SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT ĐÀO SƠN TÂY

TÀI LIỆU HỌC TẬP MÔN TOÁN 11
NĂM HỌC 2024 – 2025 (HỌC KÌ II)

Họ và tên: ....
Lớp: ....

Tài liệu lưu hành nội bộ

Mục lục

Chương 6

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

§1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Lũy thừa với số mũ nguyên

- Lũy thừa với số mũ nguyên dương: Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: $a^n = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{n \text{ thừa số}}$.
- Lũy thừa với số mũ nguyên âm: Cho $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
- Với $a \neq 0$, ta quy ước $a^0 = 1$; 0^0 và 0^{-n} $(n \in \mathbb{N}^*)$ không có nghĩa.

2 Căn bậc n

- **Định nghĩa:** Cho số thực a và số nguyên dương n $(n \geq 2)$. Số b được gọi là *căn bậc n* của số a nếu $b^n = a$.

CHÚ Ý

① Với n lẻ và $a \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của a, ký hiệu là $\sqrt[n]{a}$.

② Với n chẵn, ta xét ba trường hợp sau:

- $a < 0$: Không tồn tại căn bậc n của a;
- $a = 0$: Có một căn bậc n của a là số 0;
- $a > 0$: Có hai căn bậc n của a là hai số đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{a}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{a}$.

- **Tính chất:**

① $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a \text{ nếu } n \text{ lẻ} \\ |a| \text{ nếu } n \text{ chẵn;} \end{cases}$

② $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$;

④ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$;

⑤ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

(Ở mỗi công thức trên, ta giả sử các biểu thức xuất hiện trong đó có nghĩa).

3 Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Khi đó: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4 Công thức biến đổi lũy thừa cần nhớ

Cho cơ số $a, b > 0$ và hai số thực m, n. Khi đó, ta có:

① $a^0 = 1$; $a^1 = a$.

② $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

③ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

④ $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

⑤ $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$.

⑥ $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

⑦ $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

⑧ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.

⑨ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}$.

5 So sánh hai lũy thừa cùng cơ số

Cho cơ số $a > 0$ và hai số thực x, y. Khi đó, ta có:

① Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$.

② Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT 1 Tính giá trị biểu thức

Ví dụ 1. Tính

a) $25^{\frac{3}{2}}$.

b) $32^{-\frac{2}{5}}$.

c) $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.

d) $\sqrt[3]{-27}$.

e) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}$.

f) $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$

Ví dụ 2. Tính

a) $A=\left(\sqrt{2}\right)^{86}-2^{43}$.

b) $B=\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

c) $C=\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1}-\dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{9}{4}\right)^{-1}$.

d) $D=\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

e) $E=\left(\dfrac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}+16^{\frac{3}{4}}-2^{-2}.64^{\frac{1}{3}}$.

f) $F=64^{\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{64}+4^{2+2\sqrt[3]{5}}:16^{\sqrt[3]{5}}$

Ví dụ 3. Biết rằng $3^x=2$. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A=3^{2x-1}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1}+9^{x+1}$.

b) $B=81^x+\sqrt[4]{3}^{\,x}\cdot\sqrt[4]{27^x}$

DT 2 Rút gọn biểu thức liên quan đến lũy thừa

Ví dụ 4. Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng một luỹ thừa ($a > 0$)

a) $\sqrt[4]{2^{-3}}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$;

c) $(\sqrt[5]{3})^4$;

d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$;

e) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}:(\sqrt[6]{a})^5$;

f) $a^{\frac{1}{3}}:a^{-\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}$.

Ví dụ 5. Viết các biểu thức sau về dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ

a) $A = a^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{a}$, với $a > 0$.

b) $B = a^{\frac{5}{3}}:\sqrt[3]{a}$, với $a > 0$.

c) $C = \dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{a^3}$, với $a > 0$.

d) $D = \dfrac{a^{\sqrt{7}+1}a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

DT 3 So sánh hai lũy thừa

Ví dụ 6. Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Hãy so sánh cơ số a với 1, biết rằng

a) $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$.

b) $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$.

c) $\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$.

DT 4 Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 7. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = (7+4\sqrt{3})^{2020}(4\sqrt{3}-7)^{2019}$.

b) $B = \dfrac{\left(4+2\sqrt{3}\right)^{2018} \cdot \left(1-\sqrt{3}\right)^{2017}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2019}}$.

Ví dụ 8. Cho $4^x + 4^{-x} = 14$. Tính giá trị của biểu thức $M = \dfrac{2+2^x+2^{-x}}{7-2^x-2^{-x}}$.

Ví dụ 9. Rút gọn các biểu thức sau (với $a,b>0$ và $a,b\neq 1$):

a) $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$.

b) $B=\dfrac{a-3a^{\frac{1}{3}}+2}{\sqrt[3]{a}-1}+\dfrac{\sqrt{a}-a^{\frac{5}{6}}+\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}$.

Ví dụ 10. Cho $x>0, y>0$ và số thực a thoả $a=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}$. Chứng minh rằng $a^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

Ví dụ 11. Cường độ ánh sáng tại độ sâu h (m) dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h = I_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 m gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 6 m?

Ví dụ 12. Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = A(2,71)^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93 671 600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr.79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

Ví dụ 13. Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[4]{5}$;   b) $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$;   c) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}$;

d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;   e) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$;   f) $(-\sqrt[6]{4})^3$.

2 Tính giá trị của biểu thức

a) $A=4^4\cdot 8^{11}\cdot 2^{2017}$.   b) $B=3^{1-\sqrt{2}}\cdot 3^{2+\sqrt{2}}\cdot 9^{\frac{1}{2}}$

c) $C=2018^{\sin^2\alpha}\cdot 2018^{\cos^2\alpha}$ d) $D=\dfrac{6^{2+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

3 Viết các biểu thức sau về dạng lũy thừa của số mũ hữu tỉ

a) $A=a^{\frac{8}{3}}:\sqrt[3]{a^4}$ b) $B=a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[4]{a}$

c) $C=\dfrac{a^2a^{\frac{5}{2}}\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}}\ (a>0)$ d) $D=\dfrac{7^{5+2020\sqrt{5}}\cdot 7^{5-2020\sqrt{5}}}{\left(7^{\sqrt{3}-2}\right)^{\sqrt{3}+2}}$.

4 Cho a là số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(a^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{24}}$.   b) $a^{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$.

c) $a^{-\sqrt{3}}:a^{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}$.   d) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[12]{a^5}$.

5 Cho $a>0$, $b>0$. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)$;   b) $B=\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

6 Biết rằng $5^{2x}=3$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{5^{3x}+5^{-3x}}{5^x+5^{-x}}$.

7 Biết rằng $3^\alpha+3^{-\alpha}=3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3^{\frac{\alpha}{2}}+3^{\frac{-\alpha}{2}}$;   b) $3^{2\alpha}+3^{-2\alpha}$.

8 Biết rằng $4^x=25^y=10$. Tính giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

9 Cho $9^x+9^{-x}=23$. Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{5+3^x+3^{-x}}{1-3^x-3^{-x}}$.

10 Với $0<a$ và $a\neq 1$, hãy tìm a để

a) $(a-1)^{\frac{-2}{3}}<(a-1)^{\frac{-1}{3}}$ b) $(a-1)^{-2}>(a-1)^{\sqrt{2}}$

11 Xác định các giá trị của số thực a thoả mãn

a) $a^{\frac{1}{2}} > a^{\sqrt{3}}$; b) $a^{-\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}}$; c) $(\sqrt{2})^a > (\sqrt{3})^a$.

12 Cho $a > 0$, $b > 0$. Rút gọn mỗi biểu thức sau

a) $A = \dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$; b) $B = \left[\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}\right] : \left(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}\right)$..

13 Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^N.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

14 Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương của chu kì quỹ đạo p (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tỉnh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo là một đường elip với Mặt Trời nằm ở một tiêu điểm) bằng lập phương của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU).

a) Tinh p theo d.

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (*kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm*).

15 Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất).

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008).

a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hoả là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là bao nhiêu?

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày).

16 Tại một vùng biển, giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.

a) Tại độ sâu 1 m, cường độ ánh sáng gấp bao nhiêu lần I_0?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 2 m gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu 10 m? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho a là số thực dương. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a^{x+y} = a^x + a^y$. **B.** $(a^x)^y = a^{xy}$. **C.** $(a^x)^y = a^x.a^y$. **D.** $a^{x-y} = a^x - a^y$.

Câu 2. Cho a, b là các số thực dương khác 1 và x, y là các số thực. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a^x a^y = a^{x+y}$. **B.** $\frac{a^x}{a^y} = a^{\frac{x}{y}}$. **C.** $a^x b^y = (ab)^{x+y}$. **D.** $(a^x)^y = a^{x+y}$.

Câu 3. Tìm số nhỏ hơn 1 trong các số sau đây

A. $(0,7)^{2017}$. **B.** $(0,7)^{-2017}$. **C.** $(1,7)^{2017}$. **D.** $(2,7)^{2017}$.

Câu 4. Cho $(0{,}25\pi)^{\alpha} > (0{,}25\pi)^{\beta}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\alpha \cdot \beta = 1$. **B.** $\alpha > \beta$. **C.** $\alpha + \beta = 0$. **D.** $\alpha < \beta$.

Câu 5. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

A. 1. **B.** $6^{-\sqrt{5}}$. **C.** 18. **D.** 9.

Câu 6. Giả sử a là số thực dương. Biểu thức $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ được viết dưới dạng a^{α}. Khi đó giá trị α bằng bao nhiêu?

A. $\alpha = \frac{2}{3}$. **B.** $\alpha = \frac{11}{6}$. **C.** $\alpha = \frac{1}{6}$. **D.** $\alpha = \frac{5}{3}$.

Câu 7. Giả sử x là số thực dương. Biểu thức $P = x\sqrt[5]{x}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{11}{10}}$. **B.** $x^{\frac{6}{5}}$. **C.** $x^{\frac{1}{5}}$. **D.** $x^{\frac{4}{5}}$.

Câu 8. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

A. $P = x^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P = x^2$. **C.** $P = \sqrt{x}$. **D.** $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 9. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$, với $b > 0$.

A. $Q = b^2$. **B.** $Q = b^{\frac{5}{9}}$. **C.** $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. **D.** $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Câu 10. Rút gọn biểu thức $Q = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{b}}$, với $b > 0$.

A. $Q = b^{\frac{1}{15}}$. **B.** $Q = b^{-\frac{2}{15}}$. **C.** $Q = b^{\frac{2}{15}}$. **D.** $Q = b^{\frac{5}{3}}$.

Câu 11. Hãy viết biểu thức $L = \sqrt[3]{7.\sqrt[3]{7}}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $7^{\frac{1}{2}}$. **B.** $7^{\frac{1}{18}}$. **C.** $7^{\frac{4}{9}}$. **D.** $7^{\frac{1}{27}}$.

Câu 12. Biến đổi $\sqrt[3]{x^5.\sqrt[4]{x}}, (x > 0)$ thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

A. $x^{\frac{20}{3}}$. **B.** $x^{\frac{23}{12}}$. **C.** $x^{\frac{21}{12}}$. **D.** $x^{\frac{12}{5}}$.

Câu 13. Viết biểu thức $A = \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} : a^{\frac{11}{6}}$ $(a > 0)$ dưới dạng số mũ lũy thừa hữu tỉ.

A. $A = a^{-\frac{23}{24}}$. **B.** $A = a^{\frac{21}{24}}$. **C.** $A = a^{\frac{23}{24}}$. **D.** $A = a^{-\frac{1}{12}}$.

Câu 14. Cho $a^{2b} = 5$. Tính $2.a^{6b}$.

A. 120. **B.** 250. **C.** 15. **D.** 125.

Câu 15. Cho hai số dương a và b thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} = 3$, $b^{\frac{1}{3}} = 2$. Tính giá trị của tổng $S = a + b$.

A. 5. **B.** 13. **C.** 17. **D.** 31.

Câu 16. Giá trị của biểu thức $P = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(7 - 4\sqrt{3}\right)^{2016}$ bằng

A. 1. **B.** $7 - 4\sqrt{3}$. **C.** $7 + 4\sqrt{3}$. **D.** $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{2016}$.

Câu 17. Giá trị của biểu thức $P=\left(9+4\sqrt{5}\right)^{2017}\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2016}$ bằng

A. $9+4\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** $\left(9-4\sqrt{5}\right)^{2016}$. **D.** $9-4\sqrt{5}$.

Câu 18. Giá trị của biểu thức $P=\left(1+\sqrt{3}\right)^{2016}\left(3-\sqrt{3}\right)^{2016}$ bằng

A. 12^{1008}. **B.** 4^{1008}. **C.** $\left(1+\sqrt{3}\right)^{1008}$. **D.** $\left(3-\sqrt{3}\right)^{1008}$.

Câu 19. Biết $2^x+2^{-x}=m$ với $m\geq 2$. Tính giá trị của biểu thức $M=4^x+4^{-x}$.

A. $M=m-2$. **B.** $M=m^2+2$. **C.** $M=m^2-2$. **D.** $M=m+2$.

Câu 20. Nếu $(a-2)^{-\frac{1}{4}}\leq(a-2)^{-\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>3$. **B.** $a<3$. **C.** $2<a<3$. **D.** $a>2$.

Câu 21. Cho $a>1>b>0$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^2<b^2$. **B.** $a^{-\sqrt{3}}<b^{-\sqrt{3}}$. **C.** $b^{-2}>b^{-\mathrm{e}}$. **D.** $a^{-2}<a^{-3}$.

Câu 22. Cho $(a+1)^{-\frac{2}{3}}<(a+1)^{-\frac{1}{3}}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a>0$. **B.** $-1<a<0$. **C.** $a\geq -1$. **D.** $a\geq 0$.

Câu 23. Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2019^{2020}\right)$.

A. $2019^{1010}+1$. **B.** $2019^{2020}+1$. **C.** $-2019^{1010}-1$. **D.** 2019^{1010}.

Câu 24. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P=d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU ($1AU$ là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là $1AU$ khoảng 93 000 000 dặm) (*Nguồn: R.I.Charles et al.,Algebra 2,Pearson*).
Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

A. 1,233 (năm Trái Đất). **B.** 2,311 (năm Trái Đất).
C. 1,804 (năm Trái Đất). **D.** 1,874 (năm Trái Đất).

Câu 25. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t)=500\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng. Hỏi sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

A. 83,37%. **B.** 79,37%. **C.** 75,37%. **D.** 85,37%.

—HẾT—

§2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa và tính chất

- **Định nghĩa:** Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b.$$

- **Tính chất:** Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, ta có tính chất sau:

① $\log_a 1 = 0$. ② $\log_a a = 1$.

