. Cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α) ?

- A. $M(1; -1; 1)$. B. $N(2; 2; 2)$. C. $P(1; 2; 3)$. D. $Q(3; 3; 0)$.

Câu 3. Cho (α) vuông góc với giá của $\vec{a} = (2; -1; 3)$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n}_1 = (-2; 1; 3)$. B. $\vec{n}_2 = (-2; 1; -3)$. C. $\vec{n}_3 = (4; 2; 6)$. D. $\vec{n}_4 = (4; -2; -6)$.

Câu 4. Vectơ nào sau đây **không** phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x + 3y - 5z + 2 = 0$.

- A. $\vec{n}_1 = (-1; -3; 5)$. B. $\vec{n}_2 = (-2; -6; -10)$.
C. $\vec{n}_3 = (-3; -9; 15)$. D. $\vec{n}_4 = (2; 6; -10)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng tọa độ (Oxy) có một vectơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n} = (0; 1; 0)$. B. $\vec{n} = (0; 0; 1)$. C. $\vec{n} = (1; 0; 0)$. D. $\vec{n} = (1; 1; 0)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4; -3; 7)$ và $B(2; 1; 3)$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

- A. $\vec{n} = (1; -2; 2)$. B. $\vec{n} = (2; 4; 4)$. C. $\vec{n} = (6; -2; 10)$. D. $\vec{n} = (-2; -4; 4)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB , biết $A(1; 3; 0)$, $B(-2; 1; -1)$. Véc-tơ nào sau đây là véc-tơ pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n}_4 = (3; -2; -1)$. B. $\vec{n}_2 = (-3; 2; -1)$. C. $\vec{n}_3 = (-3; 4; 1)$. D. $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của (P) . Biết $\vec{u} = (1; -2; 0)$, $\vec{v} = (0; 2; -1)$ là cặp véc-tơ chỉ phương của (P) .

- A. $\vec{n} = (1; 2; 0)$. B. $\vec{n} = (2; 1; 2)$. C. $\vec{n} = (2; -1; 2)$. D. $\vec{n} = (0; 1; 2)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho (α) song song với giá của $\vec{a} = (1; -2; -3)$, $\vec{b} = (-4; 2; 0)$. Vectơ nào dưới đây **không phải** là vectơ pháp tuyến của (α) ?

- A. $\vec{n}_1 = (6; 12; -6)$. B. $\vec{n}_2 = (1; 2; -1)$. C. $\vec{n}_3 = (-2; -4; 2)$. D. $\vec{n}_4 = (-3; -6; -3)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 0; 6)$. Tọa độ một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

- A. $\vec{n} = (1; -2; 3)$. B. $\vec{n} = (3; 2; 1)$. C. $\vec{n} = (3; -2; 1)$. D. $\vec{n} = (2; -3; 6)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$ và $C(-10; 5; 3)$. Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ?

- A. $\vec{n} = (1; 2; 0)$. B. $\vec{n} = (1; -2; 2)$. C. $\vec{n} = (1; 8; 2)$. D. $\vec{n} = (1; 2; 2)$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 5)$, $B(1; -2; 3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A , B và song song với trục Ox có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; a; b)$. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng

- A. -2 . B. $-\frac{3}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. 2 .

DT

2

Lập phương trình mặt phẳng khi biết các yếu tố liên quan

Công thức: Cho (P) qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (a, b, c)$. Khi đó, phương trình (P) là

$$(P) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Một số cách xác định véc-tơ pháp tuyến thường gặp:

- ① Nếu $(P) \perp AB$ thì $\vec{n}_P = \vec{AB}$;
- ② Nếu (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB thì (P) qua trung điểm I của AB và $\vec{n}_P = \vec{AB}$;
- ③ Nếu (P) có cặp véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$, $\vec{v}$ thì $\vec{n}_P = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một véc-tơ pháp tuyến của (P) .
- ④ Nếu (P) qua ba điểm A, B, C phân biệt và không thẳng hàng thì $\vec{n}_P = [\vec{AB}, \vec{AC}]$;
- ⑤ Nếu (P) qua hai điểm A, B phân biệt và song song với d thì $\vec{n}_P = [\vec{AB}, \vec{u}_d]$;
- ⑥ Nếu (P) qua điểm A và chứa d thì $\vec{n}_P = [\vec{AM}, \vec{u}_d]$, với $M \in d$.

Phương trình theo đoạn chắn: Cho (P) đi qua $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ thì $(P) : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (phương trình theo đoạn chắn)

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -2; -2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 2; 1)$.

- Lập phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với BC .
- Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB .
- Lập phương trình mặt phẳng (ABC) .

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$, $D(4; 0; 6)$.

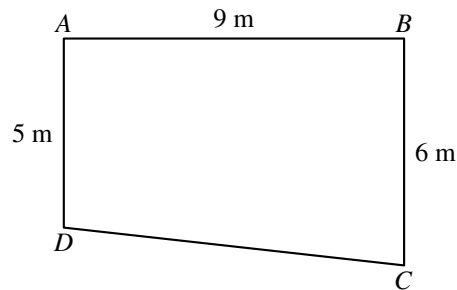
- Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD) ;
- Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) chứa cạnh AB và song song với cạnh CD ;
- Gọi A' , B' , C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A , B , C lên các trục Ox , Oy , Oz . Hãy viết phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$.

Bài 3. Viết phương trình của mặt phẳng

a) Chứa trục Ox và điểm $M(-4; 1; 2)$;

b) Chứa trục Oz và điểm $P(3; 0; -7)$.

Bài 4. Một phần sân nhà bác An có dạng hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với độ dài $AB = 9$ m, $AD = 5$ m và $BC = 6$ m như Hình bên dưới. Theo thiết kế ban đầu thì mặt sân bằng phẳng và A, B, C, D có độ cao như nhau. Sau đó bác An thay đổi thiết kế để nước có thể thoát về phía góc sân ở vị trí C bằng cách giữ nguyên độ cao ở A , giảm độ cao của sân ở vị trí B và D xuống thấp hơn độ cao ở A lần lượt là 6 cm và 3,6 cm. Để mặt sân sau khi lát gạch vẫn là bề mặt phẳng thì bác An cần phải giảm độ cao ở C xuống bao nhiêu centimét so với độ cao ở A ?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2;0;1)$ là
A. $-2x + z + 1 = 0$. **B.** $-2y + z - 1 = 0$. **C.** $-2x + z - 1 = 0$. **D.** $-2x + y - 1 = 0$.
- Câu 2.** Phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz) ?
A. $x = y + z$. **B.** $y - z = 0$. **C.** $y + z = 0$. **D.** $x = 0$.
- Câu 3.** Cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là
A. $2x - y - 1 = 0$. **B.** $-y + 2z - 3 = 0$. **C.** $2x - y + 1 = 0$. **D.** $y + 2z - 5 = 0$.
- Câu 4.** Cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?
A. $3x - y - z + 1 = 0$. **B.** $3x + y + z - 6 = 0$.
C. $3x - y - z = 0$. **D.** $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.
- Câu 5.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;3;5)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB .
A. $y - 2z - 6 = 0$. **B.** $y - 2z + 2 = 0$. **C.** $y - 3z + 4 = 0$. **D.** $y + 2z - 8 = 0$.
- Câu 6.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(0;-1;4)$ và song song với giá của hai véc-tơ $\vec{u} = (3;2;1)$, $\vec{v} = (-3;0;1)$ là
A. $x - 3y + 3z - 15 = 0$. **B.** $x - 2y + 3z - 14 = 0$.
C. $x - y - z + 3 = 0$. **D.** $x - 3y + 3z - 9 = 0$.
- Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là
A. $2x - 3y + 6z + 12 = 0$. **B.** $2x + 3y - 6z - 12 = 0$.
C. $2x - 3y + 6z = 0$. **D.** $2x + 3y + 6z + 12 = 0$.
- Câu 8.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-1;-1)$, $C(5;-1;1)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là
A. $2x + 3y + 5z - 2 = 0$. **B.** $2x - 3y - 5z - 2 = 0$.
C. $2x - 3y - 5z + 2 = 0$. **D.** $2x + 3y - 5z - 2 = 0$.
- Câu 9.** Mặt phẳng (α) đi qua $A(-1;4;-6)$ và chứa trục Oy có phương trình là
A. $-2x + y + z = 0$. **B.** $6x + z = 0$.
C. $3x - y - 6z + 1 = 0$. **D.** $6x - z = 0$.
- Câu 10.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa trục Ox và đi qua điểm $A(1;1;-1)$ có phương trình là
A. $y + z = 0$. **B.** $z + 1 = 0$. **C.** $x + z = 0$. **D.** $x - y = 0$.
- Câu 11.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;0;3)$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A , B và song song với đường thẳng OC có phương trình là
A. $3x + y - 2z - 5 = 0$. **B.** $4x + 2y + z - 11 = 0$.
C. $x - y + z - 2 = 0$. **D.** $3x + 7y - 2z - 11 = 0$.
- Câu 12.** Mặt phẳng đi qua hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(0;4;3)$ và song song với trục Oz có phương trình là

A. $2x + y - 4 = 0$.

C. $x + 2y - 5 = 0$.

B. $4x - 4y + 3z + 7 = 0$.

D. $2x + y + z - 3 = 0$.

Câu 13. Cho điểm $M(1; 2; -3)$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm M_1, M_2, M_3 là

A. $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$.

B. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$.

C. $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

D. $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = -1$.

Câu 14. Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho tam giác ABC nhận điểm $G(1; 2; 1)$ là trọng tâm?

A. $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

B. $2x + y + 2z - 6 = 0$.

C. $2x + 2y + z - 6 = 0$.

D. $2x + 2y + 6z - 6 = 0$.

Câu 15. Cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; -4; 1)$ và chẵn trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn có độ dài đại số lần lượt là a, b, c . Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) khi a, b, c theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2 là

A. $4x + 2y - z - 1 = 0$.

B. $4x - 2y + z + 1 = 0$.

C. $16x + 4y - 4z - 1 = 0$.

D. $4x + 2y + z - 1 = 0$.

DT

3

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và $(Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

① Nếu $\begin{cases} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \\ d_1 = k \cdot d_2 \end{cases}$ thì (P) trùng (Q) .

② Nếu $\begin{cases} \vec{n}_1 = k \cdot \vec{n}_2 \\ d_1 \neq k \cdot d_2 \end{cases}$ thì (P) song song (Q) .

③ Nếu $\vec{n}_1$ không cùng phương với $\vec{n}_2$ thì (P) cắt (Q) .

④ Nếu $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ hay $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ thì $(P) \perp (Q)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm các cặp mặt phẳng song song hoặc vuông góc trong các mặt phẳng sau

$(P): 2x + 3y - 2z + 7 = 0$

$(Q): 3x - 2y - 11 = 0$

$(R): 4x + 6y - 4z - 9 = 0$

$(T): 7x + y - z + 1 = 0$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - 3y + z + 5 = 0$.

- Chứng minh rằng mặt phẳng $(\alpha'): -4x + 6y - 2z + 7 = 0$ song song với (α) .
- Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và song song với (α) .

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q): x + y + 3z = 0$, $(R): 2x - y + z = 0$.

- Xét vị trí tương đối của (Q) và (R) ;
- Viết trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2; 1; -3)$, đồng thời vuông góc với (Q) và (R) .

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 4; -1)$, $B(1; 1; 3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x - 3y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mặt phẳng $(P): -x + y + 3z + 1 = 0$. Mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) có phương trình nào sau đây?

- A. $2x - 2y - 6z + 7 = 0$. B. $-2x + 2y + 3z + 5 = 0$.
C. $x - y + 3z - 3 = 0$. D. $-x - y + 3z + 1 = 0$.

Câu 2. Cho hai mặt phẳng $(P): 2x + 4y + 3z - 5 = 0$ và $(Q): mx - ny - 6z + 2 = 0$. Giá trị của m, n sao cho $(P) \parallel (Q)$ là

- A. $m = 4; n = -8$. B. $m = n = 4$. C. $m = -4; n = 8$. D. $m = n = -4$.

Câu 3. Cho hai mặt phẳng $(P): x + my + (m - 1)z + 1 = 0$ và $(Q): x + y + 2z = 0$. Tập hợp tất cả các giá trị m để hai mặt phẳng này **không** song song là

- A. $(0; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$. C. $(-\infty; 3)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 4. Cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$. Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (α) .

- A. $2x - y + z + 1 = 0$. B. $2x - y - z + 1 = 0$.
C. $2x + 2y + 2z - 1 = 0$. D. $x - y - z + 1 = 0$.

Câu 5. Cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$ và $(Q): x + my + z - 1 = 0$. Tìm tham số m để hai mặt phẳng P và Q vuông góc với nhau.

- A. $m = -4$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 4$.

Câu 6. Cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$, $(Q): 3x - (m + 2)y + (2m - 1)z + 3 = 0$. Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m = -1$.

Câu 7. Mặt phẳng đi qua $A(1; 3; -2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 4 = 0$ có phương trình là

- A. $2x - y + 3z + 7 = 0$. B. $2x - y + 3z - 7 = 0$.
C. $2x + y - 3z + 7 = 0$. D. $2x + y + 3z + 7 = 0$.

Câu 8. Cho điểm $A(2; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 4z - 5 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

- A. $(Q): 3x - 2y + 4z + 4 = 0$. B. $(Q): 3x + 2y + 4z + 8 = 0$.
C. $(Q): 3x - 2y + 4z + 5 = 0$. D. $(Q): 3x - 2y + 4z - 4 = 0$.

Câu 9. Cho mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; -3)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

- A. $2x + 2y - z - 1 = 0$. B. $x + y + z + 1 = 0$.
C. $3x - 2y + 2z + 6 = 0$. D. $x - 2y - z - 3 = 0$.

Câu 10. Mặt phẳng qua $A(1; 2; -1)$ và vuông góc với các mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 2 = 0$; $(Q): x + y + z - 1 = 0$ có phương trình là

- A. $x - y + z + 2 = 0$. B. $4x - y + z - 1 = 0$.
C. $x + y + 2z - 1 = 0$. D. $4x - y - 3z - 5 = 0$.

Câu 11. Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) lần lượt có phương trình là $x + y - z = 0$, $x - 2y + 3z = 4$ và cho điểm $M(1; -2; 5)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (P) , (Q) .

A. $5x + 2y - z + 14 = 0$.

B. $x - 4y - 3z + 6 = 0$.

C. $x - 4y - 3z - 6 = 0$.

D. $5x + 2y - z + 4 = 0$.

Câu 12. Cho điểm $A(-4; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 4 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $(Q): x - 2y - z + 7 = 0$.

B. $(Q): x - 2y - z - 7 = 0$.

C. $(Q): x - 2y + z + 5 = 0$.

D. $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$.

Câu 13. Cho hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$, $(Q): x - z + 2 = 0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng (P) , (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3. Phương trình của (α) là

A. $-2x + z + 6 = 0$.

B. $-2x + z - 6 = 0$.

C. $x + y + z - 3 = 0$.

D. $x + y + z + 3 = 0$.

Câu 14. Cho $A(1; -1; 2)$; $B(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa A , B và vuông góc với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) có phương trình là

A. $3x - 2y - z + 3 = 0$.

B. $3x - 2y - z - 3 = 0$.

C. $-x + y = 0$.

D. $x + y + z - 2 = 0$.

Câu 15. Cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A , B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là $ax + by + cz - 11 = 0$. Tính $a + b + c$.

A. $a + b + c = -7$.

B. $a + b + c = 10$.

C. $a + b + c = 5$.

D. $a + b + c = 3$.

DT**4**

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

⚙ **Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng:** Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$. Khi đó

$$d(M, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

⚙ **Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song:** Cho hai mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d_1 = 0$ và $(Q): ax + by + cz + d_2 = 0$ song song nhau. Khi đó

$$d((P), (Q)) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính khoảng cách từ điểm $A(1; 2; 3)$ đến các mặt phẳng sau

a) $(P): 3x + 4z + 10 = 0$;

b) $(Q): 2x - 10 = 0$;

c) $(R): 2x + 2y + z - 3 = 0$.

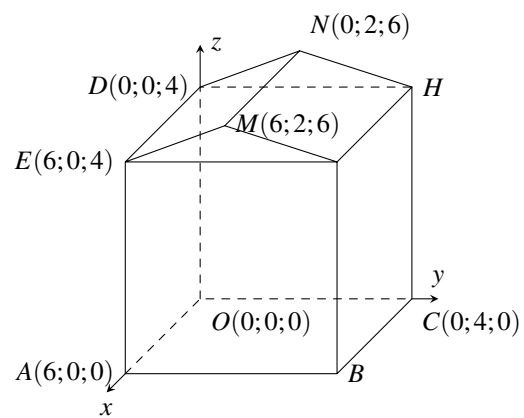
Bài 2. Cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 12 = 0$, $(Q): 4x + 2y + 4z - 6 = 0$.

- Chứng minh $(P) \parallel (Q)$.
- Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Bài 3.

Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ như Hình 9 nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.

- Viết phương trình mặt phẳng mái nhà $(DEMN)$.
- Tính khoảng cách từ điểm B đến mái nhà $(DEMN)$.



Hình 9

Bài 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $DA = 2$, $DC = 3$, $DD' = 2$. Tính khoảng cách từ đỉnh B' đến mặt phẳng $(BA'C')$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khoảng cách từ $A(-2; 1; -6)$ đến mặt phẳng (Oxy) là

- A. 6. B. 2. C. 1. D. $\frac{7}{\sqrt{41}}$.