③ $a^{\log_a b} = b$. ④ $\log_a a^{\alpha} = \alpha$.

2 Các công thức lôgarit cần nhớ

Cho các số dương a, b, b_1, b_2,...b_n với $a \neq 1$, ta có các quy tắc sau:

- **Công thức biến đổi tích thương:**

① $\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$; ② $\log_a \left(\dfrac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$.

Ghi nhớ: Lô ga của một tích thành một tổng; Lô ga của một thương thành một hiệu.

- **Công thức biến đổi số mũ:**

① $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$. ② $\log_a \left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log_a b$.

Ghi nhớ: Với điều kiện $b \neq 0$ thì $\log_a b^{2n} = 2n \cdot \log_a |b|$.

- **Công thức đổi cơ số:**

① $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, với $b \neq 1$

② $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, với $a, b, c > 0$ và $a \neq 1, c \neq 1$

③ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$, với $a, b, c > 0$ và $a \neq 1, b \neq 1$

3 Lôgarít thập phân và lôgarit tự nhiên

- **Lôgarit thập phân:** Lôgarit cơ số 10 gọi là lôgarit thập phân.

  ✔ $\log_{10} N$, $(N > 0)$ được viết là $\log N$ hay $\lg N$.

- **Lôgarít tự nhiên:** Lôgarit cơ số e gọi là lôgarit tự nhiên.

  ✔ $\log_e N$, $(N > 0)$ được viết là $\ln N$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT 1 Tính toán biểu thức chứa lôgarit

Ví dụ 1. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính:

a) $\log_3 \sqrt[3]{9}$;

b) $\log_{\sqrt{2}} 8$;

c) $9^{\log_3 12}$;

d) $2^{\log_4 9}$;

e) $\log_2 5 \cdot \log_5 64$;

f) $\log \sqrt{1000}$.

Ví dụ 2. Với a là số thực dương và $a \neq 1$. Tính

a) $\log_a \sqrt[3]{a}$.

b) $\log_a \left(a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)$;

c) $\log_a \dfrac{1}{a^3}$;

d) $\log_{\frac{a}{3}} \left(\dfrac{a^2}{9}\right)$;

e) $\log_{a\sqrt{a}} a\sqrt[3]{a}$;

f) $\log_{a^2} \sqrt[4]{a^3}$.

Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_3 \dfrac{9}{10} + \log_3 30$;

b) $\log_5 75 - \log_5 3$;

c) $\log_3 \dfrac{5}{9} - 2\log_3 \sqrt{5}$;

d) $4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3$;

e) $2\log_5 2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$;

f) $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2\log_3 \sqrt[4]{27}$.

Ví dụ 4. Cho $\log_2 x = \dfrac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{\log_2 (4x) + \log_2 \dfrac{x}{2}}{x^2 - \log_{\sqrt{2}} x}$.

Ví dụ 5. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{ab^3} = 27$. Tính giá trị của $\log_3 a + 6\log_3 b$.

DT 2 **Phân tích một logarit theo hai logarit cho trước**

Ví dụ 6. Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_2 9$. Tính $\log_2 \dfrac{40}{3}$ theo a và b.

Ví dụ 7. Cho $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$. Tính $\log_6 20$ theo a và b.

Ví dụ 8. Đặt $a = \log_3 5$; $b = \log_4 5$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 20$ theo a và b.

DT 3 Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 9. Cho $\log_a b = 4$. Tính:

a) $\log_a\left(a^{\frac{1}{2}}b^5\right)$;

b) $\log_a\left(\dfrac{a\sqrt{b}}{b\sqrt[3]{a}}\right)$;

c) $\log_{a^3b^2}\left(a^2b^3\right)$;

d) $\log_{a\sqrt[3]{b}}(\sqrt[4]{a\sqrt{b}})$.

Ví dụ 10. Cho $a>0,\ b>0$ thỏa mãn $a^2+9b^2=10ab$. Chứng minh

$$\log\frac{a+3b}{4}=\frac{\log a+\log b}{2}.$$

Ví dụ 11. Trong hóa học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$, trong đó $[\mathrm{H}^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là 0,0001 mol/L. Dung dịch này có tính acid, hay kiềm hay trung tính?

b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B.
Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

Ví dụ 12. Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đềxinben (viết tắt là đB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức: $L(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 cường độ âm ở ngưỡng nghe $\left(I_0 = 10^{-12}\, w/\mathrm{m}^2\right)$. Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là 68 dB. Hãy tính cường độ âm tương ứng ra đơn vị w/m^2.

Ví dụ 13. Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log\frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn ($\mathrm{A}_0 = 1\mu m$).

a) Tính độ lớn của trận động đất có biên độ A bằng

i) $10^{5,1}A_0$; ii) $65\,000A_0$.

b) Một trận động đất tại địa điểm N có biên độ lớn nhất gấp ba lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại địa điểm P. So sánh độ lớn của hai trận động đất.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính:

a) $\log_{0,5} 0{,}25$; b) $8^{\log_2 5}$; c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81}$; d) $5^{\log_2 16}$.

e) $\log_4 25 + \log_2 1{,}6$ f) $\log_2 \sqrt{2\sqrt{32}}$ g) $\log_a \left(a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}\right)$ h) $\log_{a\sqrt{a}} a\sqrt[3]{a}$.

2 Cho $\log_a b = 2$. Tính

a) $\log_a \left(a^2b^3\right)$; b) $\log_a \dfrac{a\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b}}$;

c) $\log_a (2b) + \log_a \left(\dfrac{b^2}{2}\right)$; d) $\log_{ab} \left(a^2b^3\right)$.

3 Biết $\log_2 3 \approx 1{,}585$. Hãy tính

a) $\log_2 48$; b) $\log_4 27$.

4

a) Cho $1 \neq a, b > 0$ thỏa mãn $\log_a b = 3$. Tính $T = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$.

b) Cho $\log_a b = 2$; $\log_a c = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(ab^3c^5\right)$.

c) Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

d) Cho $\log_a c = 3$, $\log_b c = 4$ với a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} c$.

5 Đặt $a = \log_3 5$, $b = \log_4 5$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 10$ theo a và b.

6 Biết $\log_2 3 = a$; $\log_2 5 = b$. Tính $\log_5 360$ theo a và b.

7 Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_3 15 = b$. Biểu thị $\log_{30} 18$ theo a và b.

8 Chứng minh rằng

a) $\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\log_a\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0$;

b) $\ln\left(1+e^{2x}\right)=2x+\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

9 Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2=14ab$. Chứng minh rằng

$$\log_2(a+b)=\frac{1}{2}(4+\log_2 a+\log_2 b).$$

10 Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$. Chứng minh rằng

$$\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b).$$

11 a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L. Tính nồng độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính pH của dung dịch đó.

12 Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ $\left(\text{mol}\,L^{-1}\right)$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+]=8\cdot 10^{-8}$ (Nguồn: https://nongnghiep.farmvina.com).
Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết $\text{pH}=-\log[H^+]$.

13 Cường độ một trận động đất M (Richte) được cho bởi công thức $M=\log A-\log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20 , một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richte. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho a là số thực dương khác 1. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $\log_a 2\cdot\log_2 a=1$. **B.** $\log_a 1=0$. **C.** $\log_a a=1$. **D.** $\log_a 2=\dfrac{1}{\log_a 2}$.

Câu 2. Cho các số thực $a,b>1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_a\dfrac{a}{b}=\log_b a$. **B.** $\log_a\dfrac{a}{b}=1+\log_a b$.

C. $\log_a\dfrac{a}{b}=\log_a b$. **D.** $\log_a\dfrac{a}{b}=1-\log_a b$.

Câu 3. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 a=\log_a 2$. **B.** $\log_2 a=\dfrac{1}{\log_2 a}$. **C.** $\log_2 a=\dfrac{1}{\log_a 2}$. **D.** $\log_2 a=-\log_a 2$.

Câu 4. Với a,b,c là các số thực dương khác 1, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. $\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}$. **B.** $\log_a b=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$. **C.** $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$. **D.** $\log_a b=\dfrac{\ln b}{\ln a}$.

Câu 5. Cho $a,b>0$. Tìm mệnh dề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\ln\frac{a}{b}=\ln a+\ln\frac{1}{b}$. **B.** $\ln\frac{a}{b}=\ln b-\ln a$. **C.** $\ln\frac{a}{b}=\frac{\ln a}{\ln b}$. **D.** $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln\frac{1}{b}$.

Câu 6. Giá trị của biểu thức $A=4^{\log_2 7}$ bằng

A. 14. **B.** 28. **C.** 2. **D.** 49.

Câu 7. Biết $\log_6 a=2$. Tính $I=\log_a 6$.

A. $I=36$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=64$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

Câu 8. Tính giá trị của biểu thức $I=a\cdot\log_2\sqrt{8}$.

A. $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=\frac{3a}{2}$. **C.** $I=\frac{2a}{3}$. **D.** $I=\frac{3}{2}$.

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức $N=\log_a\sqrt{a\sqrt{a}}$ với $0<a\neq 1$.

A. $N=\frac{-3}{4}$. **B.** $N=\frac{4}{3}$. **C.** $N=\frac{3}{2}$. **D.** $N=\frac{3}{4}$.

Câu 10. Biểu thức $\log_2\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right)+\log_2\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)$ có giá trị bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** $\log_2\sqrt{3}-1$.

Câu 11. Biết $\log_2 x=a$, tính theo a giá trị của biểu thức $P=\log_2\left(4x^2\right)$.

A. $P=2+a$. **B.** $P=4+2a$. **C.** $P=4+a$. **D.** $P=2+2a$.

Câu 12. Cho $\log_c a=2$ và $\log_c b=4$. Tính $P=\log_a b^4$.

A. $P=8$. **B.** $P=\frac{1}{32}$. **C.** $P=\frac{1}{8}$. **D.** $P=32$.

Câu 13. Cho $\log_a b=5$, $\log_a c=-3$. Giá trị biểu thức $\log_a\left(\frac{a^4\sqrt[3]{b}}{c^2}\right)$ là

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** -40. **C.** 40. **D.** $\frac{35}{3}$.

Câu 14. Cho a,b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b=2$, tính giá trị của $P=\log_{a^2}b-\log_{\sqrt{b}}a^3$.

A. $\frac{13}{4}$. **B.** -4. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** -2.

Câu 15. Cho $\log_a x=-1$ và $\log_a y=4$. Tính giá trị của $P=\log_a(x^2y^3)$.

A. $P=-14$. **B.** $P=3$. **C.** $P=10$. **D.** $P=65$.

Câu 16. (TN – 2021) Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3+\log_2 b=6$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3b=64$. **B.** $a^3b=36$. **C.** $a^3+b=64$. **D.** $a^3+b=36$.

Câu 17. Nếu $a=\log_{30}3$ và $b=\log_{30}5$ thì

A. $\log_{30}1350=a+2b+1$. **B.** $\log_{30}1350=2a+b+1$.
C. $\log_{30}1350=a+2b+2$. **D.** $\log_{30}1350=2a+b+2$.

Câu 18. Cho $\log_2 7=a$, $\log_3 7=b$. Tính $\log_6 7$ theo a và b.

A. $\frac{1}{a+b}$. **B.** a^2+b^2. **C.** $a+b$. **D.** $\frac{ab}{a+b}$.

Câu 19. Cho $a=\log_3 15$, $b=\log_3 10$. Tính $\log_{\sqrt{3}}50$ theo a và b.

A. $\log_{\sqrt{3}}50=2(a+b-1)$. **B.** $\log_{\sqrt{3}}50=4(a+b+1)$.
C. $\log_{\sqrt{3}}50=a+b-1$. **D.** $\log_{\sqrt{3}}50=3(a+b+1)$.

Câu 20. Cho $\log_2 6=a;\log_2 7=b$. Tính $\log_3 7$ theo a và b.

A. $\log_3 7 = \dfrac{b}{a-1}$. **B.** $\log_3 7 = \dfrac{a}{b-1}$. **C.** $\log_3 7 = \dfrac{b}{1-a}$. **D.** $\log_3 7 = \dfrac{a}{1-b}$.

Câu 21. Đặt $a = \log_{12} 6$, $b = \log_{12} 7$. Hãy biểu diễn $\log_2 7$ theo a và b.

A. $\dfrac{b}{a+1}$. **B.** $\dfrac{b}{1-a}$. **C.** $\dfrac{a}{b-1}$. **D.** $\dfrac{a}{b+1}$.

Câu 22. Đặt $a = \ln 2; b = \ln 5$. Hãy biểu diễn $I = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ldots + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$ theo a và b.

A. $I = -2(a+b)$. **B.** $I = 2(a+b)$. **C.** $I = -2(a-b)$. **D.** $I = 2(a-b)$.

Câu 23. Tính giá trị của biểu thức $P = \log(\tan 1^\circ) + \log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \ldots + \log(\tan 89^\circ)$.

A. $P = 2$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = 1$. **D.** $P = \dfrac{1}{2}$.

Câu 24. Cho x, y là các số dương lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \dfrac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

A. $M = \dfrac{1}{4}$. **B.** $M = \dfrac{1}{2}$. **C.** $M = \dfrac{1}{3}$. **D.** $M = 1$.

Câu 25. Để đặc trưng đo độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ âm là đề xin ben (đB). Khi đó, mức cường độ âm L của âm được tính theo công thức $L(I) = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, trong đó I là cường độ âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12}\, w/m^2$). Hai cây đàn ghi ta giống nhau, cùng hoà tấu một bản nhạc. Mỗi cây đàn phát ra âm có mức cường độ âm trung bình là 60 đB. Hỏi mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra là bao nhiêu?

A. 63 đB. **B.** 58 đB. **C.** 120 đB. **D.** 70 đB.

–HẾT–

§3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số mũ

Dạng: $y = a^x$, trong đó $0 < a \neq 1$.

① Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là $\mathbb{R}$;

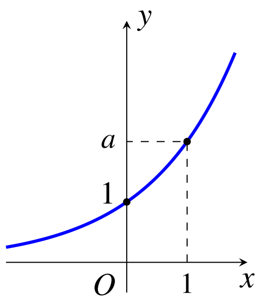
① Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $(0; +\infty)$.

Đồ thị hàm số $y = a^x$:

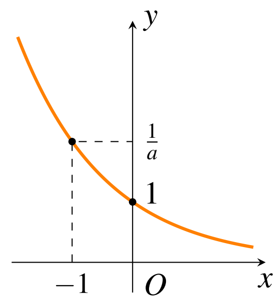
① Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

② Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

③ Đồ thị luôn qua $(0; 1)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.



$a > 1$



$0 < a < 1$

2 Hàm số lôgarit

Dạng: $y = \log_a x$, trong đó $0 < a \neq 1$ và $x > 0$.

① Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là $(0; +\infty)$;

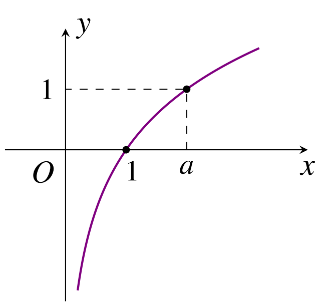
① Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$:

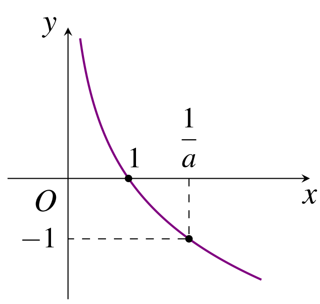
① Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

② Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

③ Đồ thị luôn qua $(1; 0)$ và luôn nằm bên phải trục tung.



$a > 1$



$0 < a < 1$

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT 1 Tìm tập xác định

- Đối với hàm số $y = a^{u(x)}$: Ta chỉ cần tìm điều kiện để $u(x)$ có nghĩa.
- Đối với hàm số $y = \log_a u(x)$: Ta tìm điều kiện để $u(x) > 0$.

> Với hàm số $y = \log_a b^{2n}$, ta chỉ cần điều kiện $b \neq 0$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của các hàm số sau:

a) $y = \log_2 x$;

b) $y = \log_3(x-2)$;

c) $y = \log_{\frac{1}{3}}(4-2x)$;

d) $y = \log_3(x^2 - x - 2)$;

e) $y = \ln\left(x^2 + 3x + 2\right)$;

f) $y = \log_5 \dfrac{x-3}{x+2}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của các hàm số sau:

a) $y = \log_3 x^2$;

b) $y = \log_3\left(4 - x^2\right)^4$;

c) $y = \dfrac{1}{\log_3 x}$;

d) $y = \dfrac{1}{\log_3(x-1)}$;

e) $y = \log|\sin x|$;

f) $y = \ln(1 - \cos x)$.

DT 2 Đồ thị hàm số

Để vẽ đồ thị hàm mũ $y = a^x$ hoặc hàm lôgarit $y = \log_a x$, ta làm như sau:

① Lập bảng giá trị của hàm số cần vẽ;

② Căn cứ vào cơ số và hình dáng đồ thị, ta vẽ đường cong qua các điểm đã cho.

Ví dụ 3. Vẽ đồ thị của các hàm số mũ sau:

a) $y = 2^x$; b) $y = (\sqrt{3})^x$; c) $y = \mathrm{e}^x$; d) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

e) $y = \log_2 x$; f) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; g) $y = \ln x$; h) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

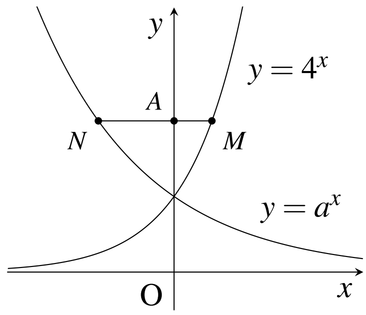
Ví dụ 4. Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = 0,5^x$:

a) Nằm phía trên đường thẳng $y = 1$;

b) Nằm phía trên đường thẳng $y = 4$;

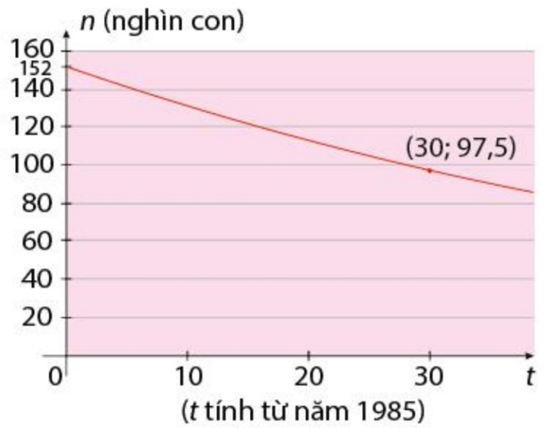
Ví dụ 5.

Cho số thực a dương, khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đường $y = 4^x$, $y = a^x$, trục tung lần lượt tại M, N, A thì $AN = 2AM$ (hình vẽ bên). Tính a.



DT 3 Vận dụng. Thực tiễn

Ví dụ 6. Đồ thị Hình bên dưới cho thấy số lượng hươu cao cổ trên thế giới suy giảm nghiêm trọng trong 30 năm qua (từ năm 1985 đến 2015) (nguồn: https://tuoitre.vn/huou-cao-co-sap-vao-danhsach-loai-gap-nguy-hiem-20190428162017473.htm).



Giả sử rằng số lượng hươu ở đây giảm theo hàm số $n(t) = C \cdot a^t$.

a) Tìm số lượng hươu vào năm 1985.

b) Tìm hàm số biểu diễn số lượng hươu sau t năm kể từ năm 1985.

c) Dự đoán số lượng hươu vào năm 2025.

Ví dụ 7. Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của ${}_{6}^{14}C$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử ${}_{6}^{14}C$ giảm đi một nửa.

a) Gọi m_0 là khối lượng của ${}_{6}^{14}C$ tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của ${}_{6}^{14}C$ tại thời điểm t (năm).

b) Một cây còn sống có lượng ${}_{6}^{14}C$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ${}_{6}^{14}C$ trong cây phân rã theo chu ki bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng ${}_{6}^{14}C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a) $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x}$; b) $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x}$; c) $y=\log_{\sqrt{3}}x$; d) $y=-\log_{2}x$.

2 So sánh các cặp số sau

a) $1{,}04^{1{,}7}$ và $1{,}04^{2}$.

b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ và $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

c) $1{,}2^{0{,}3}$ và $0{,}9^{1{,}8}$.

d) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-0{,}4}$ và $3^{-0{,}2}$.

3 So sánh các cặp số sau

a) $2\log_{0{,}6}5$ và $3\log_{0{,}6}(2\sqrt[3]{3})$.

b) $6\log_{5}2$ và $2\log_{5}6$.

c) $\dfrac{1}{2}\log_{2}121$ và $2\log_{2}2\sqrt{3}$.

d) $2\log_{3}7$ và $6\log_{9}4$.

4 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\log(x-1)$;

b) $y=\log_{\frac{2}{3}}(2020-x)$;

c) $y=\log(2x-x^{2})$;

d) $y=\log_{2}\dfrac{3-x}{2x}$;

e) $y=\ln(x-2)^{2}+\log(x+1)$;

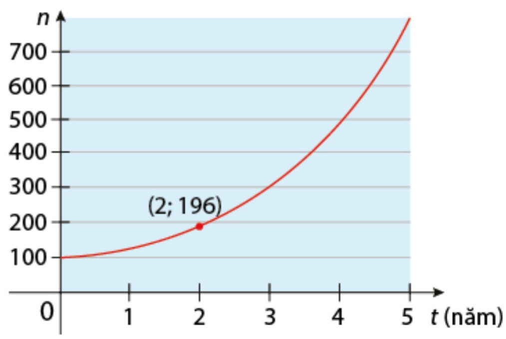
f) $y=\log_{2}|x^{2}-4|$.

5 Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y=\log_{3}x$:

a) Nằm phía trên đường thẳng $y=1$;

b) Nằm phía dưới trục hoành.

6 Lúc đầu trong ao có một số con ếch. Người ta ghi nhận số lượng ếch trong 5 năm đầu như Hình bên dưới.



Giả sử số lượng ếch tăng theo hàm số $n(t)=C\cdot a^{t}$.

a) Tính số lượng ếch lúc ban đầu.

b) Tìm hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao.

c) Dự đoán số lượng ếch sau 15 năm.

7 Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln\left(x^2 - 2mx + 4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

8 Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = \ln(x^2 - 2mx + m + 2)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

9 Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \log_{a^2-2a+1} x$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

10 Chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức:

$$m = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

11 Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t$ (mg), trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$.

b) Biết rằng bệnh nhân đã uống 100 mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80 mg. Hãy xác định giá trị của D_0 và a.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (THPTQG 2021 – Mã đề 101). Tập xác định của hàm số $y = 9^x$

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \log_3 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 3. Hàm số nào trong các hàm số sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y = \log_2 x$. **B.** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

C. $y = \tan x$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

Câu 4. Tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log_{2018}(2x-1)$ là

A. $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **C.** $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathscr{D} = \left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số y = $\log_2 \sqrt{6-x}$.

A. $D = \mathbb{R}\setminus\{6\}$. **B.** $D = (-\infty;6)$. **C.** $D = (6;+\infty)$. **D.** $D = (-\infty;6]$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \ln|4 - x^2|$ là

A. $\mathbb{R}\setminus[-2;2]$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-2;2)$.

Câu 7. Hàm số $y = \log_5(4x - x^2)$ có tập xác định là

A. $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. **B.** $\mathscr{D} = (0;4)$.

C. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. **D.** $\mathscr{D} = (-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

Câu 8. Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \log(x^2 + 2x + 3)$.

A. $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2;-1\}$. **B.** $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathscr{D} = \varnothing$. **D.** $\mathscr{D} = (-\infty;-2) \cup (-1;+\infty)$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln(5-x)}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. **B.** $[-1;5) \setminus \{4\}$. **C.** $(-1;5)$. **D.** $[-1;5]$.

Câu 10. Hàm số nào trong các hàm số sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 9^x$. **B.** $y = \log_{0,9} x$. **C.** $y = \log_9 x$. **D.** $y = (0,9)^x$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$.

A. $0 < a < 1$. **B.** $a > 1$. **C.** $1 < a < 2$. **D.** $a > 2$.

Câu 12. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^x$. **B.** $y = \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\mathrm{e}}\right)^x$.

C. $y = \log_7\left(x^4+5\right)$. **D.** $y = \left(\dfrac{\sqrt{2018}-\sqrt{2015}}{10^{-1}}\right)^x$.

Câu 13. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b < 0$. **B.** $(0,5)^a < (0,5)^b$. **C.** $\ln a > \ln b$. **D.** $2^a > 2^b$.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. Nếu $0 < a < b$ thì $\ln a < \ln b$. **B.** Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a < \log_{\frac{\pi}{4}} b$.

C. Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{\mathrm{e}}{2}} a < \log_{\frac{\mathrm{e}}{2}} b$. **D.** Nếu $0 < a < b$ thì $\log a < \log b$.

Câu 15. Cho hai đồ thị $(C_1): y = 2^x$ và $(C_2): y = 3^{-x}$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc (C_1) và (C_2). Biết M và N đối xứng nhau qua $I\left(0;\frac{5}{2}\right)$. Tính độ dài đoạn MN.

A. $MN = 2$. **B.** $MN = \sqrt{5}$. **C.** $MN = \dfrac{5}{2}$. **D.** $MN = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \pi^{\cos x}, x \in \mathbb{R}$.

A. $M = \pi, m = \dfrac{1}{\pi}$. **B.** $M = \sqrt{\pi}, m = 1$. **C.** $M = \pi, m = 1$. **D.** $M = \pi, m = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

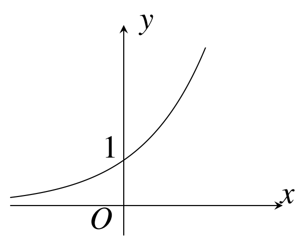
Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số $y = (2020-a)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $a < 2019$. **B.** $a < 2020$. **C.** $2019 < a < 2020$. **D.** $0 < a < 1$.

Câu 18. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

A. $y = 2^x$. **B.** $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

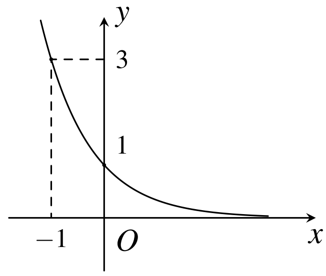
C. $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **D.** $y = \log_2 x$.



Câu 19. Đồ thị có trong hình vẽ kề bên là của hàm số nào dưới đây?

A. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. **B.** $y=(\sqrt{2})^x$.

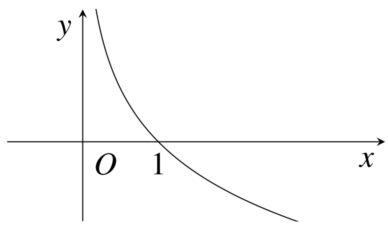
C. $y=(\sqrt{3})^x$. **D.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Câu 20. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

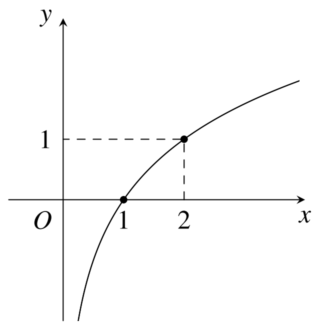
A. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **B.** $y=2^x$.

C. $y=\log_2 x$. **D.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Câu 21. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

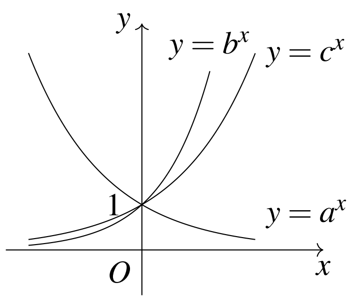
A. $y=\frac{x-1}{x}$. **B.** $y=\sqrt{x-1}$. **C.** $y=\ln x$. **D.** $y=\log_2 x$.



Câu 22. Cho a,b,c là các số thực dương, khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1<a<c<b$. **B.** $a<1<c<b$.