Câu 2. Cho hai điểm $A(-2; 1; 3)$, $B(4; 1; -1)$. Khoảng cách từ trung điểm I của đoạn AB đến mặt phẳng (Oyz) là

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 3. Cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 5 = 0$ và điểm $A(1; -3; 1)$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

- A. $\frac{8}{\sqrt{29}}$. B. $\frac{8}{9}$. C. $\frac{3}{\sqrt{29}}$. D. $\frac{8}{29}$.

Câu 4. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; 3; -1)$ trên mặt phẳng $(\alpha): 16x + 12y - 15z + 7 = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AH .

- A. $\frac{19}{25}$. B. $\frac{12}{25}$. C. $\frac{19}{625}$. D. $\frac{12}{625}$.

Câu 5. Cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z - 1 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\frac{4}{3}$.

Câu 6. Biết rằng hai mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 7 = 0$ và $2x - 2y + z + 4 = 0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng

- A. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. B. $V = \frac{27}{8}$. C. $V = \frac{81\sqrt{3}}{8}$. D. $V = \frac{125}{8}$.

Câu 7. Cho hai điểm $A(2; 2; -2)$ và $B(3; -1; 0)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$ tại điểm I . Tỉ số $\frac{IA}{IB}$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 8. Cho hai mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$. Có bao nhiêu điểm M trên trục Oy thỏa mãn M cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q) ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 9. Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) và (Q) cách điểm A một khoảng bằng $3\sqrt{3}$. Phương trình mặt phẳng (Q) là

- A. $x + y + z + 3 = 0$ và $x + y + z - 3 = 0$. B. $x + y + z + 3 = 0$ và $x + y + z + 15 = 0$.
C. $x + y + z + 3 = 0$ và $x + y + z - 15 = 0$. D. $x + y + z + 3 = 0$ và $x + y - z - 15 = 0$.

Câu 10. Cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$ và điểm $D(1; 0; 3)$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cách D một khoảng bằng $\sqrt{6}$ có phương trình là

- A. $\begin{cases} x + 2y - z - 10 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$. B. $x + 2y + z + 2 = 0$.
C. $\begin{cases} x + 2y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 10 = 0 \end{cases}$. D. $x + 2y + z - 10 = 0$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM) .

- A. $d(B, (CDM)) = \sqrt{2}$.
 B. $d(B, (CDM)) = 2$.
 C. $d(B, (CDM)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 D. $d(B, (CDM)) = 2\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 D. $\sqrt{3}$.

Câu 13. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $BC, C'D'$ và DD' . Tính khoảng cách từ A đến (MNP) .

- A. $\frac{15}{11}a$.
 B. $\frac{15}{22}a$.
 C. $\frac{9}{11}a$.
 D. $\frac{3}{4}a$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.
 C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
 D. $\frac{a}{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a, SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBD) .

- A. $d = \frac{a}{3}$.
 B. $d = \frac{a}{6}$.
 C. $d = \frac{3a}{2}$.
 D. $d = \frac{2a}{3}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - z + 3 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (P) ?

- A. $(\alpha): 2x - y + 2z = 0$.
 B. $(\beta): 2x - y - 2z = 0$.
 C. $(Q): -2x - y + 2z = 0$.
 D. $(R): 2x + y - 2z = 0$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 3 = 0$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) bằng

- A. 2.
 B. 1.
 C. $\frac{2}{3}$.
 D. 3.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 3 = 0$. Véc-tơ nào sau đây không phải là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{a} = (3; -3; 0)$.
 B. $\vec{a} = (1; -1; 0)$.
 C. $\vec{a} = (1; -1; 3)$.
 D. $\vec{a} = (-1; 1; 0)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ với điểm $M(-3;1;4)$ và gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M lên các trục Ox, Oy, Oz . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) ?

- A. $4x - 12y + 3z - 12 = 0$.
 B. $4x - 12y - 3z + 12 = 0$.
 C. $4x + 12y - 3z - 12 = 0$.
 D. $4x - 12y - 3z - 12 = 0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0), B(0;-3;0), C(0;0;1)$. Một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là

- A. $\vec{n} = (3; -2; 6)$. B. $\vec{n} = (2; -3; -1)$. C. $\vec{n} = (2; 3; 1)$. D. $\vec{n} = (2; -3; 1)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2024; 0; -1)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $M \in (Oxz)$. B. $M \in Oy$. C. $M \in (Oxy)$. D. $M \in (Oyz)$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ và $C(0; 0; 4)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

- A. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$. B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-4} = 1$. C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1$. D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y - z + m = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị của tham số m dương để khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (α) bằng 1.

- A. -6 . B. -3 . C. 3 . D. 6 .

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 3; -4)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(2; 0; -4)$. B. $(0; 3; -4)$. C. $(2; 3; 0)$. D. $(0; 3; 0)$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(-1; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P) .

- A. $(Q): 3x - y + z = 0$. B. $(Q): x + z = 0$.
C. $(Q): 2x - y + 3 = 0$. D. $(Q): -x + y + z = 0$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; -1; 1)$. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1; 2; 5)$ và song song với giá của hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) ?

- A. $\vec{n}_3 = (-1; -1; -1)$. B. $\vec{n}_2 = (5; -1; -1)$.
C. $\vec{n}_1 = (5; 1; -1)$. D. $\vec{n}_4 = (-1; -1; 5)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 0)$, $B(-1; 0; 1)$, $C(2; 1; -1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

- A. $3x + y + 5z - 2 = 0$. B. $x + 3y + z + 2 = 0$.
C. $3x - y + 5z - 2 = 0$. D. $3x + y + 5z + 2 = 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 4)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + mz - 1 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Mặt phẳng đi qua 3 điểm là hình chiếu vuông góc của $A(1; 2; 3)$ lên ba trục tọa độ có phương trình là $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.
b) Điểm A cách đều mặt phẳng $(\gamma): 2x + y + mz - 1 = 0$ và điểm B khi $m = -2$.
c) Biết mặt phẳng $(\beta): 4x + (n - 2)y + z - 3 = 0$ song song với mặt phẳng (α) . Khi đó, $2m + n = 5$.
d) Khi $B \in (\alpha): 2x + y + mz - 1 = 0$ thì $m = -2$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$, $B(-1; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Biết điểm M nằm trên tia Ox mà khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$. Khi đó, hoành độ điểm M là $x_M = 5$.
b) Mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P) có phương trình là $x + z = 0$.
c) Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $(1; 2; -1)$.
d) Khi $m = -4$ thì mặt phẳng $(R): 2x - my + 3 = 0$ vuông góc với mặt phẳng (P) .

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$ và $B(3; -1; 5)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $2x - 3y + 4z - \frac{29}{2} = 0$.
- b) Điểm $N(1; 2; -1)$ đối xứng với $A(1; 2; 1)$ qua mặt phẳng (Oyz) .
- c) Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB và cắt các trục Ox , Oy và Oz lần lượt tại các điểm D , E và F . Khi thể tích của tứ diện $ODEF$ bằng $\frac{3}{2}$, phương trình mặt phẳng (P) là $2x - 3y + 4z \pm 6 = 0$.
- d) Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + 4z - 2 = 0$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hai mặt phẳng (α) , (β) song song với nhau.
- b) Điểm $A(1; 2; -1)$ nằm trên mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$.
- c) Phương trình mặt phẳng qua O , đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là $2x + y - 2z = 0$.
- d) Mặt phẳng (γ) đi qua điểm $I(1; 0; -1)$ và song song với $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ có phương trình là $(\gamma): 3x - 2y + 2z - 1 = 0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài 4 m; 4,4 m; 4,8 m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng phần chục)?

KQ:

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 11$ và hai véc-tơ $\vec{u}_1 = (1; 1; 2)$, $\vec{u}_2 = (1; 2; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với giá của hai véc-tơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $3x + by + cz + d = 0$, với $b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $d \neq -15$. Khi đó, $b + c + d$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 3. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox , Oy tại hai điểm cách đều O . Giả sử (P) có phương trình $x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q) có phương trình $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2 + c_1c_2$.

KQ:

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 8$ và điểm $A(1; 3; 2)$. Mặt phẳng (P) đi qua A và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Biết phương trình của (P) có dạng $ax + by + cz + 6 = 0$. Tính $a + b + c$.

KQ:

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -3; 1)$, $B(-1; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z - 2 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A , B và vuông góc với (P) có dạng là $ax + by + cz + 2 = 0$. Tính $a^2 + b^2 + c^2$.

KQ:

Câu 6. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 0)$, $C(1; 1; 3)$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A , B , C có dạng $ax + by + cz - 12 = 0$. Khi đó, $a - b - 2c$ bằng

KQ:

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG



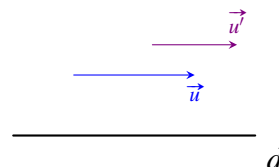
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vec tơ chỉ phương của đường thẳng

⚙ **Định nghĩa:** Vec tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d là những vec tơ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d .

⚙ **Chú ý:**

- $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d .
- Nếu $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ cùng là vec tơ chỉ phương của d thì $\vec{u}' = k \cdot \vec{u}$ (tọa độ tỉ lệ nhau).



2 Phương trình tham số của đường thẳng

⚙ **Công thức:** Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ làm vec tơ chỉ phương có phương trình là

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

⚙ **Chú ý:**

① Phương trình các trục tọa độ:

$$\begin{aligned} \bullet \quad Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} & \bullet \quad Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} & \bullet \quad Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \end{aligned}$$

② Nếu u_1, u_2 và u_3 đều khác 0 thì (1) có thể được viết dưới dạng

$$\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3} \quad (2)$$

(2) được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng d .

3 Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng

- Δ_1 qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$;
- Δ_2 qua điểm $N(x'_0; y'_0; z'_0)$, vec tơ chỉ phương $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Trường hợp 1: Nếu $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0}$ và

- $[\vec{u}, \vec{MN}] \neq \vec{0}$ thì Δ_1 song song Δ_2 ;
- $[\vec{u}, \vec{MN}] = \vec{0}$ thì Δ_1 trùng Δ_2 .

Trường hợp 2: Nếu $[\vec{u}, \vec{v}] \neq \vec{0}$ và

- $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{MN} \neq 0$ thì Δ_1 chéo Δ_2 ;
- $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{MN} = 0$ thì Δ_1 cắt Δ_2 .

Đặc biệt

Nếu $\vec{u} \perp \vec{v}$ hay

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 0$$

thì Δ_1 vuông góc với Δ_2



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Xác định điểm thuộc và véc tơ chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng d .

- ① Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với d thì $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d .
- ② Nếu d qua hai điểm AB thì d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- ③ Nếu d vuông góc với giá của hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương thì d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

- ④ Cho đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 thì

- Một véc tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ (hệ số của t).
- Muốn xác định tọa độ một điểm thuộc d , ta chỉ cần cho trước giá trị cụ thể của tham số t , thay vào hệ phương trình tính x, y và z .

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$
 Tìm một véc tơ chỉ phương và hai điểm thuộc đường thẳng d .

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $O.ABC$ có $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$ và $C(0;0;7)$.

- a) Tìm tọa độ một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB , AC .
 b) Vectơ $\vec{v} = (-1;2;0)$ có là vectơ chỉ phương của đường thẳng AB không?

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 1 = 0$ và $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q) . Tìm một điểm thuộc Δ và một vectơ chỉ phương của Δ .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_2 = (2; -1; 5)$. B. $\vec{u}_4 = (1; -1; 4)$. C. $\vec{u}_3 = (1; -1; 5)$. D. $\vec{u}_1 = (1; 0; 4)$.

Câu 2. Cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. B. $\vec{u} = (2; 1; 0)$. C. $\vec{u} = (-1; 2; 0)$. D. $\vec{u} = (2; 1; 1)$.

Câu 3. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$. Điểm nào trong các điểm dưới đây nằm trên đường thẳng d ?

- A. $P(5; 2; 5)$. B. $Q(1; 0; 0)$. C. $M(3; 2; 2)$. D. $N(1; -1; 2)$.

Câu 4. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Đường thẳng d **không** đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(1; 2; 5)$. B. $N(2; 3; -1)$. C. $P(3; 5; 4)$. D. $Q(-1; -1; 6)$.

Câu 5. Cho hai điểm $A(2; -1; 4)$ và $B(-1; 3; 2)$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$. B. $\vec{u}_3 = (1; 2; 6)$. C. $\vec{u}_2 = (3; -4; 2)$. D. $\vec{u}_4 = (1; -4; 2)$.

Câu 6. Cho tam giác ABC với $A(1; 0; -2)$, $B(2; -3; -4)$, $C(3; 0; -3)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng OG ?

- A. $(-2; 1; 3)$. B. $(3; -2; 1)$. C. $(2; 1; 3)$. D. $(-1; -3; 2)$.

Câu 7. Cho đường thẳng d song song với trục Oy . Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_4 = (2019; 0; 2019)$. B. $\vec{u}_1 = (2019; 0; 0)$.
C. $\vec{u}_2 = (0; 2019; 0)$. D. $\vec{u}_3 = (0; 0; 2019)$.

Câu 8. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 2z + 3 = 0$. Một véc-tơ chỉ phương của Δ là

- A. $\vec{v} = (1; 2; 3)$. B. $\vec{a} = (1; 0; 2)$. C. $\vec{u} = (2; 0; -1)$. D. $\vec{b} = (2; -1; 0)$.

Câu 9. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 2; 4)$, $B(-2; 3; 5)$, $C(-9; 7; 6)$ có tọa độ là

- A. $(3; 4; -5)$. B. $(3; -4; 5)$. C. $(-3; 4; -5)$. D. $(3; 4; 5)$.

Câu 10. Cho hai mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 2z - 5 = 0$, $(Q): 4x + 5y - z + 1 = 0$. Các điểm A, B phân biệt thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Khi đó $\vec{AB}$ cùng phương với véc-tơ nào sau đây?

- A. $\vec{u} = (8; -11; -23)$. B. $\vec{k} = (4; 5; -1)$.
C. $\vec{w} = (3; -2; 2)$. D. $\vec{v} = (-8; 11; -23)$.

DT

2

Viết phương trình đường thẳng d khi biết vài yếu tố liên quan

☑ **Phương pháp chung:** Ta cần xác định véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ và một điểm M thuộc đường thẳng.

☑ **Một số kiểu xác định véc-tơ $\vec{u}$ thường gặp:**

- ① d qua hai điểm A, B thì $\vec{u} = \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- ② d song song với Δ thì $\vec{u} = \vec{u}_\Delta$.
- ③ d vuông góc với (P) thì $\vec{u} = \vec{n}_P$.
- ④ d vuông góc với giá của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau

- a) d đi qua điểm $A(4; -2; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (7; 3; -9)$.
b) d đi qua hai điểm $M(0; 0; 1)$, $N(3; 3; 6)$.

c) d có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 8 + 5t \\ y = 7 + 4t \\ z = 11 + 9t. \end{cases}$$

Bài 2.

Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2; 5; 15)$ và $(21; 27; 5; 10)$.



Hình 5.23

- Viết phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline này.
- Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- d đi qua điểm M và song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$
- d qua điểm $M(3; 2; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + z - 2 = 0$.
- d đi qua điểm $M(1; 2; 1)$, đồng thời vuông góc với cả hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ và $\Delta_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 0)$, mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , cắt d và song song với mặt phẳng (P) .

Bài 5. Trong Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2 + t \end{cases}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Câu 2. Cho hai điểm $A(2; -1; 3), B(3; 2; -1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng AB ?

- A. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$.

Câu 3. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{2x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$, điểm $A(2; -3; 4)$. Đường thẳng qua A và song song với Δ có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$

Câu 4. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $N(2; -3; -5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - 3y - z + 2 = 0$.

- A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-1}$ B. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-5}{-1}$
C. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{-5}$ D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-5}$

Câu 5. Cho tam giác ABC có $A(3; 2; -4)$, $B(4; 1; 1)$ và $C(2; 6; -3)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

- A. $d: \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}$ B. $d: \frac{x+12}{3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1}$
C. $d: \frac{x-3}{7} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{-1}$ D. $d: \frac{x+7}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$

Câu 6. Cho hai điểm $A(1; -1; 1)$ và $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A , đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ là

- A. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$ B. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$
C. $\frac{x-7}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{1}$ D. $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$

Câu 7. Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d và cắt trục hoành. Tìm một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ .

- A. $\vec{u} = (0; 2; 1)$ B. $\vec{u} = (1; 0; 1)$ C. $\vec{u} = (1; -2; 0)$ D. $\vec{u} = (2; 2; 3)$

Câu 8. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; 0; 2)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2 .

- A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{4}$ B. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{-4}$
C. $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-2}{4}$ D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}$

Câu 9. Cho đường thẳng Δ đi qua $M(1; 2; 2)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2t \end{cases}$

Câu 10. Cho đường thẳng $d: x = y = z$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng tọa độ (Oyz) .

- A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

Câu 11. Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1; -1; 2)$.
Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN .

A. $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{2}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

C. $\Delta: \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

D. $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ có phương trình là

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2}$.

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

C. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

DT

3

Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho d qua điểm M và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}$; d' qua điểm N và có véc tơ chỉ phương $\vec{v}$.

- ① Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ ($\vec{u} = k\vec{v}$) và $M \notin d'$ thì $d \parallel d'$.
- ② Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{v}$ ($\vec{u} = k\vec{v}$) và $M \in d'$ thì d trùng với d' .
- ③ Nếu $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{MN} \neq 0$ thì d và d' chéo nhau.
- ④ Nếu $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ thì d và d' cắt nhau.
- ⑤ Nếu $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ thì d và d' vuông góc nhau.

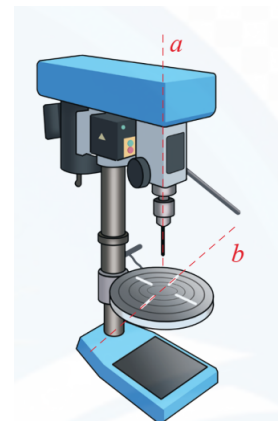
BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ Bài 6.