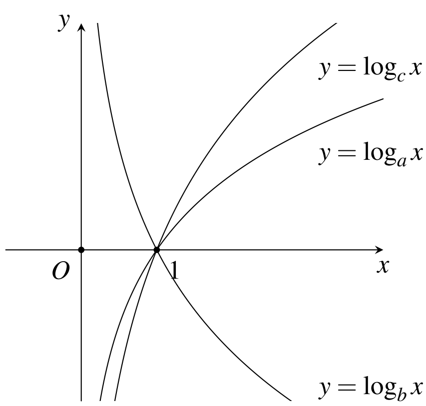
C. $a<1<b<c$. **D.** $1<a<b<c$.



Câu 23. Cho a,b,c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=\log_x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

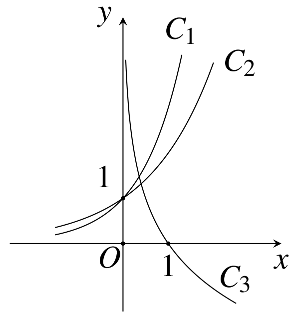
A. $a<b<c$. **B.** $b<c<a$.

C. $b<a<c$. **D.** $c<a<b$.



Câu 24. Cho ba hàm số $y=a^x, y=b^x, y=\log_c x$ lần lượt có đồ thị $(C_1),(C_2),(C_3)$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

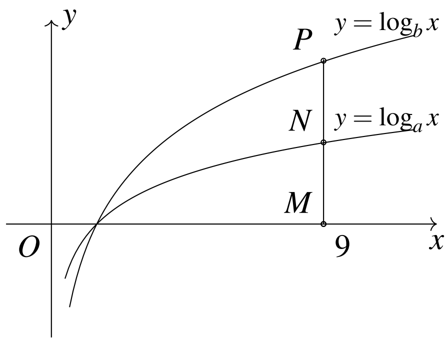
A. $a>b>c$. **B.** $b>a>c$. **C.** $c>b>a$. **D.** $c>a>b$.



Câu 25. Cho hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C') (như hình vẽ bên). Đường thẳng $x=9$ cắt trục hoành và các đồ thị (C) và (C') lần lượt tại M, N và P. Biết rằng $MN=NP$, hãy xác định biểu thức liên hệ giữa a và b

A. $a=b^2$. **B.** $a=9b$.

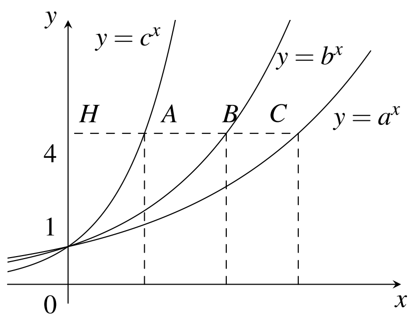
C. $a=3b$. **D.** $a=b+3$.



Câu 26. Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1): y=a^x$, $(C_2): y=b^x$, $(C_3): y=c^x$ và đường thẳng $y=4$ cắt các đường cong (C_1), (C_2), (C_3) lần lượt tại các điểm A, B, C, D sao cho $HA=AB=BC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $ac^2=b^3$. **B.** $a+3c=4b$.

C. $ac^3=b^4$. **D.** $a+2c=3b$.



Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+2}$. Khi đó tổng $f(0)+f\left(\dfrac{1}{10}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{19}{10}\right)$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{59}{6}$. **B.** 10. **C.** $\dfrac{19}{2}$. **D.** $\dfrac{28}{3}$.

Câu 28. Số lượng của một loại vi khuẩn X trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $x(t)=x(0)\cdot 2^t$, trong đó $x(0)$ là số lượng vi khuẩn X ban đầu, $x(t)$ là số lượng vi khuẩn X sau t (phút). Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn X là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn X là 10 triệu con?

A. 5 phút. **B.** 8 phút. **C.** 7 phút. **D.** 6 phút.

Câu 29. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ qua điểm $(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

A. -2016. **B.** -2020. **C.** 2016. **D.** 2020.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\log_2\dfrac{mx}{2-x}$, $(m>0)$. Với mọi số thực a, $b\in(0;2)$ thỏa mãn $a+b=2$ ta luôn có $f(a)+f(b)=3$ khi và chỉ khi

A. $m=3$. **B.** $m=8$. **C.** $m=2\sqrt{2}$. **D.** $m=9$.

—HẾT—

§4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

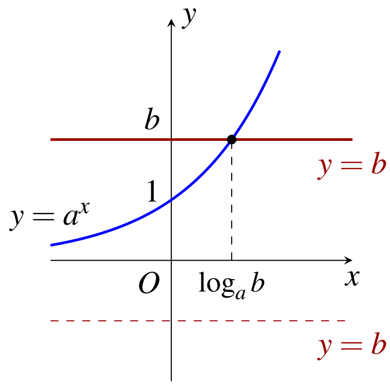
1 Công thức nghiệm của phương trình mũ

- Dạng $\boxed{a^x = b}$ (1), với $a > 0$ và $a \neq 1$.
- Về mặt đồ thị, nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = a^x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang).

  Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

  ① $b > 0$ (1) có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

  ② $b \leq 0$ (1) vô nghiệm.



GHI NHỚ

Với $a > 0$ và $a \neq 1$, $b > 0$, ta có các công thức sau đây:

① $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$ ② $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

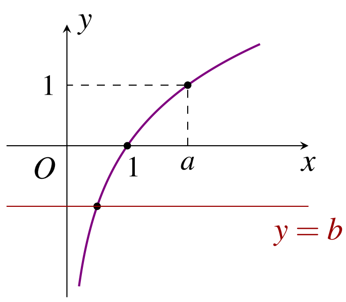
2 Công thức nghiệm của phương trình lôgarit

- Dạng $\boxed{\log_a x = b}$ (2), với $a > 0$ và $a \neq 1$.
- Về mặt đồ thị, nghiệm của (2) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = \log_a x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang).

  Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

  ① Với mọi b, (2) luôn có nghiệm duy nhất.

  ② $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.



GHI NHỚ

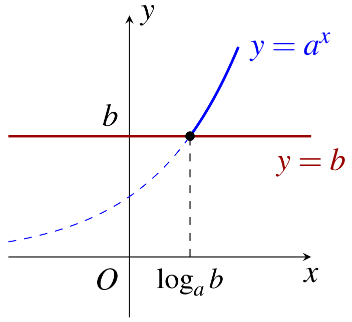
Với $a > 0$ và $a \neq 1$, b bất kì, ta có các công thức sau đây:

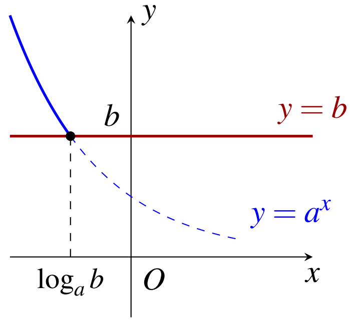
① $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

② $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{(hoặc } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

3 Công thức nghiệm của bất phương trình mũ

Minh họa dạng $\boxed{a^x > b}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.





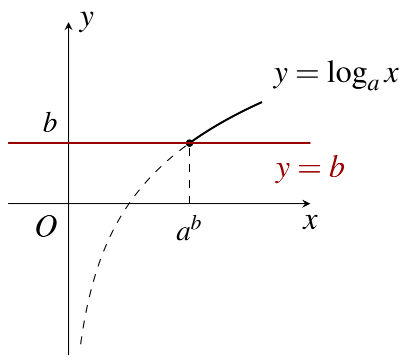
- Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
- Nếu $b > 0$, ta có hai trường hợp:

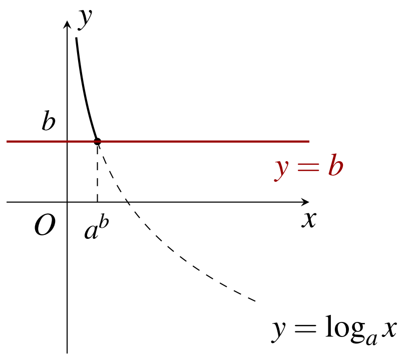
① Với $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$ (Hình bên trái).

② Với $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$ (Hình bên phải).

4 Công thức nghiệm của bất phương trình lôgarit

Minh họa dạng $\boxed{\log_a x > b}$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.





- Điều kiện xác định là $x > 0$.
- Ta có hai trường hợp:

① Với $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$ (Hình bên trái).

② Với $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$ (Hình bên phải).

Các trường hợp $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$, $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$... ta suy luận tương tự.

- *Cơ số $a > 1$: Ta so sánh "cùng chiều";*
- *Cơ số $0 < a < 1$: Ta so sánh "nghịch chiều".*

CHÚ Ý

Khi giải phương trình hoặc bất phương trình logarit, ta cần chú ý đặt điều kiện để các biểu thức logarit có nghĩa trước khi biến đổi (nếu không chắc phép biến đổi đó là phép biến đổi tương đương)

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT 1 Giải các phương trình mũ và logarit đơn giản

Ví dụ 1. Giải các phương trình mũ sau:

a) $2^x = 3$;

b) $2^{x-1} = 32$;

c) $5^{x^2-5x-6} = 1$;

d) $4^{2x+5} = 2^{2-x}$;

e) $3^{x-4} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{3x-1}$;

f) $(0,4)^{8-2x^2} = (6,25)^{3x}$;

g) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x}$;

h) $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 12$;

i) $2^x \cdot 15^{x+1} = 3^{x+3}$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình lôgarit sau:

a) $\log(x-1)=2$

b) $\log_2\left(x^2-19x+2\right)=9$

c) $\log_{0,25}(x^2+3x)=-1$

d) $\log_2\left(x^2-4x+3\right)=\log_2(4x-4)$

e) $2\log_2 x=\log_2(2-x)$

f) $\ln x+\ln(3x-2)=0$

g) $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$

h) $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$

i) $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1.$

j) $\log_2\left(x^2-3\right)-\log_2(6x-10)+1=0$

k) $2\log_4 x+\log_2(x-3)=2$

l) $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$

DT 2 Giải các bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $3^{x-1} > 1$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \geq 2$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$

d) $(0,125)^{x^2} > \left(\frac{1}{8}\right)^{5x-6}$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-12} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{x}$

f) $4^{x} > 2^{x+8}$;

g) $3^{2x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2}$;

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x}$;

Ví dụ 4. Giải các bất phương trình lôgarit sau:

a) $\log x \geq 1$

b) $\log_2(3x-1) > 3$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$

d) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$

e) $\log_2(x^2-x-2) \leq 2\log_2(3-x)$

f) $2\log_2(x-1) > \log_2(5-x)+1$

DT 3 Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 5. Áp suất khí quyển p lên một vật giảm khi độ cao tăng dần. Giả sử áp suất này (tính bằng milimét thuỷ ngân) được biểu diễn theo độ cao h (tính bằng kilômét) so với mực nước biển bằng công thức $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h}$.

a) Một máy bay đang chịu áp suất khí quyển 320 mmHg. Tìm độ cao của máy bay đó.

b) Một người đứng trên đỉnh của một ngọn núi và chịu áp suất khí quyển 667 mmHg. Tìm chiều cao của ngọn núi này.

Ví dụ 6. Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kì bán rã là $T = 703800000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng Uranium-235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

Ví dụ 7. Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililít nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililít nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililít nước có 9000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 6000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1000?

Ví dụ 8. Giả sử giá trị còn lại V (triệu đồng) của một chiếc ô tô nào đó sau t năm được cho bằng công thức $V(t) = 730 \cdot (0,82)^t$.

a) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng?

b) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng? (Kết quả của câu a và câu b được tính tròn năm).

Ví dụ 9. Ông A gửi vào ngân hàng 300 triệu đồng theo thể thức lãi kép với lãi suất 10%/năm.Trong quá trình gửi lãi suất không đổi và ông A không rút tiền ra. Hỏi sau ít nhất mấy năm thì ông A rút được số tiền cả vốn và lãi đủ 500 triệu đồng?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Giải các phương trình mũ sau:

a) $2^{2x-1}=\frac{1}{8}$

b) $e^{3x^2+x-2}=1$

c) $9^{x+1}=27^{2x+1}$

d) $2^{x+1}+5\cdot 2^x-2^{x+2}=21$

e) $2\cdot 5^{x+1}-5^x=2^{x+1}+2^{x+3}$

f) $27^{\frac{x-2}{x-1}}=\frac{\sqrt{3}^{7x}}{243}$

2 Giải các phương trình lôgarit sau:

a) $\log_3 x=2$

b) $\log_3(2x-1)=2$

c) $\log_5(3x^2-2x+1)=\log_5(x+1)$

d) $\log x=\log(x+3)-\log(x-1)$.

e) $\log_2(x+1)=1+\log_2(x-1)$

f) $\log_{\sqrt{2}}(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$

3 Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$

b) $2^{x^2-2x}>8$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x}\geqslant\frac{1}{125}$

d) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{x^2+1}\geq\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{3x-1}$.

e) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}>\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}$

f) $5^{x-1}\geq 5^{x^2-x-9}$

4 Giải các bất phương trình lôgarit sau:

a) $\log_5(3x+2)>1$;

b) $\log_{\frac{1}{4}}(4x-2)\geq -1$;

c) $\log_{\frac{2}{3}}(3x)>\log_{\frac{2}{3}}(2x+7)$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$;

e) $\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5)\geq\log_{2-\sqrt{3}}(x-1)$;

f) $\log_2(4x+8)-\log_2 x\leq 3$.

5 Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_3(x+4)<2$;

b) $\log_{\frac{1}{2}}x\geq 4$;

c) $\log_{0,25}(x-1)\leq -1$;

d) $\log_5\left(x^2-24x\right)\geq 2$;

e) $2\log_{\frac{1}{4}}(x+1)\geq\log_{\frac{1}{4}}(3x+7)$;

f) $2\log_3(x+1)\leq 1+\log_3(x+7)$.

6 Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\mathrm{pH}=-\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A?

7 Người ta nuôi cấy vi khuẩn Bacillus subtilis trong nồi lên men và thu được số liệu sau: Lúc ban đầu, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $2\cdot 10^2$. Sau 13 giờ, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $3{,}33\cdot 10^9$. Biết vi khuẩn Bacillus subtilis sinh trưởng trong điều kiện hoàn toàn tối ưu và sinh sản theo hình thức tự nhân đôi. Hỏi sau bao nhiêu phút, vi khuẩn Bacillus subtilis tự nhân đôi một lần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

8 Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t, T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ biến thành chất khác). Với $T = 1000$ năm, hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm khối lượng chất phóng xạ còn lại nhỏ hơn $\frac{1}{6}$ khối lượng chất phóng xạ ban đầu?