Trên phần mềm mô phỏng 3D một máy khoan trong không gian $Oxyz$, cho biết phương trình trục a của mũi khoan và một đường rãnh b trên vật cần khoan (tham khảo hình vẽ bên) lần lượt là

$$a: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{và} \quad b: \begin{cases} x = 1 + 4t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 6. \end{cases}$$

- a) Chứng minh a, b vuông góc và cắt nhau.
- b) Tìm giao điểm của a và b .



≡ Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d' trong mỗi trường hợp sau. Nếu chúng cắt nhau, hãy xác định tọa độ giao điểm.

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 8 + 9t' \\ y = 7 + 6t' \\ z = 8 + 6t' \end{cases};$$

b) $d: \frac{x}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x-5}{8} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-3}{4}$;

c) $d: \begin{cases} x=2 \\ y=3+2t \\ z=1-t \end{cases}$ và $d': \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{5};$

d) $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $d': \begin{cases} x=5 \\ y=7+2t \\ z=5-t. \end{cases}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. d và d' chéo nhau. B. d trùng d' . C. d song song d' . D. d cắt d' .

Câu 2. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+3}{-3}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. d_1 cắt và không vuông góc với d_2 . B. d_1 cắt và vuông góc với d_2 .
C. d_1 song song d_2 . D. d_1 chéo d_2 .

Câu 3. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $d_1 \parallel d_2$. B. $d_1 \equiv d_2$. C. d_1, d_2 chéo nhau. D. d_1, d_2 cắt nhau.

Câu 4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{3} = y = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$,

- A. Trùng nhau. B. Chéo nhau. C. Song song. D. Cắt nhau.

Câu 5. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-m} = \frac{z-2}{-3}$ và $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d_1 vuông góc d_2 .

- A. $m = 5$. B. $m = 1$. C. $m = -5$. D. $m = -1$.

Câu 6. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và $\Delta_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{-2}$. Tọa độ giao điểm M của hai đường thẳng đã cho là

- A. $M(5; 1; 3)$. B. $M(0; -1; -1)$. C. $M(3; 5; 7)$. D. $M(2; 3; 7)$.

Câu 7. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-m}{1} = \frac{z+2}{-1}$ (với m là tham số). Tìm m để hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau.

- A. $m = 5$. B. $m = 7$. C. $m = 9$. D. $m = 4$.

Câu 8. Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$. Giá trị của m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau là

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 2$.

4

DT 4 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Xét đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$$
 và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

🌀 **Phương pháp:** Xét $d \cap (P) \Rightarrow A(x_0 + u_1t) + B(y_0 + u_2t) + C(z_0 + u_3t) + D = 0 \quad (*)$

- Nếu (*) có đúng 1 nghiệm t thì d cắt (P) ;
- Nếu (*) vô nghiệm thì d song song (P) ;
- Nếu (*) nghiệm đúng với mọi t thì d nằm trong (P) .

☀ **Đặc biệt:** Với $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của d và $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của (P) thì

$$d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} \text{ cùng phương với } \vec{n} \text{ hay } \vec{u} = k \cdot \vec{n}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng được chỉ ra ở các câu sau:

a) $(\alpha): y + 2z = 0$ và $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$

b) $(P): 3x - 3y + 2z - 5 = 0$ và $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

c) $(P): 3x - 3y + 2z + 1 = 0$ và $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$.



Bài 2. Tìm điều kiện của tham số m để

a) $\Delta: \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$ vuông góc với $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$.

b) $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ song song với $(\alpha): -x + m^2y + mz + 1 = 0$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d với mặt phẳng (Oxy) .

- A. $M(-1; 2; 0)$. B. $M(1; 0; 0)$. C. $M(2; -1; 0)$. D. $M(3; -2; 0)$.

Câu 2. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) .

- A. $(2; 1; 1)$. B. $(0; -1; 4)$. C. $(1; -3; 3)$. D. $(2; -5; 1)$.

Câu 3. Cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 3z - 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Δ cắt và không vuông góc với (α) . B. $\Delta \parallel (\alpha)$.
C. $\Delta \subset (\alpha)$. D. $\Delta \perp (\alpha)$.

Câu 4. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-m}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + my - (m^2 + 1)z + m - 2m^2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m để đường thẳng d nằm trên (P) ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 5. Cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = m + t \\ y = -1 + nt \\ z = 4 + 2t \end{cases}$. Tìm điều kiện của m và n để đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (α) .

- A. $\begin{cases} m \neq 3 \\ n = -3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = 3 \\ n \neq -3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = 3 \\ n = -3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \neq 3 \\ n \neq -3 \end{cases}$.

Câu 6. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$. Trong các mặt phẳng dưới đây mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng d ?

A. $2x - 2y + 2z + 4 = 0$.

B. $4x - 2y - 2z - 4 = 0$.

C. $4x + 2y + 2z + 4 = 0$.

D. $4x - 2y + 2z + 4 = 0$.

Câu 7. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3mt \\ z = -1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 4x - 4y + 2z - 5 = 0$. Giá trị nào của m để đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) .

A. $m = -\frac{5}{6}$.

B. $m = \frac{2}{3}$.

C. $m = \frac{3}{2}$.

D. $m = \frac{5}{6}$.

Câu 8. Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

A. $2x - y + z - 3 = 0$.

B. $x + 2y + 3z - 7 = 0$.

C. $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

D. $2x - y + z = 0$.

Câu 9. Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-6}{-2}$; $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 là

A. $(P): x + 8y + 5z + 16 = 0$.

B. $(P): x + 4y + 3z - 12 = 0$.

C. $(P): 2x + y - 6 = 0$.

D. $(P): x + 8y + 5z - 16 = 0$.

Câu 10. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-5}$ và $d_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Tìm phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 .

A. $18x - 7y + 3z + 34 = 0$.

B. $18x + 7y + 3z - 20 = 0$.

C. $18x + 7y + 3z + 20 = 0$.

D. $18x - 7y + 3z - 34 = 0$.

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 7; -9)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z - 1 = 0$.

- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P) .
- Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với điểm M qua (P) .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -4; 5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

- A. $M(3; 0; 0)$. B. $M(0; -4; 5)$. C. $M(0; 0; 5)$. D. $M(3; 0; 5)$.

Câu 2. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- A. $M(0; 0; 3)$. B. $N(1; 2; 0)$. C. $Q(0; 2; 0)$. D. $P(1; 0; 0)$.

Câu 3. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 0)$. B. $(2; 1; 0)$. C. $(0; 1; -3)$. D. $(2; 0; -3)$.

Câu 4. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A. $(0; 2; 1)$. B. $(0; 2; 0)$. C. $(3; 0; 0)$. D. $(0; 0; 1)$.

Câu 5. Hình chiếu của điểm $M(2; 3; -2)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A. $(2; 0; 0)$. B. $(0; 3; 0)$. C. $(0; 0; -2)$. D. $(2; 0; -2)$.

Câu 6. Cho điểm $M(3; 2; -1)$, điểm $M'(a; b; c)$ đối xứng của M qua trục Oy , khi đó $a + b + c$ bằng

- A. 6. B. 2. C. 4. D. 0.

Câu 7. Điểm đối xứng với điểm $A(-2; 7; 5)$ qua mặt phẳng (Oxz) là điểm B có tọa độ là

- A. $B(2; 7; -5)$. B. $B(-2; -7; 5)$. C. $B(-2; 7; -5)$. D. $B(2; -7; -5)$.

Câu 8. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; -1; 0)$ lên mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 6 = 0$ là

- A. $(5; -3; 1)$. B. $(-1; 1; -1)$. C. $(1; 1; 1)$. D. $(3; -2; 1)$.

Câu 9. Gọi hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -1; -4)$ lên mặt phẳng $(P) : 2x - 2y - z - 3 = 0$ là điểm $H(a; b; c)$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a + b + c = -1$. B. $a + b + c = 3$. C. $a + b + c = 5$. D. $a + b + c = -\frac{5}{3}$.

Câu 10. Cho mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z + 9 = 0$ và điểm $A(-7; -6; 1)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P) .

- A. $A'(1; 2; -3)$. B. $A'(1; 2; 1)$. C. $A'(5; 4; 9)$. D. $A'(9; 0; 9)$.

Câu 11. Cho điểm $A(4; -3; 2)$ và đường thẳng $d : \frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$. Gọi điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng d . Tọa độ điểm H là

- A. $H(5; 4; -1)$. B. $H(1; 0; -1)$. C. $H(-5; -4; 1)$. D. $H(-2; -2; 0)$.

Câu 12. Cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$, $M(2; 1; 0)$. Gọi $H(a; b; c)$ là điểm thuộc d sao cho MH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. $T = \sqrt{5}$. B. $T = 12$. C. $T = 21$. D. $T = 6$.

Câu 13. Cho điểm $M(1; 2; -6)$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Điểm N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng d có tọa độ là

- A. $N(0; 2; -4)$. B. $N(-1; 2; -2)$. C. $N(1; -2; 2)$. D. $N(-1; 0; 2)$.

Câu 14. Cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc Δ sao cho $|\vec{MA} - 3\vec{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a + 2b + 4c$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. -1. C. 2. D. 1.

Câu 15. Cho ba điểm $A(0; -2; -1)$, $B(-2; -4; 3)$, $C(1; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P) : x + y - 2z - 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho $|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a - b + 2c$.

- A. 3. B. -1. C. 4. D. -2.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; -2)$ và $B(2; 2; 2)$. Véc-tơ $\vec{a}$ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB ?

- A. $\vec{a} = (-2; 1; 0)$. B. $\vec{a} = (2; 3; 0)$. C. $\vec{a} = (2; 1; 0)$. D. $\vec{a} = (2; 3; 4)$.

Câu 2. Đường thẳng $(\Delta) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $C(3; -1; -1)$. B. $D(1; -2; 0)$. C. $A(-1; 2; 0)$. D. $B(-1; -3; 1)$.

Câu 3. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

A. $\vec{u}_3 = (2; -1; -3)$.

B. $\vec{u}_4 = (-2; -1; 3)$.

C. $\vec{u}_1 = (2; -1; 3)$.

D. $\vec{u}_2 = (1; 0; 1)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình là $2x + y - 5z + 6 = 0$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2; 7)$ và vuông góc với (P) là

A. $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+7}{-5}$.

B. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{-5}$.

C. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-7}{-5}$.

D. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+5}{7}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. d_1 và d_2 vừa cắt nhau vừa vuông góc.

B. d_1 và d_2 không vuông góc và không cắt nhau.

C. d_1 và d_2 cắt nhau nhưng không vuông góc.

D. d_1 và d_2 vuông góc nhưng không cắt nhau.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của trục Oz ?

A. $\vec{m} = (1; 1; 1)$.

B. $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

C. $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

D. $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Câu 8. Đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(-1; -2; 0)$.

B. $N(-1; 2; 0)$.

C. $P(3; 1; -1)$.

D. $M(1; -2; 0)$.

Câu 9. Đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-1}$ vuông góc với đường thẳng nào dưới đây?

A. $d_1: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$

B. $d_4: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$

C. $d_3: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{cases}$

D. $d_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 10. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d song song với (P) thì $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}$.

B. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{n}$ thì d song song với (P) .

C. $\vec{u}$ không vuông góc với $\vec{n}$ thì d cắt (P) .

D. d vuông góc với (P) thì $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{n}$.

Câu 11. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d .

A. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

B. $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

C. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$.

D. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 3z - 2 = 0$. Gọi d' là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , cắt và vuông góc với d . Đường thẳng d' có phương trình là $\frac{x+1}{a} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{c}$. Tính $S = a - c$.

A. 3.

B. -7.

C. -3.

D. 4.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t. \end{cases}$$

- a) Giao điểm của đt d và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 2 = 0$ là $I(0; 1; 2)$.
- b) Véc-tơ $\vec{a} = (4; 2; -3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d .
- c) Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1; 1; 3)$.
- d) Phương trình chính tắc của đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-2}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z - 3 = 0$.

- a) Đường thẳng d' đi qua điểm $A(1; 0; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) . Phương trình tham số của đường thẳng d' là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$
.
- b) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; -1; 0)$.
- c) Đường thẳng d đi qua điểm $M(2; -1; 1)$.
- d) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 30° .

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 3t. \end{cases}$$

- a) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 3)$.
- b) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2; 3)$.
- c) Đường thẳng d' đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và song song với đường thẳng d . Phương trình tham số của đường thẳng d' là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$
.
- d) Khoảng cách từ điểm $B(0; 1; 2)$ đến đường thẳng d bằng 3.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$$

- a) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = (2; 1; 1)$.
- b) Điểm $B(4; 0; 3)$ thuộc đường thẳng d .

c) Khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3 = 0$ bằng 1.

d) Đường thẳng d và đường thẳng $d': \frac{x}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{4}$ trùng nhau.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(5; 0; -1)$, $C(3; 1; 2)$ và mặt phẳng $(Q): 3x + y - z + 3 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc (Q) thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + 2MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó tổng $a + b + 3c$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ điểm $A(3; 4; 2)$ và trong 4 giây đầu đạn đi với vận tốc không đổi, véc-tơ vận tốc (trên giây) là $\vec{v} = (4; 5; 1)$. Biết viên đạn trúng mục tiêu tại điểm $M(13; b; c)$, tính $b + 2c$.

KQ:

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; 3; -2)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B . Khi đó độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 4. Hình vẽ dưới đây là hình ảnh Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là bề của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng Oxy là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz , trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz khoảng 343 m.

(Nguồn: <https://www.goldengate.org/assets/1/6/ggb-exhibit-chapter-statistics.pdf>)



Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ. Tính độ dài MN (đơn vị mét) biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

--	--	--	--

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; -1; 2)$ và $B(5; -1; 1)$. Đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng AB lên mặt phẳng $(P): x + 2y + z + 2 = 0$ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; 2)$. Tính $S = a + b$.

KQ:

--	--	--	--

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d đi qua điểm $M(a; b; 0)$. Tính $\frac{a}{b}$.

KQ:

--	--	--	--

—HẾT—

§3. CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Góc giữa hai mặt phẳng

Công thức: Gọi $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ lần lượt là véc tơ pháp tuyến của (P) và (Q) ; φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) , với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Khi đó

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Chú ý:

- Nếu (P) song song hoặc trùng (Q) thì $\varphi = 0^\circ$.
- Nếu $(P) \perp (Q)$ thì $\varphi = 90^\circ$. Khi đó $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

2 Góc giữa hai đường thẳng

Công thức: Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của d_1 và d_2 ; φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 , với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Khi đó

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \right| = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Chú ý:

- Nếu d_1 song song hoặc trùng d_2 thì $\varphi = 0^\circ$.
- Nếu $d_1 \perp d_2$ thì $\varphi = 90^\circ$. Khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$.

3 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Công thức: Gọi $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$, $\vec{n} = (A; B; C)$ lần lượt là véc tơ chỉ phương của d và véc tơ pháp tuyến của (P) ; φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) , với $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$. Khi đó

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|u_1 A + u_2 B + u_3 C|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Chú ý:

- Nếu d song song hoặc trùng (P) thì $\varphi = 0^\circ$, khi đó $\vec{u} \perp \vec{n}$
- Nếu d vuông góc với (P) thì $\varphi = 90^\circ$, khi đó $\vec{u} = k \cdot \vec{n}$.



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tính góc trong không gian Oxyz

- Xác định véc tơ chỉ phương (véc tơ pháp tuyến);
- Áp dụng đúng công thức.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai mặt phẳng sau:

a) $(P): x + y + 4z - 2 = 0$ và $(Q): 2x - 2z + 7 = 0$.

b) $(P): 2x - y - 2z - 9 = 0$ và $(Q): x - y - 6 = 0$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ và $d': \frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

b) $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 \\ z = -2 + t' \end{cases}$.

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng sau:

a) $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và $(P): x - y + 2z + 1 = 0$.

b) $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+4}{1}$ và $(P): 4x + 3y - z + 1 = 0$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$, mặt phẳng $(Q): x - 3y + 5z - 2 = 0$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là

A. $-\frac{\sqrt{35}}{7}$.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{\sqrt{35}}{7}$.

D. $-\frac{5}{7}$.

Câu 2. Góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z + 4 = 0$ và $(Q): -x + y + 2z + 3 = 0$ bằng

A. 45° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 60° .

Câu 3. Tính góc α giữa mặt $(P): x + z - 4 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) .

A. 45° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 60° .

Câu 4. Cho điểm $H(2; 1; 2)$, điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x + y - 11 = 0$ là

A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Câu 5. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{2}$, $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 . Tính $\cos \varphi$.

A. $\cos \varphi = -\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

B. $\cos \varphi = \frac{4\sqrt{5}}{15}$.

C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

D. $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Câu 6. Cho đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$. Góc giữa hai đường thẳng bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 7. Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - z \cdot \sin \alpha + \cos \alpha = 0$ và $(Q): y - z \cdot \cos \alpha - \sin \alpha = 0$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa d và trục Oz là

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Câu 8. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 3 = 0$. Tính số đo góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- A. 45° . B. 120° . C. 60° . D. 30° .

Câu 9. Cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z - 8 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$. Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Câu 10. Cho mặt phẳng $(P): x + y - \sqrt{2}z + 5 = 0$. Tính góc φ giữa mặt phẳng (P) và trục Oy .

- A. $\varphi = 60^\circ$. B. $\varphi = 45^\circ$. C. $\varphi = 90^\circ$. D. $\varphi = 30^\circ$.

Câu 11. Cho hai mặt phẳng $(P): (m-1)x + y - 2z + m = 0$ và $(Q): 2x - z + 3 = 0$. Tìm m để (P) vuông góc với (Q) .

- A. $m = 0$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = 5$. D. $m = -1$.

Câu 12. Cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z + 1 = 0$ và $(Q): (2m-1)x + m(1-2m)y + (2m-4)z + 14 = 0$ với m là tham số thực. Tổng các giá trị của m để (P) và (Q) vuông góc nhau bằng

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $-\frac{7}{2}$.

Câu 13. Cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 2 = 0$ và $(Q): x - my + (m+1)z + m - 2 = 0$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho góc giữa (P) và (Q) bằng 60° . Tính tổng các phần tử của S .

- A. 1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 14. Hãy tìm tham số thực m để góc giữa hai đường thẳng sau bằng 60° .

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -\sqrt{2}t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 + \sqrt{2}t' \\ z = 1 + mt' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

- A. $\frac{1}{2}$. B. -1 . C. $-\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 15. Cho các điểm $A(-1; \sqrt{3}; 0)$, $B(1; \sqrt{3}; 0)$, $C(0; 0; \sqrt{3})$ và điểm M thuộc trục Oz sao cho hai mặt phẳng (MAB) và (ABC) vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (OAB) .

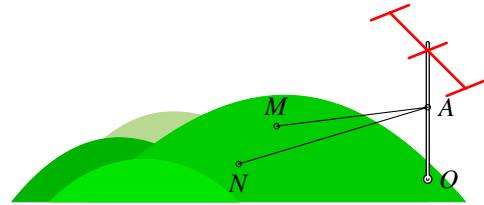
- A. 45° . B. 60° . C. 15° . D. 30° .

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4. Mặt bên SAB là tam giác cân tại S có chiều cao bằng 6 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

- Tính góc α giữa hai đường thẳng SD và BC ;
- Tính góc β giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD) .

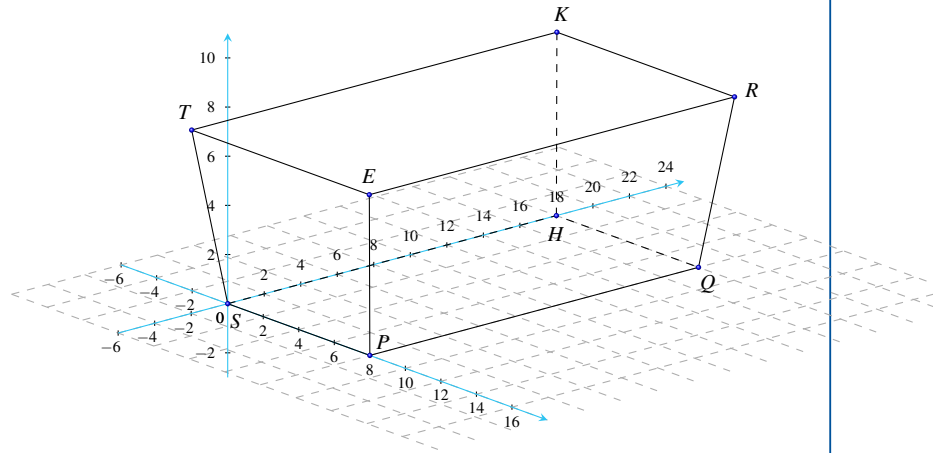
Bài 3.

Người ta muốn dựng một cột ăng-ten trên một sườn đồi. Ăng-ten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1 m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăng-ten và M, N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ). Cho biết tọa độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0)$, $A(0;0;6)$, $M(3;-4;3)$, $N(-5;-2;2)$.



- Tính độ dài các đoạn dây cáp MA và NA .
- Tính góc tạo bởi các sợi dây cáp MA, NA với mặt phẳng sườn đồi.

A loaf of golden-brown pumpkin bread is presented in a black rectangular baking pan. The top of the loaf is decorated with a generous layer of green pumpkin seeds. The bread has a slightly cracked surface, and the pan is set against a plain white background.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, với mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, một máy bay cất cánh từ vị trí $A(0; 10; 0)$ với vận tốc $\vec{v} = (150; 150; 40)$. Tính góc nâng của máy bay (góc giữa hướng chuyển động bay lên của máy bay với đường băng và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- A. 10° . B. 12° . C. 11° . D. 9° .



Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

- A. 30° . B. 120° . C. 90° . D. 60° .

Câu 3. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có E, F, G lần lượt là trung điểm của $NN', PQ, M'Q'$. Tính góc giữa hai đường thẳng EG và $P'F$.

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Câu 4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 2, AD = 3, AA' = 4$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(A'C'D)$ là α . Tính giá trị gần đúng của góc α .

- A. $45,2^\circ$. B. $38,1^\circ$. C. $61,6^\circ$. D. $53,4^\circ$.

Câu 5. Cho hình chóp $SABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm SB, SD . Cô-sin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. Cho hình chóp tam giác $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AB, OC . Gọi α là góc tạo bởi OA và MN . Tính $\cos \alpha$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a, AC = 2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi ψ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) . Tính $\cos \psi$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm SA và BC . Biết góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , côsin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. B. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và $B, AB = BC = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. D. $\frac{\sqrt{55}}{10}$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 1 = 0$.

Tính góc hợp bởi đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = 0$. B. $m = -4$. C. $m = 2$. D. $m = -6$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$.

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{3}$ mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ O đến (α) đạt giá trị lớn nhất. Khi đó góc giữa mặt phẳng (α) và trục Ox là φ thỏa mãn.

- A. $\sin \varphi = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. B. $\sin \varphi = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. C. $\sin \varphi = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. D. $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với mặt phẳng $y + z + 1 = 0$ một góc 60° . Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

Câu 6. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $(D): \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-1}{m-2}$ vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y + 2z = 2$.

- A. 6. B. 5. C. -7. D. 1.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): mx + my - 2z - 1 = 0$ và đường thẳng $\frac{x}{n+1} = \frac{y}{m} = \frac{1-z}{1}$ với $m \neq 0, m \neq -1$. Khi $(P) \perp d$ thì tổng $m + n$ bằng bao nhiêu?

- A. $m + n = 2$. B. $m + n = -2$. C. $m + n = -\frac{1}{2}$. D. $m + n = -\frac{2}{3}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$. Góc giữa hai đường thẳng đó bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: x = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ và mặt phẳng $(P): 4x + 2y + z - 1 = 0$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Góc tạo bởi (Δ) và (P) lớn hơn 30° . B. $\Delta \parallel (P)$.

C. $\Delta \perp (P)$.

D. $\Delta \subset (P)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z - 8 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là

A. 90° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 30° .

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+8}{-4} = \frac{z+3}{-3}$.

Tính góc hợp bởi đường thẳng d_1 và d_2 .

A. 90° .

B. 60° .

C. 0° .

D. 30° .

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): -\sqrt{3}x + y + 1 = 0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox ?

A. 120° .

B. 30° .

C. 150° .

D. 60° .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$. Xét tính

đúng sai của các khẳng định sau

- a) Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 1; 3)$.
- b) Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng 60° .
- c) Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-1; 0; 1)$.
- d) Giá trị cosin của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 bằng $-\frac{1}{2}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(0; 1; -1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Giá trị cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{21}}$.
- b) Đường thẳng AB vuông góc với mặt phẳng (P) .
- c) Mặt phẳng (OAB) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-1; 1; 1)$.
- d) Giá trị cosin của góc giữa mặt phẳng (OAB) và mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 5x + 11y + 2z - 4 = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; 1)$.
- b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-5; -11; 2)$.
- c) Giá trị cosin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng $\frac{1}{2}$.
- d) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng bằng 30° .

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 2 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0$ và $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 4; 5)$.
- b) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng 30° .
- c) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 1)$.
- d) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại $A\left(\frac{7}{15}; \frac{11}{15}; -\frac{19}{15}\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, một vật chuyển động theo quỹ đạo là một đường thẳng. Tại thời điểm ban đầu, vật ở vị trí điểm $A(1; 5; 0)$, sau 10 phút vật ở vị trí điểm $B(101; 205; 1250)$. Hỏi vật chuyển động theo phương hợp với mặt đất góc bao nhiêu độ (giả sử mặt đất là mặt phẳng Oxy , kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 2. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy là 60° . Gọi M là trung điểm BC . Ta có $\cos(A'C, AM) = \frac{\sqrt{a}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}$. Tổng $a + b$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + my - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để đường thẳng d tạo với mặt phẳng (P) góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

KQ:

Câu 4. Trong không gian, cho mặt phẳng (P) có phương trình $ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua hai điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$ tạo với (Oyz) một góc 60° . Khi đó $a + b - \sqrt{2}c$ bằng

KQ:

Câu 5. Có hai bức tường hình vuông cạnh $5m$, vuông góc với nhau và cùng vuông góc với mặt đất, hai mặt tường giao nhau tại cột d . Trên cột d có một điểm A cách mặt đất $2m$. Có một chiếc cột cao $1m$ đặt vuông góc với mặt đất, khoảng cách từ chân cột đến mỗi bức tường là $1m$. Người ta muốn căng một chiếc bạt phẳng hình tam giác đi qua điểm A và đầu cột, hai đầu mút M, N thuộc hai chân tường sao cho diện tích bạt bé nhất. Hỏi phải căng chiếc bạt hợp với mặt đất góc bao nhiêu độ (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 6. Trong không gian, tìm m để số đo góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng 60° biết $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -3 + \sqrt{2}t \end{cases}$,

$$d_2: \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = 3 + t \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}.$$

KQ:

—HẾT—

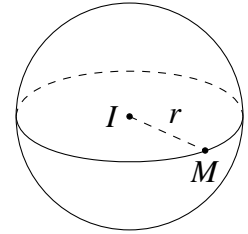
§4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

- ✓ Trong không gian, tập hợp tất cả các điểm M cách điểm I cố định một khoảng không đổi r ($r > 0$) cho trước được gọi là mặt cầu tâm I bán kính R . Kí hiệu $S(I; r)$ hay viết tắt là (S) . Vậy $S(I; R) = \{M | IM = r\}$.
- ✓ Nhận xét:
 - Nếu $IM = r$ thì M nằm trên mặt cầu.
 - Nếu $IM < r$ thì M nằm trong mặt cầu.
 - Nếu $IM > r$ thì M nằm ngoài mặt cầu.



2 Phương trình mặt cầu

- ✓ Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính r có phương trình là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$
- ✓ Dạng khai triển: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2 > 0$.



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Xác định tâm I , bán kính r của mặt cầu cho trước

- ✓ **Loại 1.** Cho $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$. Khi đó
 - ① Tâm $I(a; b; c)$ (đổi dấu số trong dấu ngoặc);
 - ② Bán kính r (Rút căn về phải).
- ✓ **Loại 2.** Cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$. Khi đó
 - ① Điều kiện để (*) là mặt cầu là $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$;
 - ② Tâm $I(a, b, c)$ (đổi dấu hệ số của x, y, z và chia đôi);
 - ③ Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình mặt cầu? Hãy xác định tâm và bán kính (nếu là phương trình mặt cầu).

- | | |
|---|---|
| a) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4$. | b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$. |
| c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3z + 8 = 0$. | d) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 12y - 9z + 1 = 0$ |

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả giá trị của tham số m để các phương trình sau là phương trình mặt cầu.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của (S) .

A. $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.

B. $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

C. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$.

D. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$.

Câu 2. Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$. Mặt cầu (S) có thể tích bằng

A. $V = 36\pi$.

B. $V = 14\pi$.

C. $V = \frac{4}{36}\pi$.

D. $V = 16\pi$.

Câu 3. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z - 7 = 0$. Tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) lần lượt là

A. $I(-2; -3; 4)$, $R = 6$.

B. $I(-2; -3; 4)$, $R = 36$.

C. $I(2; 3; -4)$, $R = 36$.

D. $I(2; 3; -4)$, $R = 6$.

Câu 4. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

A. $I(4; -1; 0)$, $R = 4$.

B. $I(-4; 1; 0)$, $R = 4$.

C. $I(-4; 1; 0)$, $R = 2$.

D. $I(4; -1; 0)$, $R = 2$.

Câu 5. Cho mặt cầu $(S): 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12x - 4y + 4 = 0$. Mặt cầu (S) có đường kính AB . Biết điểm $A(-1; -1; 0)$ thuộc mặt cầu (S) . Tọa độ điểm B là

A. $B(-5; 3; -2)$.

B. $B(-11; 5; 0)$.

C. $B(-11; 5; -4)$.

D. $B(-5; 3; 0)$.

Câu 6. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 - z^2 + 4x - 2y + 6z + 5 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 15 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + z - 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2xy + 6z - 5 = 0$.

Câu 7. Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+2)y - 2(m+3)z + 16m + 13 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

A. $m < 0$ hay $m > 2$.

B. $m \leq -2$ hay $m \geq 0$.

C. $m < -2$ hay $m > 0$.

D. $m \leq 0$ hay $m \geq 2$.

Câu 8. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m (biết $m \in \mathbb{N}$) để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 3m^2 + 7 = 0$ là phương trình của một mặt cầu?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 9. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - m = 0$ (m là tham số). Biết mặt cầu có bán kính bằng 5. Tìm m .

- A. $m = 25$. B. $m = 11$. C. $m = 16$. D. $m = -16$.

Câu 10. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$ có bán kính nhỏ nhất khi m bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. 0.

DT

2

Lập phương trình mặt cầu và ứng dụng thực tiễn

✔ **Phương pháp chung:** Cần xác định được tọa độ tâm $I(a; b; c)$ và độ dài bán kính r .

✔ **Các bài toán cơ bản:**

① Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và đi qua điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ thì bán kính

$$r = IA = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - b)^2 + (z_A - c)^2}.$$

② Mặt cầu (S) có đường kính AB thì

- Tâm $I(a; b; c)$ là trung điểm của AB hay $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Bán kính $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$.

③ Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc với $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì bán kính

$$r = d(I, (\alpha)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

④ Mặt cầu qua bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng (ngoại tiếp tứ diện $ABCD$)

Gọi (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*)

Thay tọa độ 4 điểm A, B, C, D vào (*), ta được hệ phương trình 4 ẩn số a, b, c, d ;

Giải tìm a, b, c, d . Suy ra tâm $I(a, b, c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ **Bài 1.** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

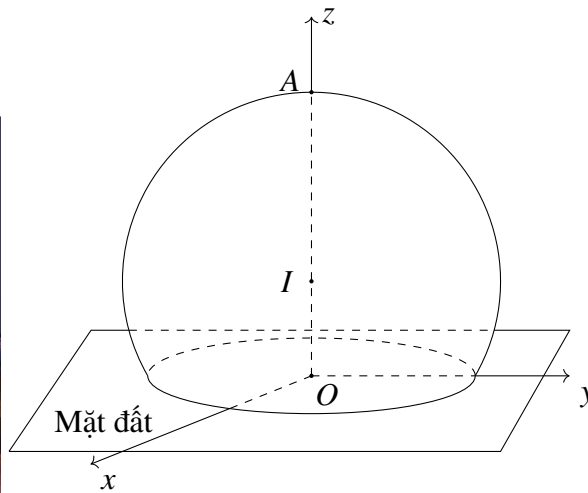
- Có tâm $I(2; -1; 0)$ và đi qua điểm $M(4; 1; -2)$;
- Có đường kính AB với $A(0; 1; 3), B(4; -5; -1)$;
- Có tâm $I(1; -2; 3)$ và tiếp xúc với trục Oy ;
- Có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$.

Bài 2. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, biết

a) $A(1; 1; 0), B(1; 0; 1), C(0; 1; 1), D(1; 2; 3)$.

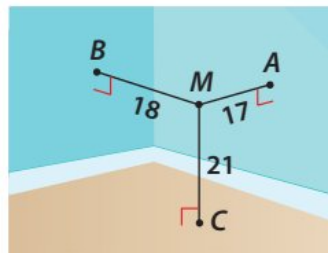
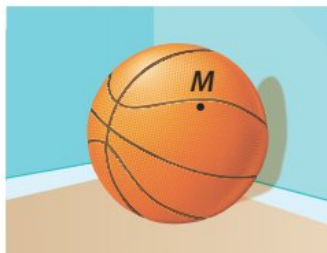
b) $A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3), D(1; 0; 4)$.

Bài 3. Giả sử người ta biểu diễn mô phỏng của tòa nhà Ericsson Globe ở phần Khởi động trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ bởi một mặt cầu có tâm I , đường kính 110 m và $OA = 85$ m như hình vẽ (đơn vị trên trục là mét). Hãy viết phương trình của mặt cầu này.



Hình 5.37

Bài 4. Bạn Bình đổ bạn Nam tìm được đường kính của quả bóng rổ, biết rằng nếu đặt quả bóng ở một góc căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm (tiếp xúc) với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó (khi đó khoảng cách từ tâm quả bóng đến hai bức tường và nền nhà đều bằng bán kính của quả bóng) thì có một điểm M trên quả bóng với khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm và 21 cm (Hình bên dưới). Hãy giúp Nam xác định đường kính của quả bóng rổ đó. Biết rằng loại bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm.



Hình 5.38

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Mặt cầu tâm $I(3; -1; 0)$, bán kính $R = 5$ có phương trình là

- A. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 5$. B. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 5$.
C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25$. D. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$.

Câu 2. Phương trình mặt cầu tâm $I(2; -3; -4)$, bán kính bằng 4 là

- A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 16$. B. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 16$.
C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4$. D. $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 4$.

Câu 3. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 1; -2)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$.

- A. $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5$. B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$.
C. $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 25$. D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z + 1 = 0$.