9 Dân số thành phố Hà Nội năm 2022 khoảng 8,4 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Hà Nội không đổi và bằng $r = 1{,}04\%$. Biết rằng sau t năm dân số Hà Nội (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức: $S = A\cdot\mathrm{e}^{rt}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số của Hà Nội vượt quá 10 triệu người?

10 [Đề minh họa BDG 2019-1020] Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: Nếu sau n quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức: $P(n) = \frac{1}{1+49\cdot\mathrm{e}^{-0{,}015n}}$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

11 Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1 200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian (tính bằng cent) giữa hai nốt nhạc có tần số a và b là

$$n = 1200\cdot\log_2\frac{a}{b}.$$

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008)

a) Tìm khoảng thời gian tính bằng cent khi tần số thay đổi từ 443 Hz về 415 Hz.

b) Giả sử khoảng thời gian là 55 cent và tần số đầu là 225 Hz, hãy tìm tần số cuối cùng.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

A. $x = \frac{5}{2}$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = \frac{3}{2}$. **D.** $x = 3$.

Câu 2. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2+x} = 4$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 3. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2^{-x}+3$ và đường thẳng $y = 11$ là

A. $(-3;11)$. **B.** $(4;11)$. **C.** $(-4;11)$. **D.** $(3;11)$..

Câu 4. Biết rằng phương trình $2^{x^2-4x+2} = 2^{x-4}$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2. Tính giá trị biểu thức $S = x_1^4 + x_2^4$.

A. $S = 17$. **B.** $S = 257$. **C.** $S = 97$. **D.** $S = 92$.

Câu 5. Tìm nghiệm của phương trình $5^{2018x} = \sqrt{5}^{2018}$.

A. $x = 1-\log_5 2$. **B.** $x = -\log_5 2$. **C.** $x = \frac{1}{2}$. **D.** $x = 2$.

Câu 6. Tìm nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x-1}} = e^{\ln 81}$.

A. $x = 5$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 6$. **D.** $x = 17$.

Câu 7. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6}$

A. $S = \{-1\}$. **B.** $S = \{1\}$. **C.** $S = \{-3\}$. **D.** $S = \{3\}$.

Câu 8. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $5^x - 1 - m = 0$ có nghiệm.

A. $m > 0$. **B.** $m > -1$. **C.** $m < 0$. **D.** $m < -1$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\log_2 x = 3$ là

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{64}(x+1) = \frac{1}{2}$.

A. -1. **B.** 4. **C.** 7. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 11. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = 3$ là

A. $\{-3; 3\}$. **B.** $\{-3\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Câu 12. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \log_2(x^2 + 3x)$ và đường thẳng $y = 2$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 13. Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 14. Giải phương trình $\log_4(x+1) + \log_4(x-3) = 3$.

A. $x = 1 \pm 2\sqrt{17}$. **B.** $x = 1 + 2\sqrt{17}$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 33$.

Câu 15. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$.

A. $S = (-3; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 3)$. **C.** $S = (-\infty; -3)$. **D.** $S = (3; +\infty)$.

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

A. $(0; 6)$. **B.** $(-\infty; 6)$. **C.** $(0; 64)$. **D.** $(6; +\infty)$.

Câu 17. Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \frac{1}{32}$ có tập nghiệm là $S = (a; b)$. Khi đó giá trị $b - a$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 18. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2-2x} \leqslant \left(\sqrt{2}\right)^3$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,3}(3x - 2) \geq 0$ là

A. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; , 1\right]$. **D.** $(2; +\infty)$.

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x - 3) < \log_{0,5}\left(x^2 - 4x + 3\right)$ là

A. $(3; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $\varnothing$. **D.** $(2; 3)$.

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x - 1) \leq \log x$ là

A. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **B.** $(-\infty; 1]$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$. **D.** $(0; 1]$.

Câu 22. Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) > 0$ là

A. $S=(-\infty;2)$.
B. $S=(2;3)$.
C. $S=(3;+\infty)$.
D. $S=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 23. Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $3^x+1\geq m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m<0$.
B. $m\leq 1$.
C. $m\leq 0$.
D. $m>1$.

Câu 24. Ông An gửi tiền vào ngân hàng với thể thức lãi kép theo công thức $T_n=A(1+r)^n$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất, n là số kì hạn, T_n là số tiền cả gốc lẫn lãi sau n kì hạn gửi. Nếu ông An gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5%/năm và không rút tiền gốc lẫn lãi định kì thì sau bao nhiêu năm ông ấy nhận được số tiền ít nhất là 250 triệu đồng.

A. 3.
B. 10.
C. 15.
D. 8.

Câu 25. Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 0,7%/tháng và lãi hàng tháng được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu tháng người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 96.
B. 97.
C. 99.
D. 100.

Câu 26. Anh Nam muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm. Vậy ngay từ bây giờ số tiền ít nhất anh Nam phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền mua nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là

A. 397 triệu đồng.
B. 396 triệu đồng.
C. 395 triệu đồng.
D. 394 triệu đồng.

Câu 27. Một người sử dụng xe máy có giá trị ban đầu là 40 triệu đồng. Sau mỗi năm, giá trị xe giảm 10% so với năm trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì giá trị xe nhỏ hơn 12 triệu đồng?

A. 9.
B. 10.
C. 11.
D. 12.

Câu 28. (QG.2020 lần 1 – Mã đề 103). Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

A. Năm 2029.
B. Năm 2051.
C. Năm 2030.
D. Năm 2050.

Câu 29. Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình hằng năm là 4% thì chi phí C cho việc mua một loại hàng hoá hoặc sử dụng một dịch vụ nào đó sẽ được mô hình hoá bằng công thức:

$$C(t)=P(1+0,04)^t,$$

trong đó t là thời gian (tính bằng năm) kể từ thời điểm hiện tại và P là chi phí hiện tại cho hàng hoá hoặc dịch vụ đó.
Giả sử hiện tại chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô là 800 nghìn đồng. Hãy ước tính chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô sau 5 năm nữa (kết quả tính theo đơn vị nghìn đồng và làm tròn đến hàng đơn vị).

A. Khoảng 1 triệu 100 nghìn đồng.
B. Khoảng 900 nghìn đồng.
C. Khoảng 973 nghìn đồng.
D. Khoảng 873 nghìn đồng.

Câu 30. Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S=A\cdot e^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau N năm và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Nếu dân số vẫn tăng với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người?

A. 2020.
B. 2026.
C. 2022.
D. 2025.

—HẾT—

Chương 7

ĐẠO HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Xét giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1). Nếu giới hạn (1) **hữu hạn** thì kết quả đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại điểm x_0. Kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Tức là

$$f'(x_0)=\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad (2)$$

Lưu ý:

- Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của biến tại x_0.
- Đại lượng$\Delta y = f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số.

Khi đó công thức (2) được viết thành

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (3)$$

CHÚ Ý

Muốn tính đạo hàm tại một điểm cho trước, ta chọn một trong hai công thức (2) hoặc (3).

2 Đạo hàm trên một khoảng

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó. Kí hiệu y' hoặc $f'(x)$

3 Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Vận tốc tức thời: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s=f(t)$ tại t_0. Nghĩa là

$$v(t_0)=s'(t_0)=f'(t_0).$$

Cường độ tức thời: Điện lượng Q truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình $Q = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $Q = f(t)$ tại t_0. Nghĩa là $I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0)$.

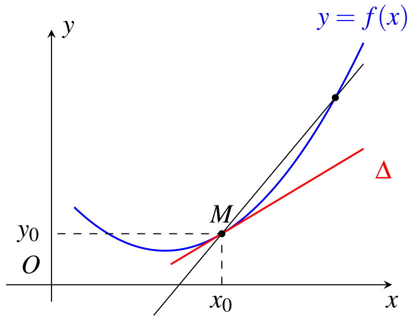
4 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a;b)$. Gọi $(\mathscr{C})$ là đồ thị của hàm số đó. Ta có hai kết quả sau:

① $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến Δ của đồ thị $(\mathscr{C})$ tại điểm $M(x_0;y_0)$.

② Phương trình tiếp tuyến Δ: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

- $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm;
- $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.



5 Quan hệ giữa sự tồn tại đạo hàm và tính liên tục

Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chú ý:

- Chiều đảo lại **không đúng**. Tức là, hàm số liên tục tại x_0 có thể không có đạo hàm tại x_0.
- Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính đạo hàm của hàm số y = f(x) tại một điểm

Chọn một trong hai cách:

Cách 1:

- Tính $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
- Nếu giới hạn này hữu hạn và có kết quả là a, thì ta kết luận $f'(x_0) = a$.

Cách 2:

- Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và tính giới hạn $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$;
- Nếu giới hạn này hữu hạn và có kết quả là a, thì ta kết luận $f'(x_0) = a$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ tại điểm $x_0 = 2$.

....
....
....

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x) = x^3$ tại $x = 3$;

b) $f(x) = 2x^2 + x + 1$ tại $x = 2$;

c) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ tại $x = 1$;

d) $f(x) = \sqrt{x}$ tại $x = 4$;

e) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ tại $x = 1$;

f) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ tại $x = 3$.

Ví dụ 3. Tính đạo hàm (nếu tồn tại) của hàm số $y = |x-1|x^2$ tại điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 4. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi} \quad x \neq 1 \\ a & \text{khi} \quad x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

DT 2 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cho trước

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = (2x+1)^2$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = -1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1;1)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^3$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 bất kì ($x_0 \in \mathbb{R}$).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-2;-8)$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = \sqrt{x}$.

a) Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 > 0$ bất kì.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 4.

DT 3 Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

- Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, trong đó s là quảng đường đi được trong thời gian t. Lúc đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.
- Ý nghĩa tổng quát: Đạo hàm của một hàm số chính là đặc trưng cho tốc độ thay đổi của hàm số theo biến số của nó.

Ví dụ 8. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 5\,\mathrm{s}$.

Ví dụ 9. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196\,\mathrm{m/s}$ (bỏ qua sức cản không khí). Tính vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm $t_0 = 10\,\mathrm{s}$. Biết gia tốc trọng trường là $g \approx 9,8\,\mathrm{m/s^2}$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính đạo hàm của các hàm số sau bằng định nghĩa

a) $y = x^2 + 3x - 2$ tại $x_0 = 1$.

b) $y = x^3 - 2x + 1$. Tính $y'(1)$.

c) $f(x) = x^3 + x - 2$. Tính $f'(-2)$.

d) $f(x) = \sqrt{2x+7}$. Tính $f'(1)$.

e) $y = \sqrt{3-2x}$. Tính $y(-3)$.

f) $y = \sqrt{x^2+5}$. Tính $y'(2)$.

g) $y = -\dfrac{3}{x}$ tại $x_0 = 2$.

h) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Tính $y'(2)$.

2 Chứng minh rằng hàm số $y = |x|$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 0$.

3 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \text{ nếu } x \geq 0 \\ 1 - 2x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

4 Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = 1$.

5 Tìm tọa độ điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, biết hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M bằng 3.

6 Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 4$.

7 Sau mùa lũ, tại địa phương A, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh đường ruột kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ n được xác định bởi công thức $D(n) = 45n^2 - n^3$. Hỏi tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tức thời tại thời điểm $n = 10$ là bao nhiêu?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính số gia của hàm số $y=x^2+2$ tại điểm $x_0=2$ ứng với số gia $\Delta x=1$.

A. $\Delta y=13$. **B.** $\Delta y=9$.
C. $\Delta y=5$. **D.** $\Delta y=2$.

Câu 2. Tính số gia của hàm số $y=x^3+x^2+1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x=1$.

A. $\Delta y=3x_0^2+5x_0+3$.
B. $\Delta y=2x_0^3+3x_0^2+5x_0+2$.
C. $\Delta y=3x_0^2+5x_0+2$.
D. $\Delta y=3x_0^2-5x_0+2$.

Câu 3. Tính số gia của hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0=-1$ ứng với số gia Δx.

A. $\Delta y=\dfrac{1}{2}(\Delta x)^2-\Delta x$.
B. $\Delta y=\dfrac{1}{2}\left[(\Delta x)^2-\Delta x\right]$.
C. $\Delta y=\dfrac{1}{2}\left[(\Delta x)^2+\Delta x\right]$.
D. $\Delta y=\dfrac{1}{2}(\Delta x)^2+\Delta x$.

Câu 4. Tính số gia của hàm số $y=x^2-4x+1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx.

A. $\Delta y=\Delta x(\Delta x+2x_0-4)$.
B. $\Delta y=2x_0+\Delta x$.
C. $\Delta y=\Delta x(2x_0-4\Delta x)$.
D. $\Delta y=2x_0-4\Delta x$.

Câu 5. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có $f'(-3)=7$?

A. $f(x)=\dfrac{1-2x}{x+4}$. **B.** $f(x)=\sqrt{x^2+40}$.
C. $f(x)=x^2-x+8$. **D.** $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{2x-1}$ tại điểm $x_0=1$ là

A. 2. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)=(m^3-3m^2+m)x+2017$. Tìm m để $f'(2)=3$.

A. $m=-1$. **B.** $m=1$.
C. $m=3$. **D.** $m=0$.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $f(x)=3x-1$ tại $x_0=1$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 9. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x)=-x^3$ tại điểm $M(-2;8)$ là

A. 12. **B.** -12.
C. 192. **D.** -192.

Câu 10. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C)\colon y=\dfrac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $y=-x-2$. **B.** $y=x-2$.
C. $y=-x+1$. **D.** $y=-x-1$.

Câu 11. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm $(-1;-1)$.

A. $y=-3x-4$. **B.** $y=-1$.
C. $y=3x-2$. **D.** $y=3x+2$.

Câu 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\dfrac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

A. $x+y+2=0$. **B.** $y=x+2$.
C. $y=x-2$. **D.** $y=-x+2$.

Câu 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

A. $y=8$. **B.** $y=-12x+16$.
C. $y=12x-24$. **D.** $y=12x-16$.

Câu 14. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y=\dfrac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\dfrac{1}{4}$.

A. $x+4y-1=0, x+4y+1=0$.
B. $x+4y-4=0, x+4y+4=0$.
C. $y=-\dfrac{1}{4}x-4, y=-\dfrac{1}{4}x+4$.
D. $y=-\dfrac{1}{4}x$.

Câu 15. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=t^2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t=2$ giây.