Câu 4. Mặt cầu tâm $I(-3; 0; 4)$ và đi qua điểm $A(-3; 0; 0)$ có phương trình là

- A. $(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 4$. B. $(x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16$.
C. $(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$. D. $(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 4$.

Câu 5. Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB với $A(4; -3; 5)$, $B(2; 1; 3)$ là

- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 8z - 26 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 20 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 8z - 20 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z + 26 = 0$.

Câu 6. Cho hai điểm $A(2; 4; 1)$ và $B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. B. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$.
C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3$. D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 2)$, biết thể tích khối cầu tương ứng là $V = 972\pi$.

- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$. B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$.
C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9$. D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 81$.

Câu 8. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$, tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz) . Phương trình của mặt cầu (S) là

- A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$. B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$.
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$. D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

Câu 9. Mặt cầu có tâm $I(1; 2; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính bằng

- A. 2. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\sqrt{13}$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-1; 0; 3)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 4y - 3z + 19 = 0$ có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 4$. B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 2$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 2$.

Câu 11. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(-1; 2; 0)$, $B(-2; 1; 1)$ và có tâm nằm trên trục Oz .

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 5 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 5 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - x - 5 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - y - 5 = 0$.

Câu 12. Cho mặt cầu (S) tâm I nằm trên mặt phẳng (Oxy) đi qua ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm I .

- A. $I(2; -1; 0)$. B. $I(0; 0; 1)$. C. $I(0; 0; -2)$. D. $I(-2; 1; 0)$.

Câu 13. Cho 3 điểm $A(2; 3; 0)$, $B(0; -4; 1)$, $C(3; 1; 1)$. Mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxz) , biết $I(a; b; c)$. Tính tổng $T = a + b + c$.

- A. $T = 3$. B. $T = -3$. C. $T = -1$. D. $T = 2$.

Câu 14. Cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; -2)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $OABC$ là

- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 15. Cho điểm $D(3; 4; -2)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính diện tích mặt cầu (S) .

- A. $\frac{4\sqrt{29}\pi}{3}$. B. $\frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$. C. 116π . D. 29π .

DT

3

Vị trí tương đối của điểm, của mặt phẳng với mặt cầu

✓ **Bài toán 1:** Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt cầu $S: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$ (1). Thay tọa độ điểm M vào vế trái của (1), nếu

- ① Kết quả bằng 0 thì $M \in (S)$.
- ② Kết quả ra số âm thì M nằm trong (S) .
- ③ Kết quả ra số dương thì M nằm ngoài (S) .

✓ **Bài toán 2:** Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính r và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

① Nếu $d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > r$ thì (P) và (S) không có điểm chung.

② Nếu $d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = r$ thì (P) tiếp xúc (S) .

③ Nếu $d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < r$ thì (P) cắt (S) .

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ **Bài 1.** Cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 4)$ và bán kính $R = 5$. Các điểm $A(3; 1; 5)$, $B(-1; 11; 14)$, $C(6; 2; 4)$ nằm trong, nằm trên hay nằm ngoài mặt cầu (S) ?

.....

.....

.....

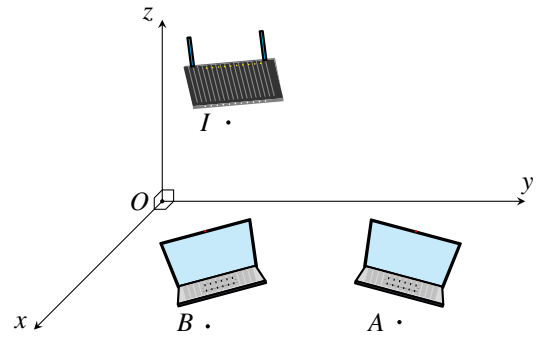
.....

.....

Bài 2.

Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một router phát sóng wifi có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(4; 2; 10)$.

- Cho biết bán kính phủ sóng wifi là 40 m. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.
- Một người sử dụng máy tính tại điểm $M(6; 12; 0)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được sóng wifi của router nói trên hay không?
- Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng máy tính ở điểm $N(14; 6; 50)$.



Bài 3. Cho mặt cầu (S): $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$ và mặt phẳng (P): $2x - y - 2z - 3 = 0$.

- Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S).
- Biết mặt cầu (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho điểm $M(1; -1; 3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$. Khẳng định đúng là

- A. M nằm ngoài (S) .
B. M nằm trong (S) .
C. M nằm trên (S) .
D. M trùng với tâm của (S) .

Câu 2. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$ và ba điểm $O(0; 0; 0)$, $A(1; 2; 3)$, $B(2; -1; -1)$. Trong số ba điểm trên số điểm nằm trên mặt cầu là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 3. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 4 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. (P) tiếp xúc (S) .
B. (P) và (S) không có điểm chung.
C. (P) đi qua tâm của (S) .
D. (P) cắt (S) .

Câu 4. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là $(P): 2x + 2y + z - m^2 + 4m - 5 = 0$; $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$. Giá trị của m để (P) tiếp xúc (S) là

- A. $m = 5$.
B. $m = -1$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 5$.
D. $m = 1$ hoặc $m = -5$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 2 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(2; 1; -1)$ bán kính $R = 2$. Bán kính đường tròn giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là

- A. $r = \sqrt{3}$. B. $r = \sqrt{5}$. C. $r = 1$. D. $r = 3$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 6z + 2 = 0$ cắt mặt phẳng (Oxz) theo một đường tròn có bán kính bằng

- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{2}$. C. 5. D. $4\sqrt{2}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r . Tính r .

- A. $r = 3$. B. $r = 2$. C. $r = 2\sqrt{2}$. D. $r = \sqrt{3}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 12z = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 2 = 0$. Tính diện tích thiết diện của mặt cầu (S) cắt bởi mặt phẳng (P) .

- A. 50π . B. $S = 49\pi$. C. 25π . D. 36π .

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I , cắt (P) theo một đường tròn có bán kính $r = 4$. Mặt cầu (S) có phương trình là

- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 18$.
B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2\sqrt{5}$.
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20$.
D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 20$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ và cắt mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 7 = 0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$.
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 81$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trong mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 16$?

- A. $M(0;7;-3)$. B. $P(1;0;0)$. C. $N(0;4;3)$. D. $Q(1;0;3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $A(3;-1;1)$ và đi qua $M(2;-2;4)$. Phương trình mặt cầu (S) là

- A. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 11$. B. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 11$.
C. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{11}$. D. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{11}$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$. Bán kính của (S) bằng

- A. 9. B. 18. C. $6\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là

- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$. D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. Đường kính của mặt cầu (S) là

- A. 9. B. 3. C. 6. D. 18.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

- A. $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0$.

Câu 7. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có toạ độ là

- A. $\left(-1;0;\frac{3}{2}\right)$. B. $(2;0;-3)$. C. $\left(1;0;\frac{3}{2}\right)$. D. $(-2;0;3)$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(2;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 1. Điểm nào sau đây thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

- A. $P(1;0;0)$. B. $O(0;0;0)$. C. $N(0;1;1)$. D. $M(1;0;3)$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Bán kính R của mặt cầu (S) bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. 9. C. $3\sqrt{3}$. D. 3.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 2$ có dạng

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$. D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, tìm m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + 4z - m = 0$ là phương trình của mặt cầu.

- A. $m \leq \frac{21}{4}$. B. $m > \frac{21}{4}$. C. $m \geq \frac{21}{4}$. D. $m < \frac{21}{4}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính R bằng

- A. $a^2 + b^2 + c^2 + d$. B. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d}$. C. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. D. $a^2 + b^2 + c^2 - d$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
 b) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 0; -1)$ và bán kính $R = 1$.
 c) Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu (S) .
 d) Phương trình mặt cầu tâm $I(2; 0; -1)$ và tiếp xúc mặt phẳng (P) là: $(S'): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + \frac{7}{3} = 0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$.

- a) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 7$.
 b) Điểm $A(1; 4; 2)$ nằm trên mặt cầu (S) .
 c) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 2)$.
 d) Mặt cầu (S) còn có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 49 = 0$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y + 1 = 0$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 4; 0)$.
 b) Mặt cầu (S) còn có phương trình: $(S): (x+1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 16$.
 c) Điểm $M(0; 3; 4)$ nằm bên ngoài mặt cầu (S) .
 d) Mặt cầu (S) có bán kính $R = 4$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$.

- a) Bán kính của mặt cầu (S_4) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là $R = \sqrt{26}$.
 b) Mặt cầu (S_1) tâm A , bán kính $R = 1$ có phương trình là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 1$.
 c) Bán kính của mặt cầu (S_2) có tâm là A và đi qua điểm C là $\sqrt{50}$.
 d) Mặt cầu (S_3) nhận AB làm đường kính có phương trình là: $(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

KQ:

--	--	--	--

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki-lô-mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $(-64; 128; 64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa và một máy bay M nằm trong mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1458 = 0$ sao cho hai máy bay M, N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M, N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến

hàng đơn vị)

KQ:

Câu 3. Một vỏ kem ốc quế là một loại bánh khô, hình nón (N) trong không gian $Oxyz$, thường được làm bằng một chiếc bánh xốp dùng để đặt kem vào và cầm ăn mà không cần bát hoặc muỗng. Người ta thả vào vỏ kem (N) một viên kem vani hình cầu có đỉnh hai viên socola nhỏ tại hai vị trí $A(2; 1; 3)$ và $B(6; 5; 5)$ sao cho đường kính AB có B là tâm đường tròn đáy khối nón. Khi thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất thì mặt phẳng qua đỉnh S của khối nón (N) và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = b + c + d$.

KQ:

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}. \text{ Gọi } M(a; b; c) \text{ với } a < 0 \text{ là điểm thuộc đường thẳng } d \text{ sao cho từ } M \text{ kẻ được ba tiếp}$$

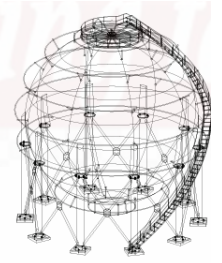
tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) (A, B, C là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$; $\widehat{BMC} = 90^\circ$; $\widehat{CMA} = 120^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

KQ:

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki-lô-mét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu đặt tại điểm $I(1; 2; 2)$ biết rằng bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Hai người sử dụng điện thoại lần lượt tại $M(4; -4; 2)$ và $N(6; 0; 6)$. Gọi $E(a; b; c)$ với $a < 0$ là một điểm thuộc ranh giới vùng phủ sóng của trạm sao cho tổng khoảng cách từ E đến vị trí M và N lớn nhất. Tính $T = a + b + c$.

KQ:

Câu 6. Người ta muốn thiết kế một bồn chứa khí hoá lỏng hình cầu bằng phần mềm 3D (tham khảo hình vẽ). Cho biết phương trình bề mặt của bồn chứa là (S): $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$. Phương trình mặt phẳng chứa nắp là (P): $z - 6 = 0$. Tính khoảng cách từ tâm bồn chứa đến mặt phẳng chứa nắp.

KQ: 

—HẾT—

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

§ 1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa xác suất có điều kiện

- ✓ **Định nghĩa:** Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A , tính trong điều kiện biết rằng biến cố B đã xảy ra, được gọi là xác suất của A với điều kiện B và kí hiệu là $P(A | B)$.
- ✓ **Công thức tính:** Cho hai biến cố A và B bất kì, với $P(B) > 0$. Khi đó

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

2 Công thức nhân xác suất

- ✓ **Định nghĩa:** Với hai biến cố A và B bất kì, ta có

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A | B)$$

Công thức trên được gọi là *công thức nhân xác suất*.

- ✓ **Chú ý:**

- ① Vì $AB = BA$ nên với hai biến cố A và B bất kì, ta cũng có

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B | A)$$

- ② Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Ôn tập công thức tính xác suất cổ điển. Các quy tắc tính xác suất

🔑 **Công thức tính:** Cho phép thử T có không gian mẫu là Ω . Giả thiết rằng các kết quả có thể của T là đồng khả năng. Khi đó, nếu E là một biến cố liên quan phép thử T thì xác suất của E được cho bởi công thức

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Trong đó, $n(\Omega)$ và $n(E)$ lần lượt là số phần tử của tập không gian mẫu Ω và tập biến cố E .

✓ Nhận xét:

- $0 \leq P(E) \leq 1$, với mọi biến cố E .
- Với biến cố chắc chắn (là tập Ω), ta có $P(\Omega) = 1$.
- Với biến cố không thể (là tập $\emptyset$), ta có $P(\emptyset) = 0$.

👉 **Quy tắc nhân xác suất:** Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(AB) = P(A)P(B)$.

👉 **Quy tắc cộng xác suất:** Cho hai biến cố A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ Bài 1. Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 3 lần. Tính xác suất của biến cố sau:

- A: “Số chấm xuất hiện trong 3 lần gieo giống nhau”.
- B: “Tích số chấm xuất hiện trong 3 lần gieo là số lẻ”.
- C: “Tổng số chấm xuất hiện trong 3 lần gieo là 5”.

Bài 2. Trong một hộp kín có 18 quả bóng khác nhau: 9 trắng, 6 đen, 3 vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đồng thời 5 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A : “5 quả bóng cùng màu”.
- b) B : “5 quả bóng có đủ 3 màu”.
- c) C : “5 quả bóng không có màu trắng”.

Bài 3. Xếp ngẫu nhiên 5 người A, B, C, D, E vào một cái bàn dài có 5 chỗ ngồi.

- a) Tính xác suất để bạn A và B ngồi chính giữa.
- b) Tính xác suất để hai người A và B ngồi đầu bàn.

Bài 4. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có hai chữ số. Xét các biến cố

- A : “Số được chọn chia hết cho 5”
- B : “Số được chọn chia hết cho 7”.

Tính $P(A \cup B)$.

- A: “Cả hai đội Tín Phát và An Bình lọt vào vòng chung kết”.
- B: “Có ít nhất một đội lọt vào vòng chung kết”.
- C: “Chỉ có đội Tín Phát lọt vào vòng chung kết”.

[illegible]

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Lớp 11B có 20 nam và 25 nữ. Chọn ngẫu nhiên hai học sinh để làm trực nhật. Xác suất để trong đó có ít nhất một nam là

- A. $\frac{20}{33}$. B. $\frac{23}{33}$. C. $\frac{25}{33}$. D. $\frac{1}{20}$.

Câu 2. Một hội nghị có 15 nam và 10 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 người vào ban tổ chức. Xác suất để trong ban tổ chức có nhiều hơn hai người nam là

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{91}{460}$.

Câu 3. Một bình chứa 6 viên bi màu, trong đó có 2 bi xanh, 2 bi đỏ, 2 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Xác suất để lấy được 2 viên bi trắng là

- A. $\frac{1}{15}$. B. $\frac{2}{15}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{4}{15}$.

Câu 4. Một bình chứa 6 viên bi màu, trong đó có 2 bi xanh, 2 bi đỏ, 2 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Xác suất để lấy được 2 viên bi khác màu là

- A. $\frac{1}{15}$. B. $\frac{2}{15}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{4}{15}$.

Câu 5. Một thùng có 7 sản phẩm, trong đó có 4 sản phẩm loại I và 3 sản phẩm loại II. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Xác suất để lấy được 2 sản phẩm cùng loại là

- A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{4}{7}$.

Câu 6. Một hộp chứa 2 bi xanh, 3 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 bi. Xác suất để có ít nhất một bi xanh là

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{10}$. C. $\frac{9}{10}$. D. $\frac{4}{5}$.

Câu 7. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X . Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ.

- A. $\frac{10}{21}$. B. $\frac{25}{49}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $13/25$.

Câu 8. Gọi A là tập các số có 6 chữ số khác nhau được tạo ra từ các số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Từ A chọn ngẫu nhiên một số, xác suất số đó có số 3 và 4 đứng cạnh nhau là

- A. $\frac{8}{25}$. B. $\frac{4}{15}$. C. $\frac{4}{25}$. D. $\frac{2}{15}$.

Câu 9. Gọi tập A là tập các số có 6 chữ số khác nhau được lập từ các số $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ A chọn ra một số, xác suất số đó bé hơn 432000 là

- A. $\frac{17}{30}$. B. $\frac{17}{40}$. C. $\frac{23}{40}$. D. $\frac{13}{30}$.

Câu 10. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{35}$. C. $\frac{17}{35}$. D. $\frac{18}{35}$.

Câu 11. Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5; có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp, tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số.

- A. $\frac{8}{33}$. B. $\frac{14}{33}$. C. $\frac{29}{66}$. D. $\frac{37}{66}$.

Câu 12. Cho $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Biết A, B là hai biến cố xung khắc, thì $P(B)$ bằng

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 13. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(AB) = 0,2$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- A. 0,6. B. 0,7. C. 0,8. D. 0,9.

Câu 14. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển lấy ra có ít nhất 1 quyển là môn toán.

- A. $\frac{2}{7}$. B. $\frac{1}{21}$. C. $\frac{37}{42}$. D. $\frac{5}{42}$.

Câu 15. Một hộp chứa sáu quả cầu trắng và bốn quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả. Tính xác suất sao cho có ít nhất một quả màu trắng?

- A. $\frac{209}{210}$. B. $\frac{8}{105}$. C. $\frac{1}{21}$. D. $\frac{1}{210}$.

Câu 16. Xác suất thực hiện thành công một thí nghiệm là 0,7. Thực hiện thí nghiệm đó 2 lần liên tiếp một cách độc lập với nhau. Xác suất của biến cố "Cả 2 lần thí nghiệm đều thành công" là

- A. 0,7. B. 0,21. C. 0,49. D. 1,4.

Câu 17. Trong phòng làm việc có hai máy tính hoạt động độc lập với nhau, khả năng hoạt động tốt trong ngày của hai máy này tương ứng là 0,75 và 0,85. Xác suất để cả hai máy hoạt động không tốt trong ngày là

- A. 0,0675. B. 0,0375. C. 0,0575. D. 0,0475.