A. 2 m/s. **B.** 3 m/s.
C. 4 m/s. **D.** 5 m/s.

Câu 16. Một vật rơi tự do theo phương trình $s=\dfrac{1}{2}gt^2$, trong đó $g\approx 9,8$ m/s^2 là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t=5$s.

A. 49 m/s. **B.** 122,5 m/s.
C. 50 m/s. **D.** 123 m/s.

Câu 17. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4{,}9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

A. 1690 m . **B.** 1069 m.
C. 1906 m. **D.** 1960 m.

Câu 18. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì bận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t = 1$ s. **B.** $t = 2$ s.
C. $t = 3$ s. **D.** $t = 6$ s.

Câu 19. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

A. 6 m/s^2. **B.** 11 m/s^2.
C. 14 m/s^2. **D.** 20 m/s^2.

Câu 20. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8$ m/s ^{2} là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5$s) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0{,}001$s

A. $v_{\text{tb}} = 49$ m/s . **B.** $v_{\text{tb}} = 49{,}49$m/s.
C. $v_{\text{tb}} = 49{,}005$ m/s. **D.** $v_{\text{tb}} = 49{,}245$ m/s.

—HẾT—

§2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Quy tắc tính đạo hàm của tổng hiệu, tích thương

Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có các quy tắc sau:

① $(u+v)' = u' + v'$

② $(u-v)' = u' - v'$

③ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

④ $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$, với $v \neq 0$.

⑤ $(k \cdot u)' = k \cdot u'$, với k là hằng số.

⑥ $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, với $v \neq 0$.

2 Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Ta có công thức sau:

$$\boxed{[f(u)]' = f'(u) \cdot u'_x}$$

3 Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản và hàm hợp

STT	Đạo hàm của một số hàm sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của hàm hợp tương ứng, với u = u(x)
1	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
3	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
4	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
5	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
6	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
7	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
8	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
9	$(a^x)' = a^x . \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u . \ln a$
10	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
11	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính đạo hàm của hàm đa thức

Công thức sử dụng: Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

- $\boxed{\left(x^n\right)' = nx^{n-1}}$ → Hàm hợp: $\boxed{\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'}$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5$; b) $y = 2x^4$; c) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \sqrt{3}$;

d) $y = x^3 + x^2 - 6$; e) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; f) $y = x^5(3 - 2x^4)$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x-3)^2$; b) $y = (x^2+x)^8$; c) $y = (x^2 - 5x^4)^6$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $f'(x)=0$, với

a) $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$;

b) $f(x)=x^3+3x^2$;

c) $f(x)=-x^4+6x^2-3$;

d) $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+3x^2-4x+4$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$. Giải bất phương trình $f'(x)>0$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{x}+x$. Giải bất phương trình $f'(x)\leq 0$.

DT 2 Tính đạo hàm của hàm chứa căn thức

Công thức sử dụng: Với $x > 0$, ta có:

- $\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$ → Hàm hợp: $\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}$

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 2\sqrt{x}$;

b) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{3}$;

c) $y = x\sqrt{x}$.

Ví dụ 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 7}$;

b) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

c) $y = \sqrt{2x^2(2 - x^2)}$.

Ví dụ 8. Giải phương trình $f'(x) = 0$ với

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; c) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

DT 3 Tính đạo hàm của hàm lượng giác

Công thức sử dụng:

- $\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$ → Hàm hợp: $\boxed{(\sin u)' = u' \cdot \cos u.}$
- $\boxed{(\cos x)' = -\sin x.}$ → Hàm hợp: $\boxed{(\cos u)' = -u' \cdot \sin u.}$
- $\boxed{(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.}$ → Hàm hợp: $\boxed{(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}.}$
- $\boxed{(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}}$ → Hàm hợp: $\boxed{(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}.}$

Ví dụ 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin x + x$; b) $y = \sin x + 3\cos x$; c) $y = \tan x - \sqrt{3}\cot x$;

d) $y = \sin(2x)$; e) $y = \sin^2 x$; f) $y = \cos^2 4x$;

Ví dụ 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$;   b) $y = \tan 5x$;   c) $y = \cos 3x + \tan\left(x^2 + 2x\right)$.

d) $y = \sin 2x - \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.   e) $y = \sqrt{1 + \sin 2x}$;   f) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$.

DT 4 Tính đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit

Công thức sử dụng:

- $\boxed{(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.}$ → Hàm hợp: $\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u.}$
- $\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a.}$ → Hàm hợp: $\boxed{(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a.}$
- $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.}$ → Hàm hợp: $\boxed{(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}.}$
- $\boxed{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}.}$ → Hàm hợp: $\boxed{(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}.}$

Ví dụ 11. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 10^x$ b) $y = \log_5 x$ c) $y = \ln(1 + x^2)$

d) $y = \mathrm{e}^{2x+1}$ e) $y = \log_2 (x + \mathrm{e}^x)$. f) $y = \log_8 \left(x^2 - 3x - 4\right)$

Ví dụ 12. Cho hàm số $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$. Tính $f'(1)$.

DT 5 Tính đạo hàm dạng tích hoặc thương

Các quy tắc cần nhớ:

① $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$

② $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$, với $v \neq 0$.

③ $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, với $v \neq 0$.

Công thức giải nhanh:

① $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

② $\left(\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x^2 + 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}$

- Định thức trên tử số, ta nhân theo chiều "dấu huyền" trừ cho "dấu sắc".
- Nghĩa là: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

Ví dụ 13. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ b) $y = \dfrac{2x-1}{4x-3}$ c) $y = \dfrac{5x}{1-4x}$.

d) $y = \dfrac{x^2-3x+7}{2x-5}$ e) $y = \dfrac{2x-5}{x^2+x+2}$ f) $y = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

Ví dụ 14. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2\sqrt{x}$.

b) $y = (x-1)\sqrt{3x+2}$.

c) $y = x\sqrt{1-x^2}$

d) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

e) $y = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}$.

f) $y = \dfrac{1+\sqrt{x+3}}{x-1}$

Ví dụ 15. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot \cos x$.

b) $y = (2 - x^2) \cdot \sin 3x$.

c) $y = x \cdot \cot 2x$.

d) $y = \dfrac{x}{\cos x}$.

e) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

f) $y = \dfrac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\sin x + \cos x}$.

Ví dụ 16. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = xe^x$;

b) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$;

c) $y = \dfrac{x+1}{4^x}$;

d) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

e) $y = (x^2 + 4x + 3)e^{2x}$;

f) $y = (x+1)\log_2\left(x^2 - 4\right)$.

DT 6 Viết phương trình tiếp tuyến

1 Đề bài cho trước $(x_0; y_0)$:

① Tính $f'(x_0)$.

② Thay vào công thức $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0}$, thu gọn kết quả về dạng $y = Ax + B$.

2 Đề bài chưa cho đầy đủ $(x_0; y_0)$, ta thường gặp các loại sau:

① Cho biết trước x_0 hoặc y_0. Ta chỉ việc thay giá trị đó vào hàm số $y = f(x)$, sẽ tính được đại lượng còn lại.

② Cho trước 1 điều kiện giải. Ta chỉ việc giải điều kiện đó, tìm x_0.

- Nếu đề bài cho biết hệ số góc của tiếp tuyến $k = a$, ta giải $f'(x) = a$ tìm nghiệm x_0. Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

  + Tiếp tuyến $d \parallel \Delta$: $y = ax + b \Rightarrow k = a$

  + Tiếp tuyến $d \perp \Delta$: $y = ax + b \Rightarrow k = -\dfrac{1}{a}$

- Nếu đề bài cho tiếp điểm là giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta giải $f(x) = g(x)$ để tìm nghiệm x_0.

Ví dụ 17. Cho đường cong $(C): \ y = f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 4x + 1$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -3$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

Ví dụ 18. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C):\ y = f(x) = x(x^2+x-1)+1$ tại điểm có tung độ bằng -1.

Ví dụ 19. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta:\ 3x+y=2$.

Ví dụ 20. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C):\ y = \dfrac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta:\ 3x+y-2=0$.

DT 7 Các bài toán vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 21. Năm 2010, dân số ở một tỉnh D là 1 038 229 người. Tính đến năm 2015, dân số tỉnh đó là 1 153 600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức $S(N) = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số $S'(N)$. Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

Ví dụ 22. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8x + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (s).

Ví dụ 23. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=-\frac{3x^2}{2}+\frac{2}{x}+\frac{x^3}{3}$;

b) $y=(x+1)^2\left(x^2-1\right)$;

c) $y=\frac{x^2-2x}{x^2+x+1}$;

d) $y=\frac{1-2x}{x+1}$;

e) $y=xe^{2x+1}$;

f) $y=(2x+3)\,3^{2x+1}$;

g) $y=x\ln^2 x$;

h) $y=\log_2\left(x^2+1\right)$.

2 Cho hàm số $f(x)=3x^3-4\sqrt{x}$. Tính $f(4)$, $f'(4)$, $f\left(a^2\right)$, $f'\left(a^2\right)$ (a là hằng số khác 0).

3 Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=\frac{x}{\sin x-\cos x}$;

b) $y=\frac{\sin x}{x}$;

c) $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$;

d) $y=\cos(2\sin x)$.

4 Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ và $g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2$. Tính $f'(0)-g'(1)$.

5 Cho hàm số $f(x)=4\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)|\le 8$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tìm x để $f'(x)=8$.

6 Biết y là hàm số của x thoả mãn phương trình $xy=1+\ln y$. Tính $y'(0)$.

7 Giải phương trình $f'(x)=0$, biết $f(x)$ được cho bởi công thức sau:

a) $f(x)=x^3-3x^2+2$;

b) $f(x)=x^4-4x^2+2$;

c) $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+1}$;

d) $f(x)=(x-1)\sqrt{2x+1}$;

e) $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$;

f) $f(x)=\sin^2 x-x$.

8 Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2-6x-8$. Giải bất phương trình $y'\le 0$.

9 Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m+6)x+1$. Tìm tham số m sao cho $f'(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

10 Cho hàm số $y=3mx^3-2x^2+(3-m)x$. Tìm tham số m để phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu.

11 Cho hàm số $y=x^2+3x$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có

a) Hoành độ bằng -1;

b) Tung độ bằng 4.

12 Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) trong mỗi trường hợp sau

a) d song song với đường thẳng $y=5x-2$;

b) d vuông góc với đường thẳng $y=-20x+1$.

13 Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình $s=100+2t-t^2$ trong đó thời gian được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng 0?

b) Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại tời điểm $t=3$ s.

14 Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x)=200\,(x-2)\,(17-x)$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

15 Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là v_0 (m/s) (bỏ qua sức cản của không khí) thì độ cao h của vật (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc trọng trường). Tìm vận tốc của vật khi chạm đất.

16 Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức $s(t)=10+\sqrt{2}\sin\left(4\pi t+\dfrac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

17 Một mạch dao động điện từ LC có lượng điện tích dịch chuyển qua tiết diện thẳng của một dây xác định bởi hàm số $Q(t)=10^{-5}\sin\left(2000t+\dfrac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây, Q tính bằng Coulomb. Tính cường độ dòng điện tức thời I (A) trong mạch tại thời điểm $t=\dfrac{\pi}{1500}$ (s). Biết $I(t)=Q'(t)$.

18 Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vẫn cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t)=20t-\dfrac{5}{2}t^2$, trong đó $s(m)$ là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, t (s) là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh $(0\le t\le 4)$.

a) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh. Hãy cho biết xe ô tô trên có chạy quá tốc độ hay không, biết tốc độ giới hạn cho phép là 70 km/h.

b) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $u=u(x), v=v(x), v(x)\neq 0$. Hãy chọn khẳng định **sai**?

A. $(u+v)'=u'+v'$. **B.** $(ku)'=ku'$.

C. $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v}$. **D.** $(uv)'=u'v+uv'$.

Câu 2. Hàm số $y=x^4$ có đạo hàm trên $(-\infty;+\infty)$ là

A. $y'=3x^3$. **B.** $y'=4x^4$.

C. $y'=3x^4$. **D.** $y'=4x^3$.

Câu 3. Đạo hàm của hàm số $y=5x^3-x^2-1$ là

A. $15x^2-2x$. **B.** $15x^2-2x$.
C. $15x^2-2x-1$. **D.** $-2x$.

Câu 4. Hàm số $y=\sin x$ có đạo hàm là

A. $y'=\dfrac{1}{\cos x}$. **B.** $y'=\cos x$.
C. $y'=-\cos x$. **D.** $y'=-\sin x$.

Câu 5. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin 2x$.

A. $y'=-\cos 2x$. **B.** $y'=-2\cos 2x$.
C. $y'=\cos 2x$. **D.** $y'=2\cos 2x$.

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $y=2018^x$.

A. $y'=x\cdot 2018^{x-1}$.
B. $y'=\dfrac{2018^x}{\ln 2018}$.
C. $y'=2018^x\cdot\ln 2018$.
D. $y'=2018^x$.

Câu 7. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\log_2 x$ là

A. $x\ln 2$. **B.** $\dfrac{\ln 2}{x}$.
C. $\dfrac{1}{x\ln 2}$. **D.** $\dfrac{x}{\ln 2}$.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $y=\log_3(4x+1)$ là

A. $y'=\dfrac{4}{(4x+1)\ln 3}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{(4x+1)\ln 3}$.
C. $y'=\dfrac{\ln 3}{4x+1}$. **D.** $y'=\dfrac{4\ln 3}{4x+1}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=\ln x$. Tính đạo hàm của hàm số trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$. **B.** $y'=x$.
C. $y'=\dfrac{1}{x}$. **D.** $y'=-\dfrac{1}{x}$.

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=e^{2x-3}$.

A. $f'(x)=2\cdot e^{x-3}$.
B. $f'(x)=e^{2x-3}$.
C. $f'(x)=-2\cdot e^{2x-3}$.
D. $f'(x)=2\cdot e^{2x-3}$.

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2-5x}$ là

A. $y'=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-5x}}$.
C. $y'=\dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}$. **D.** $y'=-\dfrac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}$.

Câu 12. Tìm đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$

A. $y'=\dfrac{-5}{(x+2)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{2}{(x+2)^2}$.
C. $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}$.

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+2}$.

A. $y'=1+\dfrac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$.
C. $y'=\dfrac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$. **D.** $y'=\dfrac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^3-2x^2\right)^2$ bằng

A. $6x^5+16x^3$.
B. $6x^5-20x^4+4x^3$.
C. $6x^5-20x^4+16x^3$.
D. $6x^5-20x^4-16x^3$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\log_3(2x+1)$. Tính giá trị của $f'(0)$.