Câu 18. Trong nhóm 60 học sinh có 30 học sinh thích học Toán, 25 học sinh thích học Lý và 10 học sinh thích cả Toán và Lý. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ nhóm này. Xác suất để được học sinh này thích học ít nhất là một môn Toán hoặc Lý?

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 19. Một lớp học gồm 50 bạn, trong đó có 20 bạn thích chơi bóng đá, 28 bạn thích chơi bóng rổ và 8 bạn thích chơi cả hai môn. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Xác suất của biến cố "Bạn được gặp thích chơi bóng đá hoặc bóng rổ" là

- A. 0,16. B. 0,96. C. 0,48. D. 0,8.

Câu 20. Một hộp đựng 10 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 15 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 15. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ trong hộp. Gọi A là biến cố "Viên bi lấy ra có màu đỏ", B là biến cố "Viên bi lấy ra ghi số chẵn". Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- A. 0,4. B. 0,88. C. 0,48. D. 0,68.

Cho hai biến cố A và B bất kì, với $P(B) > 0$. Khi đó

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Ông Hải rút ngẫu nhiên 1 lá bài từ bộ bài tây 52 lá. Gọi A là biến cố “Lá bài được chọn là lá K” và B là biến cố “Lá bài được chọn là chất cơ”. Tính $P(A)$, $P(A | B)$ và $P(A | \bar{B})$.

Bài 2. Một hộp chứa 15 thẻ cùng loại được ghi số từ 1 đến 15. Các thẻ có số từ 1 đến 10 được sơn màu đỏ, các thẻ còn lại được sơn màu xanh. Bạn Việt chọn ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp.

- Tính xác suất để thẻ được chọn có màu đỏ, biết rằng nó được ghi số chẵn. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.
- Tính xác suất để thẻ được chọn ghi số chẵn, biết rằng nó có màu xanh.

Bài 3. Một hộp có 5 viên bi cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 3 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 viên bi và không hoàn lại. Tính xác suất để lấy được viên bi thứ hai có màu xanh, biết rằng viên bi thứ nhất có màu đỏ.

Bài 4. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 3 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thanh lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi lấy ra ở lần thứ hai là viên bi đỏ, biết viên bi lấy ra ở lần thứ nhất là viên bi xanh.

Bài 5. Một lớp học có 40% học sinh là nam. Số học sinh nữ bị cận thị chiếm 20% số học sinh trong lớp. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của lớp. Tính xác suất học sinh đó bị cận thị, biết rằng đó là học sinh nữ. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Một hộp chứa 4 quả bóng được đánh số từ 1 đến 4. An lấy ngẫu nhiên một quả bóng, bỏ ra ngoài, rồi lấy tiếp một quả bóng nữa. Xét các biến cố:

- A : "Quả bóng lấy ra lần đầu là số chẵn"
- B: "Quả bóng lấy ra lần hai là số lẻ".

Xác định biến cố $C = B | A$: "biến cố B với điều kiện biết A đã xảy ra".

- A. $B | A = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}$.
 B. $B | A = \{(2, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.
 C. $B | A = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3)\}$.
 D. $B | A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

Câu 2. Từ một hộp có 4 viên bi xanh cùng kích thước và khối lượng được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Bạn Phúc lấy ra một cách ngẫu nhiên một viên bi từ hộp, bỏ viên bi đó ra ngoài và lại lấy ra một cách ngẫu nhiên thêm một viên bi nữa. Xét biến cố A là "viên bi lấy ra lần thứ hai ghi số lẻ". Số các kết quả thuận lợi của biến cố A là

- A. 8. B. 6. C. 4. D. 2.

Câu 3. Từ một hộp có 4 tấm thẻ cùng loại được ghi số lần lượt từ 1 đến 4. Bạn Tiên lấy ra một cách ngẫu nhiên một thẻ từ hộp, bỏ thẻ đó ra ngoài và lại lấy ra một cách ngẫu nhiên thêm một thẻ nữa. Xét biến cố A là "thẻ lấy ra lần thứ nhất ghi số 1". Số các kết quả thuận lợi của biến cố A là

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 4. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $P(A) = 0,2024, P(B) = 0,2025$. Tính $P(A | B)$.

- A. 0,7976. B. 0,7975. C. 0,2025. D. 0,2024.

Câu 5. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố độc lập, với $P(A) = 0,2024, P(B) = 0,2025$. Tính $P(B | \bar{A})$.

- A. 0,7976. B. 0,7975. C. 0,2025. D. 0,2024.

Câu 6. Cho hai biến cố A và B, với $P(A) = 0,6, P(B) = 0,7, P(A \cap B) = 0,3$. Tính $P(A | B)$.

- A. $\frac{3}{7}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 7. Cho hai biến cố A và B, với $P(A) = 0,6, P(B) = 0,7, P(A \cap B) = 0,3$. Tính $P(\bar{B} | A)$.

- A. $\frac{3}{7}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 8. Câu lạc bộ cờ của nhà trường gồm 35 thành viên, mỗi thành viên biết chơi ít nhất một trong hai môn cờ vua hoặc cờ tướng. Biết rằng có 25 thành viên biết chơi cờ vua và 20 thành viên biết chơi cờ tướng. Chọn ngẫu nhiên 1 thành viên của câu lạc bộ. Tính xác suất thành viên được chọn biết chơi cờ vua, biết rằng thành viên đó biết chơi cờ tướng.

- A. 0,3. B. 0,4. C. 0,5. D. 0,6.

Câu 9. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 25 bạn học sinh đạt điểm giỏi môn Toán, 14 bạn học sinh đạt điểm giỏi môn Lý và 4 bạn học sinh không đạt điểm giỏi cả hai môn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp học này. Xác suất để học sinh được chọn giỏi môn Toán, biết rằng học sinh đó giỏi môn Lý là

- A. $\frac{7}{20}$. B. $\frac{1}{7}$. C. $\frac{14}{37}$. D. $\frac{1}{10}$.

Câu 10. Trong hộp có 3 viên bi màu trắng và 7 viên bi màu đỏ. Lấy lần lượt mỗi lần một viên theo cách lấy không trả lại. Xác suất để viên bi lấy lần thứ hai là màu đỏ nếu biết rằng viên bi lấy lần thứ nhất cũng là màu đỏ là

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 11. Một hộp chứa 5 viên bi đỏ được ghi số từ 1 đến 5; 6 viên bi xanh được ghi số từ 1 đến 6. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thái chọn ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp. Tính xác suất để viên bi được chọn ghi số 1, biết rằng nó có màu xanh. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

- A. 0,21. B. 0,17. C. 0,50. D. 0,32.

Câu 12. Một hộp chứa 5 viên bi đỏ được ghi số từ 1 đến 5; 6 viên bi xanh được ghi số từ 1 đến 6. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thái chọn ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp. Tính xác suất để viên bi được chọn có màu xanh, biết rằng nó được ghi số chẵn.

- A. 0,2. B. 0,6. C. 0,5. D. 0,7.

Câu 13. Hộp thứ nhất chứa 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 2 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Thanh lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi lấy ra ở lần thứ hai là viên bi đỏ, biết viên bi lấy ra ở lần thứ nhất là viên bi xanh.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 14. Hộp thứ nhất chứa 6 viên bi đánh số từ 1 đến 6. Hộp thứ hai chứa 8 viên bi đánh số từ 7 đến 11. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Phong lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ nhất bỏ vào hộp thứ hai, sau đó lại lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp thứ hai. Tính xác suất để viên bi lấy ra ở lần thứ hai là viên bi đánh số lẻ, biết viên bi lấy ra ở lần thứ nhất là viên bi đánh số chẵn.

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 15. Trong hộp có 20 nắp khoen bia Tiger, trong đó có 2 nắp ghi "Chúc mừng bạn đã trúng thưởng xe Camry". Bạn Minh Hiền được chọn lên rút thăm lần lượt hai nắp khoen, xác suất để cả hai nắp đều trúng thưởng là

- A. $\frac{1}{20}$. B. $\frac{1}{19}$. C. $\frac{1}{190}$. D. $\frac{1}{10}$.

Câu 16. Áo sơ mi An Phước trước khi xuất khẩu sang Mỹ phải qua 2 lần kiểm tra, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất, và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra đầu sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tìm xác suất để 1 chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu?

- A. $\frac{95}{98}$. B. $\frac{931}{1000}$. C. $\frac{95}{100}$. D. $\frac{98}{100}$.

Câu 17. Trong một kỳ thi, có 60% học sinh đã làm đúng bài toán đầu tiên và 40% học sinh đã làm đúng bài toán thứ hai. Biết rằng có 20% học sinh làm đúng cả hai bài toán. Xác suất để một học sinh làm đúng bài toán thứ hai biết rằng học sinh đó đã làm đúng bài toán đầu tiên là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 0,53. B. 0,33. C. 0,26. D. 0,67.

Câu 18. Một lô sản phẩm có 30 sản phẩm, trong đó có 4 chất lượng thấp. Lấy liên tiếp hai sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp.

- A. $\frac{3}{29}$. B. $\frac{1}{10}$. C. $\frac{4}{30}$. D. $\frac{2}{15}$.

Trên sơ đồ hình cây:

- Xác suất của các nhánh trong sơ đồ hình cây từ đỉnh thứ hai là xác suất có điều kiện.
- Xác suất xảy ra của mỗi kết quả bằng tích các xác suất trên các nhánh của cây đi đến kết quả đó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

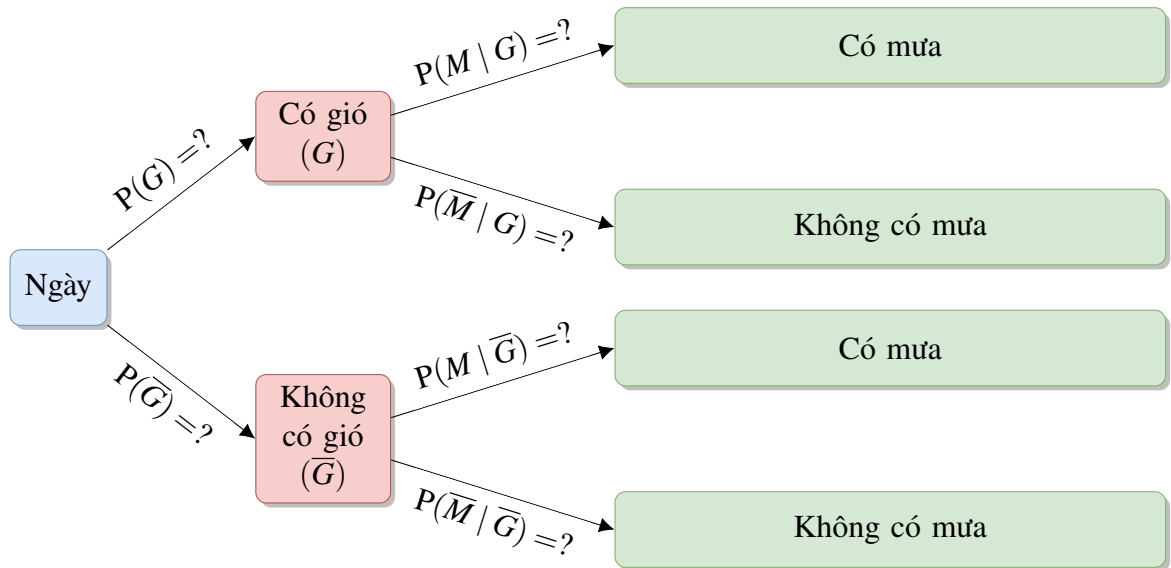
Bài 1. Một hộp có 8 bi màu đỏ và 5 viên bi màu vàng; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Có 5 viên bi trong hộp được đánh số, trong đó có 3 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để viên bi được lấy ra, có màu đỏ, biết rằng viên bi đó được đánh số.

Bài 2. Ở một sân bay, người ta sử dụng một loại máy soi tự động phát hiện hàng cấm trong hành lý kí gửi. Máy phát chuông cảnh báo với 95% các kiện hành lý có chứa hàng cấm và 2% các kiện hành lý không chứa hàng cấm. Tỷ lệ các kiện hành lý có chứa hàng cấm là 1%. Chọn ngẫu nhiên một kiện hành lý để soi bằng máy trên. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

- M : “Kiện hành lý có chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo”;
- N : “Kiện hành lý không chứa hàng cấm và máy phát chuông cảnh báo”.

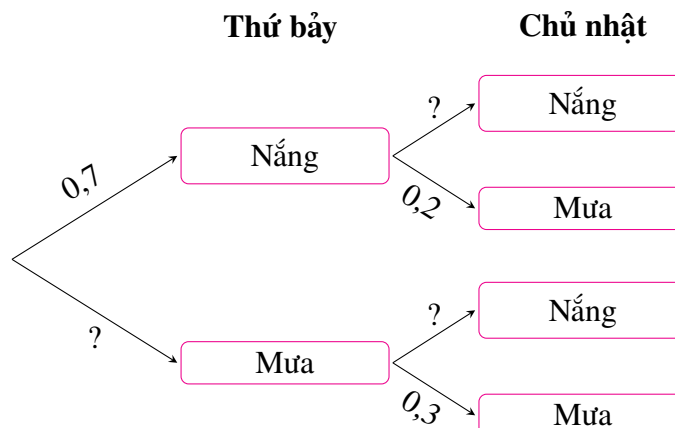
Bài 3. Theo kết quả từ trạm nghiên cứu khí hậu tại địa phương T , xác suất để một ngày có gió là 0,6; nếu ngày có gió thì xác suất có mưa là 0,4; nếu ngày không có gió thì xác suất có mưa là 0,2. Gọi G là biến cố “Ngày có gió” và M là biến cố “Ngày có mưa”.

a) Vẽ lại sơ đồ hình cây sau và điền vào ô? các giá trị xác suất tương ứng.



b) Tính xác suất $P(GM)$ và $P(G\bar{M})$. Nêu ý nghĩa của các xác suất này.

Bài 4. Bạn Việt chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 20%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 30%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0,7. Hãy tìm các giá trị thích hợp thay vào ? ở sơ đồ hình cây sau:



Với hai biến cố A và B bất kì, ta có

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A | B).$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hai biến cố A và B có $P(A) = 0,3; P(B) = 0,5$ và $P(A | B) = 0,4$. Tính $P(\overline{AB})$ và $P(\overline{A} | B)$.

Bài 2. Trong một hộp kín có 7 chiếc bút bi xanh và 5 chiếc bút bi đen, các chiếc bút có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một chiếc bút bi từ trong hộp, không trả lại. Sau đó bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một trong 11 chiếc bút còn lại. Tính xác suất để Sơn lấy được bút bi đen và Tùng lấy được bút bi xanh.

Bài 3. Một lô sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm chất lượng thấp. Lấy liên tiếp 2 sản phẩm trong lô sản phẩm trên, trong đó sản phẩm lấy ra ở lần thứ nhất không được bỏ lại vào lô sản phẩm. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai biến cố A và B có $P(B) = 0,6$ và $P(A|B) = 0,5$. Giá trị của $P(AB)$ là

- A. 0.3. B. 0.4. C. 0.5. D. 0.2.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B có $P(B) = 0,6$ và $P(A|B) = 0,5$. Giá trị của $P(\overline{AB})$ là

- A. 0.3. B. 0.4. C. 0.5. D. 0.2.

Câu 3. Một nhóm 5 học sinh nam và 4 học sinh nữ tham gia lao động trên sân trường. Cô giáo chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 bạn trong nhóm đi tưới cây. Tính xác suất để hai bạn được chọn có cùng giới tính, biết rằng có ít nhất 1 bạn nam được chọn.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 4. Công ty nước giải khát X tổ chức một chương trình khuyến mại như sau: Trong mỗi thùng 24 chai nước giải khát đều có hai chai trúng thưởng (giải thưởng được viết ở dưới nắp chai), người tham gia chương trình được mở nắp một cách ngẫu nhiên lần lượt hai chai trong một thùng. Tính xác suất để một người tham gia chương trình mở được cả hai chai đều trúng thưởng.

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{276}$. C. $\frac{1}{46}$. D. $\frac{1}{23}$.

Câu 5. Bạn Nam chuẩn bị đi tham quan một hòn đảo trong hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật. Ở hòn đảo đó, mỗi ngày chỉ có nắng hoặc mưa, nếu một ngày là nắng thì khả năng xảy ra mưa ở ngày tiếp theo là 10%, còn nếu một ngày là mưa thì khả năng ngày hôm sau vẫn mưa là 40%. Theo dự báo thời tiết, xác suất trời sẽ nắng vào thứ Bảy là 0,7. Xác suất trời mưa cả hai ngày thứ Bảy và Chủ nhật là

- A. 0,03. B. 0,06. C. 0,12. D. 0,18.

Câu 6. Công ty nước giải khát X tổ chức một chương trình khuyến mại như sau: Trong mỗi thùng 24 chai nước giải khát đều có hai chai trúng thưởng (giải thưởng được viết ở dưới nắp chai), người tham gia chương trình được mở nắp một cách ngẫu nhiên lần lượt hai chai trong một thùng. Tính xác suất để một người tham gia chương trình mở được cả hai chai đều trúng thưởng.

- A. $\frac{3}{19}$. B. $\frac{1}{23}$. C. $\frac{3}{23}$. D. $\frac{1}{19}$.

Câu 7. An có một túi gồm một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu, trong đó có 6 chiếc kẹo sô-cô-la đen, còn lại là 4 chiếc kẹo sô-cô-la trắng. An lấy ngẫu nhiên 1 chiếc kẹo trong túi để cho Bình, rồi lại lấy ngẫu nhiên tiếp 1 chiếc kẹo nữa trong túi và cũng đưa cho Bình. Xác suất để Bình nhận được 2 chiếc kẹo sô-cô-la đen là

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{3}{7}$.