A. $2\ln 3$. **B.** $\dfrac{2}{\ln 3}$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 16. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ tại điểm $x=-1$.

A. $f'(-1)=1$. **B.** $f'(-1)=-\dfrac{1}{2}$.
C. $f'(-1)=-2$. **D.** $f'(-1)=0$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. Tính giá trị biểu thức $P=f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $P=\dfrac{4}{3}$. **B.** $P=\dfrac{4}{9}$.
C. $y=\dfrac{x-3}{x+4}$. **D.** $P=\dfrac{8}{3}$.

Câu 18. Cho hàm số $y=3x^3+x^2+1$, có đạo hàm là y'. Để $y'\le 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

A. $\left[-\dfrac{2}{9};0\right]$.
B. $\left[-\dfrac{9}{2};0\right]$.
C. $\left(-\infty;-\dfrac{9}{2}\right]\cup[0;+\infty)$.
D. $\left(-\infty;-\dfrac{2}{9}\right]\cup[0;+\infty)$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=x^4-2x^2+1$. Tìm x để $f'(x)>0$.

A. $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$.
B. $x\in\mathbb{R}$.
C. $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$.
D. $x\in(-1;1)$.

Câu 20. Cho hai hàm số $f(x)=3x^3-3x^2+6x-1$ và $g(x)=x^3+x^2-2$. Bất phương trình $f''(x)-f'(x)+g'(x)-8\geq 0$ có tập nghiệm là

A. $\left(1;\dfrac{10}{3}\right)$.
B. $(-\infty;1]\cup\left[\dfrac{10}{3};+\infty\right)$.
C. $\left[1;\dfrac{10}{3}\right]$.
D. $(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{10}{3};+\infty\right)$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(3x-x^2\right)$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x)=0$.

A. $S=\varnothing$.
B. $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
C. $S=\{0;3\}$.
D. $S=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{-5x^2+14x-9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x)<0$ là

A. $\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{9}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{7}{5};+\infty\right)$.
C. $\left(-\infty;\dfrac{7}{5}\right)$. **D.** $\left(1;\dfrac{7}{5}\right)$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x)\geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 24. Cho hàm số $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{x}{2}\right)$. Giải phương trình $y'=0$.

A. $x=\dfrac{\pi}{3}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
B. $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
C. $x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
D. $x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 25. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-2}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ 2 là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** -1. **C.** $\dfrac{1}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 26. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-2x^4+x^2+3$ tại điểm $M(1;2)$ là

A. $y=-6x+8$. **B.** $y=-6x+6$.
C. $y=-6x-6$. **D.** $y=-6x-8$.

Câu 27. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)=x^3-2x^2+3x+1$ tại điểm có hoành độ $x_0=2$.

A. $y=-x-7$. **B.** $y=7x-14$.
C. $y=7x-7$. **D.** $y=-x+9$.

Câu 28. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2+2$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 29. Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y=-2x+1$. **B.** $y=2x+1$.
C. $y=3x-2$. **D.** $y=-3x-2$.

Câu 30. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-8x+1$ song song với đường thẳng $(d): y=x+28$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 31. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2$ song song với đường thẳng $y=x$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 32. Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ vuông góc với đường thẳng $x-3y+1=0$ có phương trình là

A. $x-3y+3=0$. **B.** $3x-y-3=0$.
C. $3x+y-3=0$. **D.** $3x+y-1=0$.

Câu 33. Cho đường cong (C) có phương trình $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y=-4x+3$.

A. $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{7}{4}$.
B. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$ và $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.
C. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ và $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$.
D. $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

Câu 34. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^2+20t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 8$ giây bằng bao nhiêu?

A. 152 m/s. **B.** 40 m/s.
C. 22 m/s. **D.** 12 m/s.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = 2t^2 + 3t$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng

A. 11 (m/s). **B.** 9 (m/s).
C. 22 (m/s). **D.** 19 (m/s).

Câu 36. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 2000 sản phẩm.

A. 12000. **B.** -67200.
C. -787200. **D.** 4800.

Câu 37. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-2018)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = -2018!$.
C. $f'(0) = 2018!$. **D.** $f'(0) = 2018$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = (2018 + x)(2017 + 2x)(2016 + 3x)\cdots(1 + 2018x)$. Tính $f'(1)$.

A. $1009 \cdot 2019^{2018}$. **B.** $2018 \cdot 1009^{2019}$.
C. $2018 \cdot 2019^{1009}$. **D.** $2019 \cdot 2018^{1009}$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \ln \dfrac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \cdots + f'(2018)$.

A. $S = \ln 2018$. **B.** $S = 1$.
C. $S = 2018$. **D.** $S = \dfrac{2018}{2019}$.

Câu 40. Tính tổng $S = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + 2018 \cdot 2^{2017}$.

A. $S = 2017 \cdot 2^{2018} + 1$.
B. $S = 2018 \cdot 2^{2018} + 1$.
C. $S = 2019 \cdot 2^{2018} + 1$.
D. $S = 2017 \cdot 2^{2018}$.

§3. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a;b)$. Khi đó hệ thức $y' = f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng $(a;b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$.

- Kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$
- Công thức tính $f''(x) = [f'(x)]'$.

2 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có

$$\boxed{a(t) = f''(t)}$$

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính đạo hàm cấp hai

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = 0, x_0 = 1$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $h(x) = \ln x, x > 0$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \sqrt{2}$.

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sin x$.

b) $y = \tan x$.

c) $y = \left(x^2 + 1\right)^3$.

d) $y = \dfrac{x}{x-2}$.

e) $y = x^2 e^{-x}$.

f) $y = \ln(2x + 3)$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = xe^{x^2} + \ln(x+1)$. Tính $f'(0)$ và f"(0).

Ví dụ 5. Cho hàm số $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Giải phương trình $h''(x) = 0$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3.y'' + 1 = 0$.

DT 2 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp 2

Ví dụ 7. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=\dfrac{1}{3}t^3-3t^2+5t+4$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=3\,(\mathrm{s})$.

Ví dụ 8. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t)=10+0{,}5\sin\left(2\pi t+\dfrac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét, t tính bằng giây. Gia tốc của hạt tại thời điểm $t=5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hàm số $g(x)=\cos x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

2 Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y=-3x^4+4x^3+5x^2-2x$. b) $y=\frac{4}{5}x^5-3x^2-x+4$.

c) $y=-\frac{1}{x}$. d) $y=\frac{1}{x-3}$

e) $y=x\cdot\sin x$. f) $y=\mathrm{e}^x\cdot\sin x$.

3 Cho hàm số $f(x)=x^2-4x$. Giải phương trình $f'(x)=f''(x)$.

4 Cho hàm số $f(x)=\sin^3 x+x^2$. Tính giá trị $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5 Cho hàm số $y=-2+\frac{5}{x}\cdot$ Chứng minh rằng: $\frac{2y'}{x}+y''=0$.

6 Cho $y=\frac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2=(y-1)y''$.

7 Cho hàm số $y=x\cos x$. Chứng minh rằng: $x.y-2(y'-\cos x)+x.y''=0$.

8 Cho hàm số $y=\sin^2 x$. Chứng minh rằng: $2y+y'\tan x+y''-2=0$.

9 Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s=t^3-3t^2-9t$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

10 Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t)=6\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t>0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t=\frac{\pi}{6}$ (s).

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y=3x$. Khi đó, y'' bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** $3x$. **C.** $\frac{3}{2}x^2$. **D.** 0.

Câu 2. Cho $f(x)=(x+10)^6$. Tính $f''(2)$.

A. $f''(2)=827440$. **B.** $f''(2)=622080$. **C.** $f''(2)=0$. **D.** $f''(2)=413720$.

Câu 3. Cho $f(x)=\cos 3x$. Tính $f''(0)$.

A. $f''(0)=-9$. **B.** $f''(0)=0$. **C.** $f''(0)=9$. **D.** $f''(0)=1$.

Câu 4. Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y=5\sin x-3\cos x$.

A. $y''=5\cos x+3\sin x$. **B.** $y''=5\sin x+3\cos x$.
C. $y''=-5\sin x-3\cos x$. **D.** $y''=-5\sin x+3\cos x$.

Câu 5. Cho hàm số $y=5-\frac{3}{x}$. Tính giá trị biểu thức $M=xy''+2y'$.

A. $M=0$. **B.** $M=1$. **C.** $M=4$. **D.** $M=10$.

Câu 6. Cho hàm số $y=\cos 2x$ có đạo hàm là y' và y''. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y+y''=0$. **B.** $4y''-y=0$. **C.** $y''+4y=0$. **D.** $y+2y'=0$.

Câu 7. Cho hai hàm số $f(x)=x^4-4x^2+3$ và $g(x)=3+10x-7x^2$. Nghiệm của phương trình $f''(x)+g'(x)=0$ là

A. $x=1; x=\frac{1}{6}$. **B.** $x=-1; x=\frac{1}{6}$. **C.** $x=-1; x=-\frac{1}{6}$. **D.** $x=1; x=-\frac{1}{6}$.

Câu 8. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t)=t^3-t^2+5t$ (s tính theo m, t tính theo s). Tính giá trị gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t=1s$?

A. $a(3)=5m/s^2$. **B.** $a(3)=6m/s^2$. **C.** $a(3)=0m/s^2$. **D.** $a(3)=4m/s^2$.

Câu 9. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t)=t^3+4t^2$, trong đó $t>0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11 m/s là

A. 12 m/s^2. **B.** 16 m/s^2. **C.** 14 m/s^2. **D.** 18 m/s^2.

Câu 10. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t)=3\sin\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t>0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimet. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t=\frac{\pi}{2}$ (s).

A. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

—HẾT—

Chương 8
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

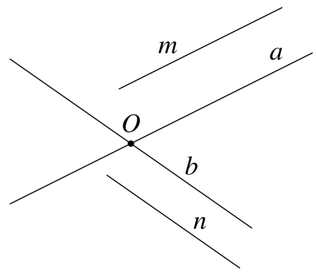
1 Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m,n), là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n. Ta tóm tắt cách dựng như sau:

① Chọn điểm O. Qua O, kẻ $a \parallel m$ và $b \parallel n$;

② Góc giữa m và n bằng góc giữa a và b.



Chú ý:

① Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng a, b thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

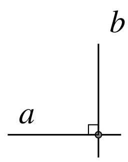
② Nếu hai đường thẳng a, b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi = 0^\circ$.

2 Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa:

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc nếu góc tạo bởi giữa chúng bằng 90°.

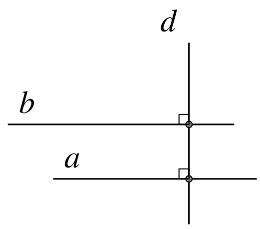
$$a \perp b \Leftrightarrow (a,b) = 90^\circ.$$



Định lý:

Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó sẽ vuông góc với đường còn lại.

$$\begin{cases} a \parallel b \\ d \perp a \end{cases} \Rightarrow d \perp b.$$



Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Xác định góc giữa hai đường thẳng

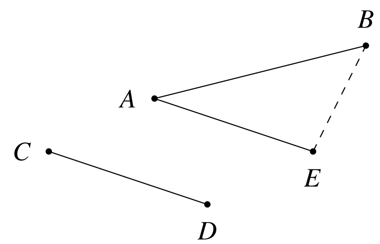
Trong không gian, giả sử cần xác định góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Ta có thể thực hiện các bước như sau:

① Chọn gốc A, dựng $AE \parallel CD$;

② Kết luận góc giữa AB và CD bằng góc giữa AB và AE.

③ Xác định góc giữa AB và AE. Có thể dùng hệ quả định lý cô-sin:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AE^2 - BE^2}{2AB \cdot AE}$$



Ta có thể chọn điểm gốc khác điểm A, ưu tiên cho điểm dễ dựng hình.

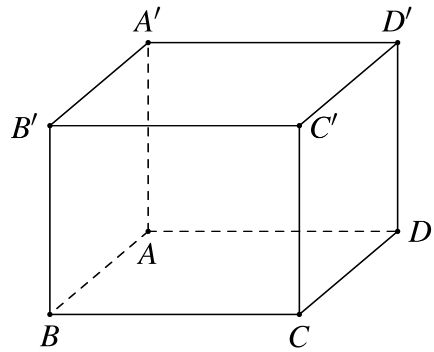
Ví dụ 1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây:

a) AB và $A'D'$.

b) AD và $A'C'$.

c) BC' và $B'D'$.

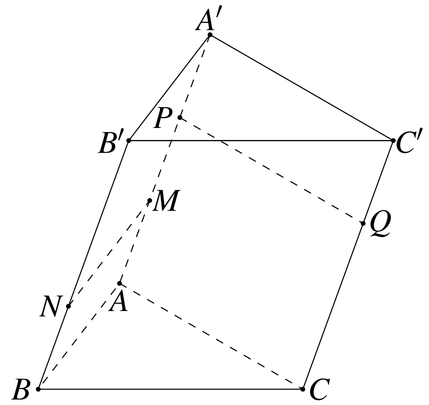


Ví dụ 2.
Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Các điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và BB' thoả mãn $MN \parallel AB$, các điểm P, Q lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và CC' (P khác M) thoả mãn $PQ \parallel AC$ (hình bên dưới). Tính số đo các góc sau

a) (AB, AC).

b) $(AB, B'C')$.

c) (MN, PQ).



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, biết $AB = CD = a$, $MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

DT 2 Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Để chứng minh hai đường thẳng $\triangle$ và $\triangle'$ vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC.
- Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.

Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \triangle$ và $\triangle' \parallel d$ thì $\triangle'$ cũng vuông góc với đường thẳng $\triangle$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ, \widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC. Chứng minh rằng

a) $SH \perp AC$.

b) $AB \perp BC$.

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$.

a) Chứng minh rằng đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Chứng minh rằng hai đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với nhau

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC. Chứng minh rằng AM vuông góc với NP.

Ví dụ 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

Ví dụ 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ $(0 < x < a)$. Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, tam giác SAD là tam giác đều và M là trung điểm của cạnh AD. Tính góc giữa hai đường thẳng BC và SA; BC và SM.

2 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và góc $A'AD$ bằng 120°. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: $A'C'$ và BD; AD và BB'; $A'D$ và BB'.

3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng $SO \perp AB$ và $SO \perp AD$.