Câu 8. Một doanh nghiệp trước khi xuất khẩu áo sơ mi phải qua hai lần kiểm tra chất lượng sản phẩm, nếu cả hai lần đều đạt thì chiếc áo đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất và 95% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ nhất sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Tính xác suất để một chiếc áo sơ mi đủ tiêu chuẩn xuất khẩu (làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 0,98. B. 0,95. C. 0,93. D. 0,94.



PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một rổ đựng 10 quả táo và 8 quả cam. Bạn An lấy ngẫu nhiên một quả (không hoàn lại), sau đó bạn Uyên lấy ngẫu nhiên một quả. Xác suất bạn Uyên lấy được một quả cam bằng bao nhiêu, biết rằng bạn An lấy được một quả táo (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

- A. 0,44. B. 0,56. C. 0,59. D. 0,47.

Câu 2. Một công ty đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu dự án 1, dự án 2 lần lượt là 0,4 và 0,7. Nếu công ty thắng thầu dự án 1 thì xác suất công ty thắng thầu dự án 2 bằng bao nhiêu?

- A. 0,6. B. 0,7. C. 0,5. D. 0,4.

Câu 3. Gieo con xúc xắc một lần. Gọi A là biến cố xuất hiện mặt 2 chấm, B là biến cố xuất hiện mặt chẵn. Giá trị của $P(A|B)$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 4. Một công ty đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu dự án 1, dự án 2 lần lượt là 0,4 và 0,7. Khả năng thắng thầu cả 2 dự án là 0,3. Nếu công ty thắng thầu dự án 1 thì xác suất công ty thắng thầu dự án 2 bằng bao nhiêu?

- A. 0,3. B. 0,6. C. 0,75. D. 0,5.

Câu 5. Cho hai biến cố A, B . Biết $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,6$; $P(A|B) = 0,3$. Giá trị của $P(AB)$ bằng

- A. 0,12. B. 0,18. C. 0,24. D. 0,5.

Câu 6. Một phụ nữ sinh hai người con. Xác suất để cả hai là con trai bằng bao nhiêu biết rằng người phụ nữ đó có ít nhất một người con trai?

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 7. Cho A, B là hai biến cố độc lập. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $P(A|B) = P(A)$. B. $P(B|A) = P(B)$. C. $P(A|\bar{B}) = P(A)$. D. $P(\bar{A}|B) = P(B)$.

Câu 8. Một gia đình có 2 đứa trẻ. Biết rằng có ít nhất 1 đứa trẻ là con gái. Hỏi xác suất 2 đứa trẻ đều là con gái là bao nhiêu, biết xác suất để một đứa trẻ là trai hoặc gái là bằng nhau?

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{9}{17}$. C. $\frac{9}{16}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 9. Cho hai biến cố A, B . Biết $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,6$; $P(AB) = 0,2$. Giá trị của $P(A|B)$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 10. Từ một hộp chứa 3 quả cầu đỏ và 7 quả cầu xanh, ông An lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu thì thấy có quả cầu đỏ. Xác suất ông An lấy được quả cầu xanh bằng

- A. 0,75. B. 0,4. C. 0,875. D. 0,5.

Câu 11. Cho hai biến cố A, B . Biết $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,6$; $P(AB) = 0,2$. Khi đó $P(B|A)$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 12. Gieo con xúc xắc một lần. Gọi A là biến cố xuất hiện mặt có số chấm là số nguyên tố, B là biến cố xuất hiện mặt lẻ. Giá trị của $P(A|B)$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hai biến cố A và B với $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,7$; $P(AB) = 0,3$.

- a) $P(B|A) = \frac{6}{7}$. b) $P(\overline{AB}) = \frac{2}{5}$. c) $P(\overline{B}|A) = \frac{1}{2}$. d) $P(A|B) = \frac{3}{7}$.

Câu 2. Một công ty xây dựng đấu thầu 2 dự án độc lập. Khả năng thắng thầu của dự án 1 là 0,6 và dự án 2 là 0,7.

- a) Nếu công ty không thắng thầu dự án 1 thì xác suất để công ty thắng thầu dự án 2 là 0,7.
b) Xác suất để công ty thắng thầu cả 2 dự án là 1.
c) Xác suất công ty thắng thầu đúng 1 dự án là 0,46.
d) Biết công ty thắng thầu dự án 1, xác suất để công ty thắng thầu dự án 2 là 0,42.

Câu 3. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất 1 lần. Xét các biến cố:

A : “Mặt xuất hiện của xúc xắc ghi số 5”;

B : “Mặt xuất hiện của xúc xắc ghi số lẻ”.

- a) $P(A) = \frac{5}{6}$. b) $P(A|B) = \frac{1}{2}$. c) $P(B|A) = 1$. d) $P(AB) = \frac{1}{6}$.

Câu 4. Một lớp có 30 học sinh gồm 17 học sinh nữ và 13 học sinh nam. Có 3 bạn tên Hiền, trong đó có 1 bạn nữ và 2 bạn nam. Gọi ngẫu nhiên 1 bạn lên bảng.

- a) Nếu thầy giáo gọi bạn tên Hiền lên bảng thì xác suất để bạn đó là nữ bằng $\frac{3}{17}$.
b) Xác suất để có bạn tên Hiền bằng $\frac{1}{10}$.
c) Xác suất để có tên Hiền và bạn đó là nam bằng $\frac{2}{13}$.
d) Xác suất để có tên Hiền và bạn đó là nữ bằng $\frac{3}{17}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Bạn Minh làm hai bài tập kế tiếp. Xác suất Minh làm đúng bài thứ nhất là 0,7. Nếu Minh làm đúng bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,8 nhưng nếu Minh làm sai bài thứ nhất thì khả năng làm đúng bài thứ hai là 0,2. Tính xác suất để Minh làm đúng bài thứ nhất biết rằng Minh làm đúng bài thứ hai (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

KQ:

--	--	--	--

Câu 2. Một sản phẩm xuất khẩu sang Mỹ phải qua 2 lần kiểm tra, nếu cả 2 lần đều đạt thì sản phẩm đó mới đủ tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 98% sản phẩm làm ra qua được lần kiểm tra thứ nhất và 95% số sản phẩm qua lần kiểm tra đầu tiên sẽ tiếp tục qua được lần kiểm tra thứ hai. Xác suất để sản phẩm đó đủ tiêu chuẩn xuất khẩu là $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của $b - a$ bằng bao nhiêu?

KQ:

--	--	--	--

Câu 3. Một công ty đấu thầu hai dự án. Khả năng thắng thầu của các dự án 1 là 0,4 và dự án 2 là 0,5. Khả năng thắng thầu của cả hai dự án là 0,3. Tính xác suất để công ty thắng dự án 2 biết công ty không thắng thầu dự án 1 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

Câu 4. Một hộp chứa 6 bi trắng và 2 bi đỏ. Bốc lần lượt từng bi, không hoàn lại. Giả sử lần đầu bốc được bi trắng. Xác suất để lần hai bốc được bi đỏ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần

trăm)?

KQ:

--	--	--	--

Câu 5. Khảo sát một câu lạc bộ thể thao của trường THPT X gồm các bạn thích chơi bộ môn bóng chuyền hoặc bộ môn bóng rổ, người ta thấy có 64% số học sinh thích chơi bóng chuyền, 49% học sinh thích chơi bóng rổ và 26% học sinh thích chơi cả hai bộ môn. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong nhóm khảo sát. Tính xác suất để học sinh được chọn thích chơi bóng chuyền biết bạn học sinh đó thích chơi bóng rổ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

Câu 6. Một doanh nghiệp xuất khẩu quả sầu riêng sau khi thu mua tại các nhà vườn đạt các tiêu chuẩn về vệ sinh an toàn thực phẩm sẽ tiếp tục thực hiện hai lần kiểm tra chất lượng sản phẩm, nếu cả hai lần kiểm tra đều đạt thì trái sầu riêng đó mới đạt tiêu chuẩn xuất khẩu. Biết rằng bình quân 97% sản phẩm qua được lần kiểm tra thứ nhất và 94% sản phẩm đã qua được lần kiểm tra thứ nhất qua được lần kiểm tra thứ hai. Tính xác suất để một quả sầu riêng đủ tiêu chuẩn xuất khẩu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

--	--	--	--

—HẾT—

§2. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN – CÔNG THỨC BAYES



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B là hai biến cố tùy ý. Khi đó

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$$

2 Công thức Bayes

Cho hai biến cố A và B với $P(A) > 0$. Khi đó

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

Công thức Bayes còn được viết dưới dạng $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})}$.

CHÚ Ý

☑ **Chú ý 1:** Các công thức cần nhớ

① $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

② $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$.

③ $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$.

④ $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$.

☑ **Chú ý 2:** Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm nhiều giai đoạn có sự liên đới nhau trong quá trình xảy ra.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B là hai biến cố tùy ý. Khi đó

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ **Bài 1.** Cho hai biến cố A, B với $P(B) = 0,6$; $P(A|B) = 0,7$ và $P(A|\bar{B}) = 0,4$. Tính $P(A)$.

Bài 2. Cho hai biến cố A, B sao cho $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$; $P(B | \bar{A}) = 0,3$. Tính $P(B|A)$.

Bài 3. Người ta khảo sát khả năng chơi nhạc cụ của một nhóm học sinh nam nữ tại một trường phổ thông H. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong nhóm đó. Gọi

- A là biến cố "học sinh được chọn biết chơi ít nhất một nhạc cụ",
- B là biến cố "học sinh được chọn là nam".

Biết xác suất học sinh được chọn là nam bằng 0,6 ; xác suất học sinh được chọn là nam và biết chơi ít nhất một nhạc cụ là 0,3 ; xác suất học sinh được chọn là nữ và biết chơi ít nhất một nhạc cụ là 0,15. Tính $P(A)$.

Bài 4. Số khán giả đến xem buổi biểu diễn ca nhạc ngoài trời phụ thuộc vào thời tiết. Giả sử, nếu trời không mưa thì xác suất để bán hết vé là 0,9; còn nếu trời mưa thì xác suất để bán hết vé chỉ là 0,4. Dự báo thời tiết cho thấy xác suất để trời mưa vào buổi biểu diễn là 0,75. Nhà tổ chức sự kiện quan tâm đến xác suất để bán được hết vé là bao nhiêu. Gọi A là biến cố "Trời mưa" và B là biến cố "Bán hết vé" trong tình huống.

- Tính $P(A), P(\bar{A}), P(B | A), P(B | \bar{A})$.
- Tính xác suất để nhà tổ chức sự kiện bán hết vé.

Bài 5. Trong một kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 80% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,6; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Tính xác suất để học sinh đó đỗ đại học.

Bài 6. Một loại linh kiện do hai nhà máy số I, số II cùng sản xuất. Tỷ lệ phế phẩm của các nhà máy I, II lần lượt là 4%; 3%. Trong một lô linh kiện để lẫn lộn 80 sản phẩm của nhà máy số I và 120 sản phẩm của nhà máy số II. Một khách hàng lấy ngẫu nhiên một linh kiện từ lô hàng đó. Tính xác suất để linh kiện được lấy ra là linh kiện tốt.

Bài 7. Người ta khảo sát khả năng chơi nhạc cụ của một nhóm học sinh tại trường X. Nhóm này có 60% học sinh là nam. Kết quả khảo sát cho thấy có 20% học sinh nam và 15% học sinh nữ biết chơi ít nhất một nhạc cụ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm này. Tính xác suất để chọn được học sinh biết chơi ít nhất một nhạc cụ.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(B|A) = \frac{1}{3}$; $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P(B)$ là

- A. $\frac{19}{60}$. B. $\frac{17}{60}$. C. $\frac{9}{20}$. D. $\frac{7}{30}$.

Câu 2. Cho hai biến cố A, B với $P(B) = 0,6$; $P(A|B) = 0,7$ và $P(A|\bar{B}) = 0,4$. Khi đó, $P(A)$ bằng

- A. 0,7. B. 0,4. C. 0,58. D. 0,52.

Câu 3. Cho A, B là các biến cố thỏa mãn $P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 0,35$, $P(A) = 0,25$, $P(B|A) = 0,8$. Giá trị của $P(B)$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{7}{15}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 4. Tỷ lệ người dân đã tiêm vắc xin phòng bệnh A ở một địa phương là 65%. Trong số những người đã tiêm phòng, tỷ lệ mắc bệnh A là 5% còn trong số những người chưa tiêm, tỷ lệ mắc bệnh A là 17%. Gặp ngẫu nhiên một người ở địa phương đó. Xác suất người đó mắc bệnh A là

- A. 0,0325. B. 0,018. C. 0,092. D. 0,0525.

Câu 5. Một nhà máy có hai phân xưởng I và II. Phân xưởng I sản xuất 40% số sản phẩm và phân xưởng II sản xuất 60% số sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của phân xưởng I là 2% và của phân xưởng II là 1%. Kiểm tra ngẫu nhiên 1 sản phẩm của nhà máy và xác suất để sản phẩm đó bị lỗi là

- A. 0,02. B. 0,6. C. 0,014. D. 0,01.

Câu 6. Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỷ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 70%, 15%. Tỷ lệ gặp một cư dân của xã thì xác suất người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp là bao nhiêu phần trăm?

- A. 26%. B. 12%. C. 68%. D. 24%.

Câu 7. Một bệnh viện có hai phòng khám là phòng A và phòng B với khả năng lựa chọn của bệnh nhân là như nhau. Tỷ lệ bệnh nhân nam có ở phòng A và phòng B lần lượt là 60% và 40%. Một người bệnh được chọn ngẫu nhiên từ hai phòng khám. Tính xác suất để người bệnh được chọn người này là nam là

- A. 0,6. B. 0,5. C. 0,4. D. 0,3.

Câu 8. Ở một địa phương X, xác suất để một người lớn trên 40 tuổi mắc bệnh ung thư là 0,05. Xác suất bác sĩ chẩn đoán đúng một người mắc bệnh ung thư là 0,78 và chẩn đoán sai (không bị ung thư nhưng được chẩn đoán mắc bệnh) là 0,06. Xác suất để một người nhận được kết quả chẩn đoán không bị ung thư bằng

- A. 0,40625. B. 0,096. C. 0,904. D. 0,59375.

Câu 9. Một hộp có 5 quả cầu trắng và 10 quả cầu đen cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai quả cầu (không hoàn lại) từ hộp. Xác suất để lần thứ hai lấy được quả cầu trắng là

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{5}{7}$. D. $\frac{1}{3}$.

Cho hai biến cố A và B với $P(A) > 0$. Khi đó

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

Công thức Bayes còn được viết dưới dạng $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B})}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hai biến cố A, B sao cho $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$; $P(A|B) = 0,3$. Tính $P(B|A)$.

Bài 2. Kết quả khảo sát tại một xã cho thấy có 20% cư dân hút thuốc lá. Tỷ lệ cư dân thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp trong số những người hút thuốc lá và không hút thuốc lá lần lượt là 70%, 15%. Giả sử ta gặp một cư dân của xã, gọi A là biến cố “Người đó có hút thuốc lá” và B là biến cố “Người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp”.

- Vẽ sơ đồ hình cây.
- Nếu ta gặp một cư dân của xã thì xác suất người đó thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp là bao nhiêu?
- Nếu ta gặp một cư dân của xã thường xuyên gặp các vấn đề sức khỏe về đường hô hấp thì xác suất người đó có hút thuốc lá là bao nhiêu?

a) Vẽ sơ đồ cây biểu thị tình huống trên.

b) Khi một người xét nghiệm có phản ứng dương tính thì khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 4. Một nhà máy có hai phân xưởng I và II. Phân xưởng I sản xuất 40% số sản phẩm và phân xưởng II sản xuất 60% số sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của phân xưởng I là 2% và của phân xưởng II là 1%.

- Kiểm tra ngẫu nhiên 1 sản phẩm của nhà máy và tính xác suất để sản phẩm đó bị lỗi.
- Biết rằng sản phẩm được chọn bị lỗi. Hỏi xác suất sản phẩm đó do phân xưởng nào sản xuất cao hơn?

Bài 5. Một loại xét nghiệm nhanh SARS-CoV-2 cho kết quả dương tính với 76,2% các ca thực sự nhiễm virus và kết quả âm tính với 99,1% các ca thực sự không nhiễm virus (nguồn: [https:// tapchihocvietnam.vn/index.php/vmj/article/ view/2124/1921](https://tapchihocvietnam.vn/index.php/vmj/article/view/2124/1921)). Giả sử tỷ lệ người nhiễm virus SARS-CoV-2 trong một cộng đồng là 1%. Một người làm xét nghiệm và nhận được kết quả dương tính. Tính xác suất người đó thực sự nhiễm virus (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(B | A) = \frac{1}{3}$; $P(B | \bar{A}) = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P(A | B)$ là

- A. $\frac{7}{17}$. B. $\frac{8}{17}$. C. $\frac{5}{17}$. D. $\frac{9}{17}$.

Câu 2. Cho $P(A) = \frac{4}{5}$; $P(B | A) = \frac{2}{3}$; $P(B | \bar{A}) = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P(A | B)$ là

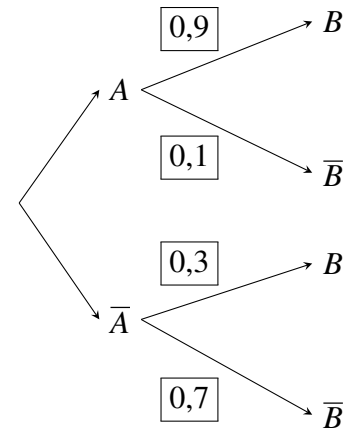
- A. $\frac{33}{35}$. B. $\frac{32}{35}$. C. $\frac{9}{35}$. D. $\frac{26}{35}$.

Câu 3. Cho A, B là các biến cố thỏa mãn $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 0,35$, $P(A) = 0,25$, $P(B) = 0,6$. Giá trị của $P(A|B)$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{7}{15}$. D. $\frac{2}{3}$.

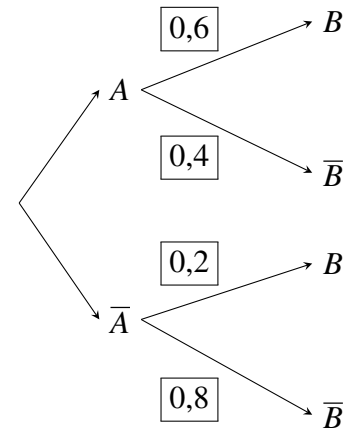
Câu 4. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Biết $P(A) = 0,6$. Tính $P(A | B)$.

- A. $\frac{6}{11}$. B. $\frac{7}{11}$. C. $\frac{8}{11}$. D. $\frac{9}{11}$.



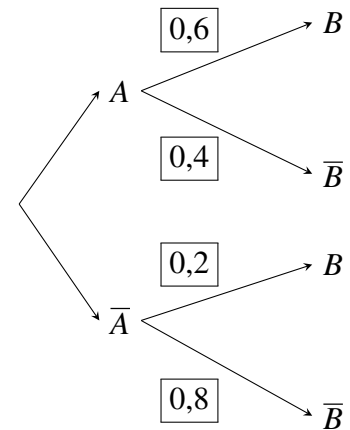
Câu 5. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Biết $P(A) = 0,48$. Tính $P(A | B)$ là

- A. $\frac{26}{49}$. B. $\frac{36}{49}$. C. $\frac{15}{39}$. D. $\frac{36}{59}$.



Câu 6. Cho sơ đồ hình cây như hình bên. Biết $P(A) = 0,72$. Tính $P(A | B)$ là

- A. $\frac{9}{16}$. B. $\frac{16}{25}$. C. $\frac{9}{25}$. D. $\frac{3}{16}$.



Câu 7. Một bệnh viện có hai phòng khám là phòng A và phòng B với khả năng lựa chọn của bệnh nhân là như nhau. Tỷ lệ bệnh nhân nam có ở phòng A và phòng B lần lượt là 60% và 40%. Một người bệnh được chọn ngẫu nhiên từ hai phòng khám và biết người này là nam, xác suất để người bệnh được chọn đến từ phòng A là

- A. 0,6. B. 0,5. C. 0,4. D. 0,3.

Câu 8. Một bệnh viện đang xét nghiệm cho một số bệnh nhân để xác định liệu họ có nhiễm virus X hay không. Xác suất để một bệnh nhân bị nhiễm virus X là 0,05. Khi xét nghiệm, nếu một bệnh nhân bị nhiễm thì xác suất để kết quả xét nghiệm dương tính là 0,95. Nếu một bệnh nhân không bị nhiễm thì xác suất để kết quả xét nghiệm âm tính là 0,98. Một bệnh nhân được chọn ngẫu nhiên và có kết quả xét nghiệm dương tính. Xác suất để bệnh nhân đó thực sự bị nhiễm virus X là

- A. $\frac{133}{2000}$. B. $\frac{19}{400}$. C. $\frac{5}{7}$. D. $\frac{2}{7}$.

Câu 9. Ở một địa phương X , xác suất để một người lớn trên 40 tuổi mắc bệnh ung thư là 0,05. Xác suất bác sĩ chẩn đoán đúng một người mắc bệnh ung thư là 0,78 và chẩn đoán sai (không bị ung thư nhưng được chẩn đoán mắc bệnh) là 0,06. Xác suất để một người thật sự mắc bệnh ung thư khi nhận được kết quả chẩn đoán bị ung thư bằng

- A. 0,40625. B. 0,096. C. 0,904. D. 0,59375.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

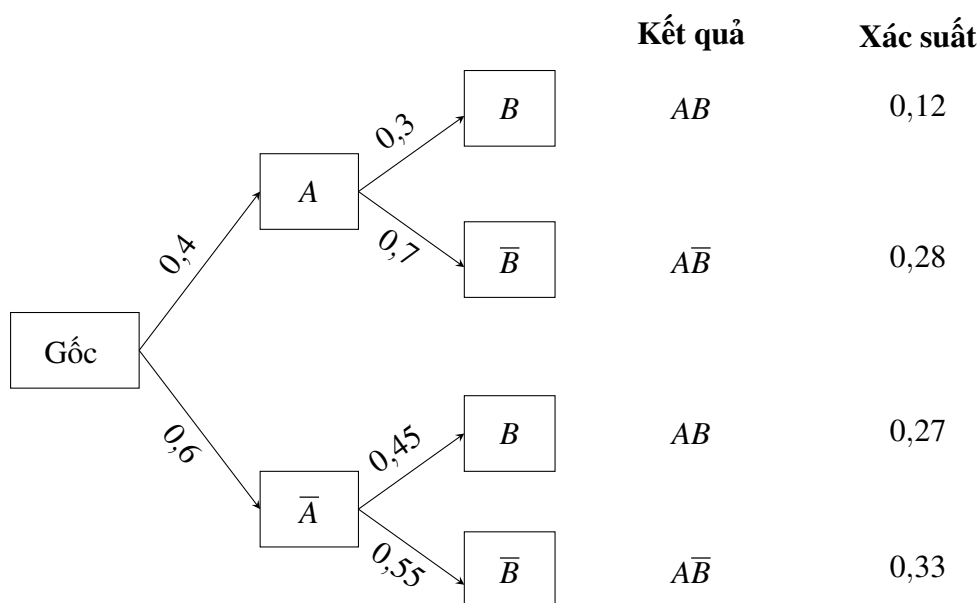
Câu 1. Cho hai biến cố $A; B$ với $P(B) = 0,7; P(A|B) = 0,6$ và $P(A|\bar{B}) = 0,3$. Khi đó $P(A)$ bằng

- A. 0,45. B. 0,6. C. 0,51. D. 0,3.

Câu 2. Cho hai biến cố $A; B$ thỏa mãn $P(A) = 0,42; P(B) = 0,56; P(A|B) = 0,35$. Khi đó $P(B|A)$ bằng

- A. 0,2625. B. 0,466. C. 0,63. D. 0,672.

Câu 3. Cho sơ đồ hình cây sau



Tính $P(B)$.

- A. 0,4. B. 0,78. C. 0,55. D. 0,65.

Câu 4. Cho hai biến cố A, B thỏa mãn $P(A) = 0,5; P(B) = 0,2; P(B|A) = 0,24$. Khi đó, $P(A|B)$ bằng:

- A. 0,6. B. 0,5. C. 0,32. D. 0,65.

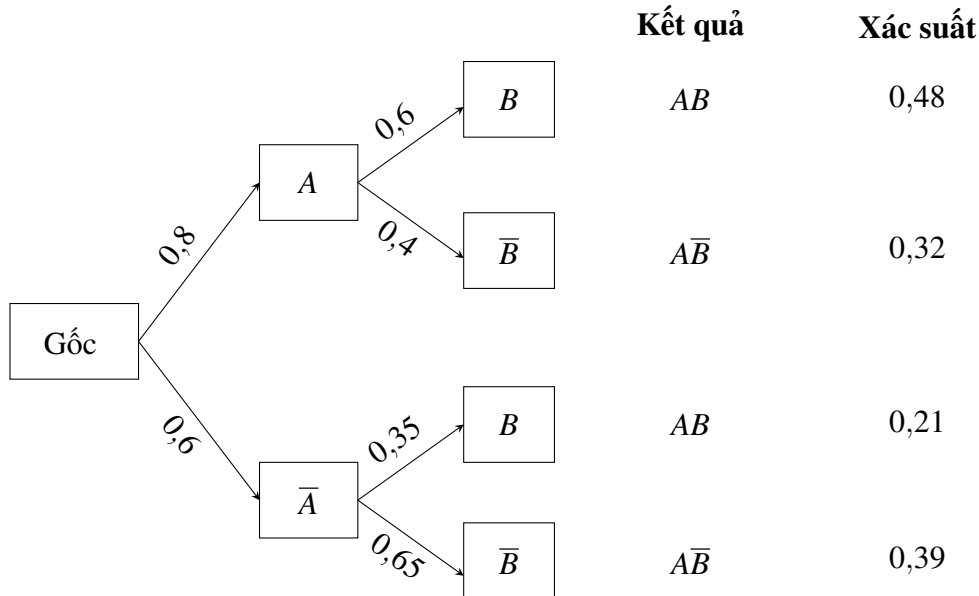
Câu 5. Có hai chuồng gà giống. Chuồng I có 15 con, trong đó có 3 con gà trống. Chuồng II có 20 con, trong đó có 4 con gà trống. Một con từ chuồng II nhảy sang chuồng I. Từ chuồng I bắt ngẫu nhiên 1 con. Xác suất để con gà bắt được là gà trống bằng

- A. 0,2. B. 0,2375. C. 0,2069. D. 0,2344.

Câu 6. Cho hai biến cố A, B với $P(A) = 0,5; P(B|A) = 0,8$ và $P(B|\bar{A}) = 0,3$. Khi đó, $P(B)$ bằng:

- A. 0,5. B. 0,55. C. 0,4. D. 0,6.

Câu 7. Cho sơ đồ hình cây sau:



Tính $P(A|B)$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

- A. 0,7. B. 0,69. C. 0,85. D. 0,69.

Câu 8. Một thùng có 60 quả sầu riêng, 40 quả mít; các quả có khối lượng như nhau. Sau khi thống kê người ta thấy có 50% số quả sầu riêng có dán tem xuất khẩu và 75% số quả mít có dán tem xuất khẩu; những quả còn lại không dán tem xuất khẩu. Lấy ngẫu nhiên trong thùng một quả, xác suất để quả lấy ra có dán tem xuất khẩu là

- A. 0,4. B. 0,65. C. 0,615. D. 0,6.

Câu 9. Một cuộc thi khoa học có 36 bộ câu hỏi, trong đó có 20 bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên và 16 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Bạn An lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi (lấy không hoàn lại), sau đó bạn Bình lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi. Xác suất bạn bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội bằng

- A. 9. B. 7. C. 13. D. 12.

Câu 10. Trong kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông, trường THPT X có 60% học sinh lựa chọn khối D để xét tuyển đại học. Biết rằng, nếu một học sinh lựa chọn khối D thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,7 còn nếu học sinh không lựa chọn khối D thì xác suất để học sinh đó đỗ đại học là 0,8. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường THPT X đã tốt nghiệp trong kì thi trên. Xác suất để học sinh đó chọn khối D biết học sinh này đã đỗ đại học là:

- A. $\frac{7}{11}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{21}{37}$. D. $\frac{6}{7}$.

Câu 11. Một nhà máy có 2 xưởng sản xuất. Xưởng I chiếm 65% tổng sản phẩm. Xưởng II chiếm 35% tổng sản phẩm. Biết rằng tỷ lệ đạt sản phẩm chất lượng tốt của hai xưởng lần lượt là 90% và 85%. Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm của nhà máy, xác suất để sản phẩm đó đạt chất lượng tốt là

- A. 0,585. B. 0,5525. C. 0,8825. D. 0,8675.

Câu 12. Có hai hộp thuốc. Hộp I có 2 vỉ thuốc ngoại và 5 vỉ thuốc nội. Hộp II có 3 vỉ thuốc ngoại và 6 vỉ thuốc nội. Từ hộp I và hộp II lần lượt lấy ra 2 vỉ thuốc và 1 vỉ thuốc. Từ 3 vỉ thuốc đó lại lấy ra 1 vỉ. Tính xác suất để lấy ra sau cùng vỉ thuốc ngoại.

- A. 0,65. B. $\frac{17}{43}$. C. $\frac{19}{63}$. D. $\frac{16}{17}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Có hai đội thi đấu môn bắn súng. Đội I có 8 vận động viên, đội II có 10 vận động viên. Xác suất đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II tương ứng là 0,6 và 0,55. Chọn ngẫu

nhiên một vận động viên.

- a) Xác suất để vận động viên này đạt huy chương vàng là $\frac{103}{180}$.
- b) Xác suất không đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội II là 0,45.
- c) Xác suất để vận động viên chọn ra thuộc đội I là $\frac{5}{9}$.
- d) Giả sử vận động viên được chọn đạt huy chương vàng. Xác suất để vận động viên này thuộc đội I là $\frac{48}{103}$.

Câu 2. Cho hai biến cố A, B sao cho $P(A) = 0,3; P(B) = 0,5; P(A|B) = 0,4$.

- a) $P(AB) = 0,2$.
- b) $P(\bar{A}) = 0,7$.
- c) $P(B|A) = 0,06$.
- d) $P(B|\bar{A}) = \frac{241}{350}$.

Câu 3. Một nhà máy có hai phân xưởng I và II. Phân xưởng I sản xuất 35% số sản phẩm và phân xưởng II sản xuất 65% số sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của phân xưởng I là 2% và của phân xưởng II là 3%. Kiểm tra ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy.

- a) Xác suất để sản phẩm được kiểm tra bị lỗi do phân xưởng II sản xuất là $\frac{39}{53}$.
- b) Xác suất để sản phẩm đó bị lỗi là 0,0265.
- c) Xác suất để sản phẩm được kiểm tra bị lỗi do phân xưởng I sản xuất là $\frac{12}{53}$.
- d) Xác suất để sản phẩm đó không bị lỗi do phân xưởng I sản xuất là 0,89.

Câu 4. Khảo sát thị lực của 50 học sinh, ta thu được kết quả như sau:

	Nữ	Nam
Có tật khúc xạ	13	15
Không có tật khúc xạ	17	5

Chọn ngẫu nhiên 1 bạn trong 50 học sinh trên

- a) Biết rằng bạn đó là học sinh nam. Xác suất để bạn đó là có tật khúc xạ là $\frac{23}{50}$.
- b) Biết rằng bạn đó có tật khúc xạ. Xác suất để bạn đó là học sinh nam là $\frac{3}{10}$.
- c) Xác suất để học sinh được chọn bị tật khúc xạ là $\frac{12}{25}$.
- d) Biết rằng bạn đó có tật khúc xạ. Xác suất để bạn đó là học sinh nữ là $\frac{7}{10}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 vào ô kết quả.

Câu 1. Một cuộc thi khoa học có 36 bộ câu hỏi, trong đó có 20 bộ câu hỏi về chủ đề tự nhiên và 16 bộ câu hỏi về chủ đề xã hội. Bạn An lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi (lấy không hoàn lại), sau đó bạn Bình lấy ngẫu nhiên 1 bộ câu hỏi. Xác suất bạn Bình lấy được bộ câu hỏi về chủ đề xã hội bằng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 2. Trường Phan Đình Phùng có 20% học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao, trong số học sinh đó có 85% học sinh biết chơi bóng đá. Ngoài ra, có 10% số học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao cũng biết chơi bóng đá. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh của trường. Giả sử học sinh đó biết chơi bóng đá. Xác suất chọn được học sinh thuộc câu lạc bộ thể thao là bao nhiêu?

KQ:

Câu 3. Trong một kì thi Tốt nghiệp trung học phổ thông, một tỉnh X có 60% học sinh lựa chọn tổ hợp A00 (gồm các môn Toán, Vật lí, Hoá học). Biết rằng, nếu một học sinh chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ Đại học là 0,7; còn nếu một học sinh không chọn tổ hợp A00 thì xác suất để học sinh đó đỗ Đại học là 0,5. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X đã Tốt nghiệp trung học phổ thông trong kì thi trên. Biết rằng học sinh này đã đỗ Đại học. Tính xác suất để học sinh đó chọn tổ hợp A00 (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

KQ:

--	--	--	--

Câu 4. Một nhà máy có hai phân xưởng I và II. Phân xưởng I sản xuất 40% số sản phẩm và phân xưởng II sản xuất 60% số sản phẩm. Tỷ lệ sản phẩm bị lỗi của phân xưởng I là 3% và của phân xưởng II là 2%. Kiểm tra ngẫu nhiên 1 sản phẩm của nhà máy và tính xác suất để sản phẩm đó bị lỗi là $\frac{t}{100}$.

Khi đó t bằng bao nhiêu?

KQ:

--	--	--	--

Câu 5. Trong một đợt kiểm tra sức khỏe, có một loại bệnh X mà tỉ lệ người mắc bệnh là 0,2% và một loại xét nghiệm Y mà ai mắc bệnh X khi xét nghiệm Y cũng có phản ứng dương tính. Tuy nhiên, có 6% những người không bị bệnh X lại có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y . Chọn ngẫu nhiên 1 người trong đợt kiểm tra sức khỏe đó. Giả sử người đó có phản ứng dương tính với xét nghiệm Y . Xác suất người đó bị mắc bệnh X là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

KQ:

--	--	--	--

Câu 6. Anh Nam hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Nếu hôm nay anh đi làm bằng xe buýt thì xác suất để hôm sau anh đi làm bằng xe máy là 0,3. Nếu hôm nay anh đi làm bằng xe máy thì xác suất để hôm sau anh đi làm bằng xe buýt là 0,6. Xét một tuần mà thứ Hai anh Nam đi làm bằng xe buýt. Xác suất để thứ Tư trong tuần đó, anh Nam đi làm bằng xe máy là bao nhiêu?

KQ:

--	--	--	--

—HẾT—