4 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt là trung điểm $BC, C'D'$. Chứng minh rằng $AM \perp B'N$.

5 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có tất cả các cạnh đều bằng a. Cho M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD, chứng minh rằng $MN \perp SC$.

6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng $SH \perp AK$.

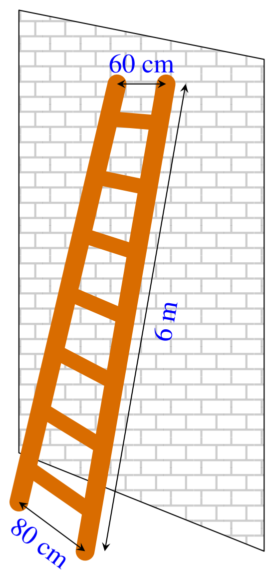
7 Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng a. K là trung điểm AB và I là điểm bất kỳ trên cạnh CD, chứng minh rằng $IK \perp AB$.

8 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2a, AB = BC = a$. $SA \perp AD$ và $SA \perp AC$. Chứng minh rằng $SC \perp DC$.

9 Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$ $(a > 0)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD. Biết rằng $MN = a\sqrt{2}$. Chứng minh rằng AB vuông góc với CD.

10 Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, M thuộc cạnh AC sao cho $AC = 3AM$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng MG vuông góc với NP.

11 Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao 6 m, hai chân thang cách nhau 80 cm, hai ngọn thang cách nhau 60 cm. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



12 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AC$, $SA \perp BC$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) SD và BC.

b) MN và SC.

13 Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3AM$. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng CM và BD.

14 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh là $2a$, tam giác SBC vuông cân tại S, $SA = 2a$.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và AC.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. Tính góc tạo bởi AG và SC.

15 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh của hình chóp đều bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AB.

a) Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau MN và SD; MO và SB.

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng SN và BC.

16 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và góc $A'AD$ bằng 120°. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau: $A'C'$ và BD; AD và BB'; $A'D$ và BB'.

17 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của AB, N là điểm trên cạnh $B'C'$ sao cho $B'N = 2C'N$. Tính cos của góc tạo bởi hai đường thẳng DM và AN.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M. Có bao nhiêu đường thẳng qua M, cắt a và vuông góc với a?

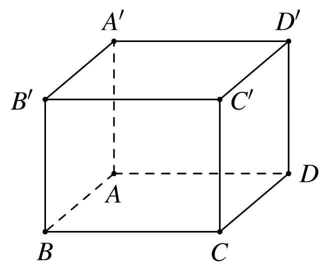
A. Vô số. **B.** 2. **C.** Có 1 hoặc vô số. **D.** 1.

Câu 3. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

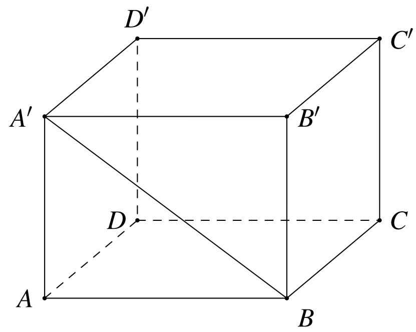
Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.



Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

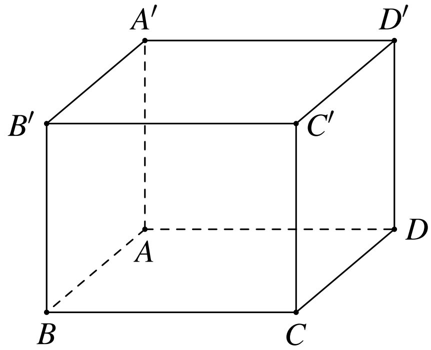


Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là

A. 120°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

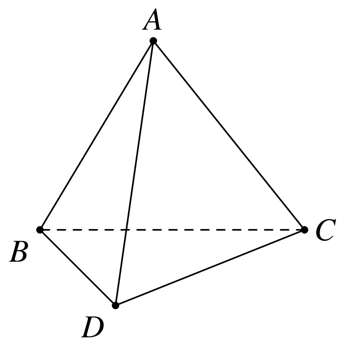


Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a, SB = 2a, SC = 3a, \widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ, \widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\cos\alpha = 0$. **D.** $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$.

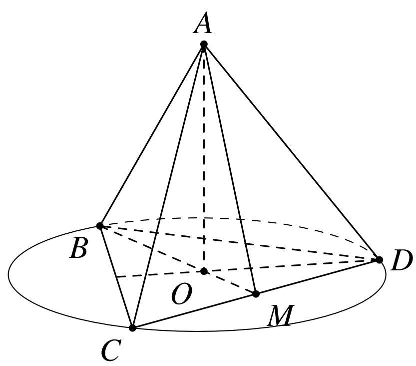
Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.



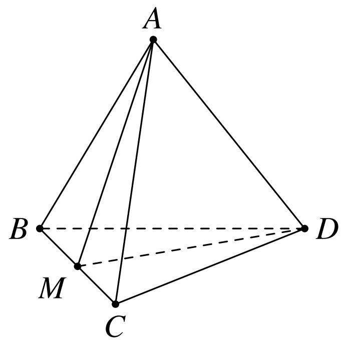
Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 60°.



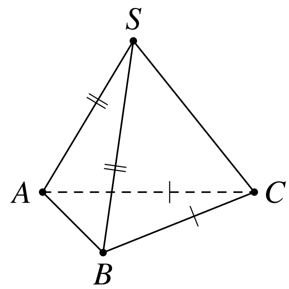
Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.



Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Câu 14. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \dfrac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 60^\circ$. **C.** $\varphi = 30^\circ$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a, BD = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $MN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $MN = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Tính góc giữa IJ và CD.

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Câu 18. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

Câu 19. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = 4$, $CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của P với tứ diện là

A. 5. **B.** 6. **C.** $\dfrac{17}{3}$. **D.** $\dfrac{16}{3}$.

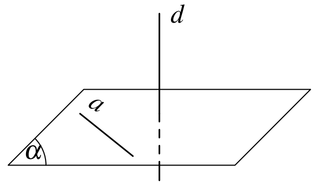
—HẾT—

§2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

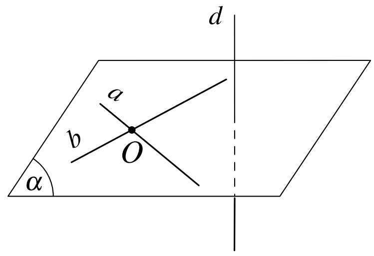
1 Định nghĩa

> Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Khi đó ta còn nói (α) vuông góc d và kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.



2 Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

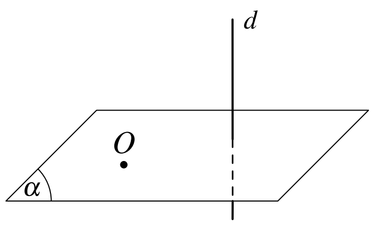
> Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

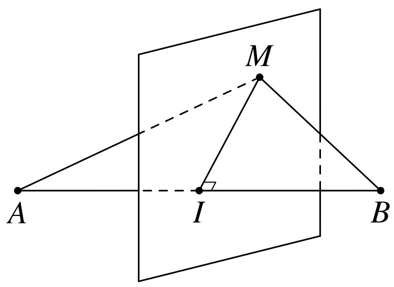


Tóm tắt định lí: $\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \varnothing \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$

3 Tính chất

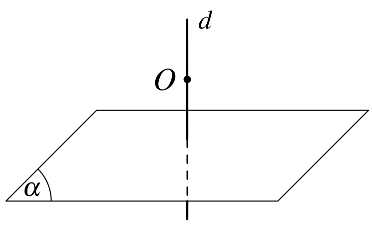
Tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.





Chú ý: Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB.

Tính chất 2: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

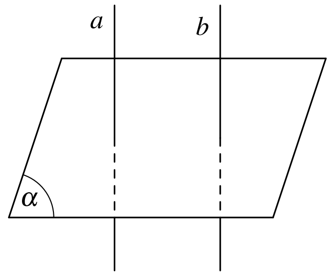


4 Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Tính chất 3:

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b.$



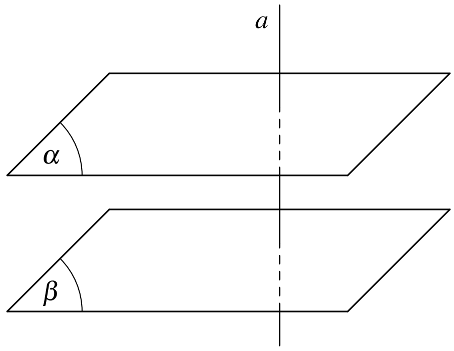
b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \not\equiv b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$

Tính chất 4:

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Tóm tắt: $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$



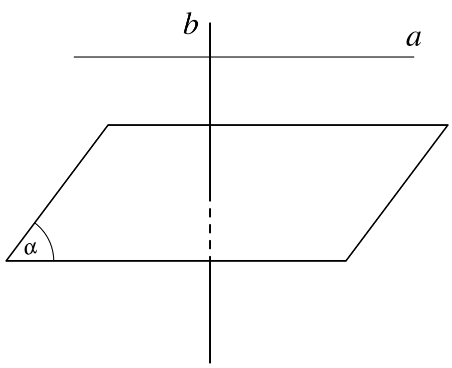
b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \\ (\alpha) \not\equiv (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$

Tính chất 5:

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (α) thì cũng vuông góc với a.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a.$



b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\alpha).$

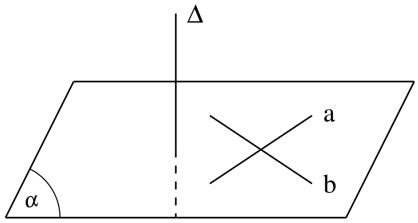
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Một trong hai cách thường dùng:

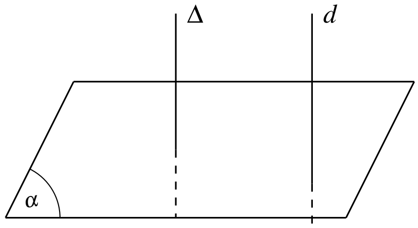
① Chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau thuộc (α).

Tóm tắt: $\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ \Delta \perp a \\ \Delta \perp b \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$



② Chứng minh Δ song song với đường thẳng d, trong đó d vuông góc với (α).

Tóm tắt: $\begin{cases} \Delta \,//\, d \\ d \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$



Khi giải toán, ta chú ý đến các "quan hệ" vuông góc thường gặp sau:

① Đường trung tuyến trong tam giác cân (hạ từ đỉnh cân), trong tam giác đều thì vuông góc với cạnh đáy.

② Đường chéo hình thoi, đường chéo hình vuông thì vuông góc nhau.

③ Xét trong tam giác, ta có thể kiểm tra quan hệ vuông góc của hai cạnh bằng cách thử định lý Pytago.

④ Trong không gian, khi đề bài cho giải thiết "SA vuông với đáy", ta có thể suy ra SA vuông với các đường nằm trong mặt đáy.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh

a) $SI \perp (ABCD)$. b) $AC \perp (SBD)$. c) $BD \perp (SAC)$.

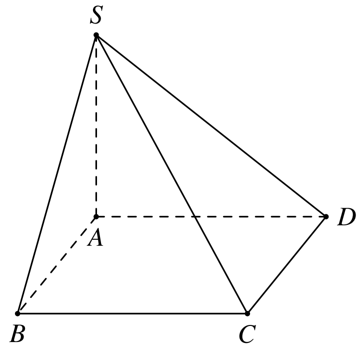
Ví dụ 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O; SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD. Chứng minh

a) $BC \perp (SAB)$; $CD \perp (SAD)$.

b) $AH \perp (SBC)$; $AK \perp (SCD)$.

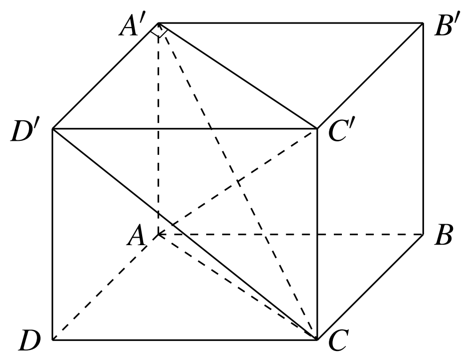
c) $SC \perp (AHK)$.



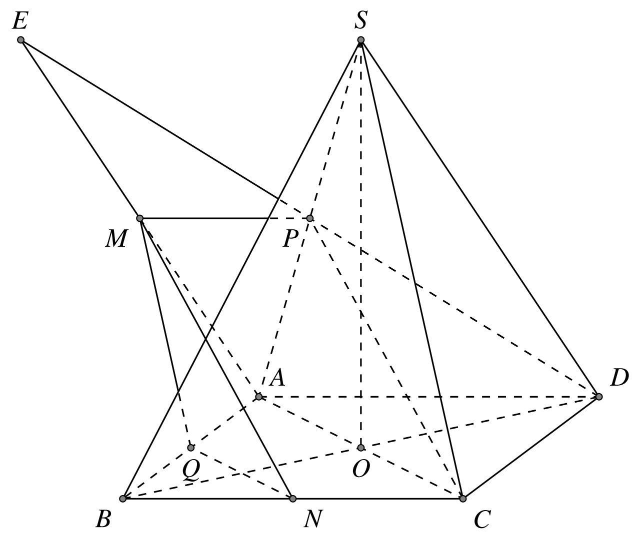
Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là các tam giác đều cạnh a, $AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh rằng $AI \perp (BCD)$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC, SI. Chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$.

Ví dụ 5.
Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. $\triangle ACD$ vuông tại A, $AC = AA'$. Chứng minh rằng $AC' \perp (A'D'C)$.



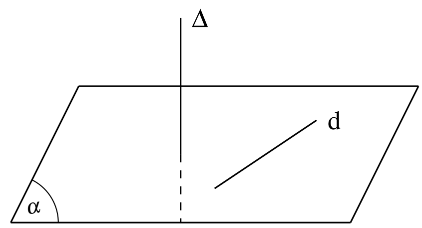
Ví dụ 6.
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm P của SA. Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của AE, BC, AB. Chứng minh $BD \perp (MNQ)$.



DT 2 Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với d, ta có thể chứng minh Δ vuông góc với mặt phẳng (α) chứa d, nghĩa là

$$\boxed{\begin{cases} \Delta \perp (\alpha) \\ d \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp d.}$$



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh $BC \perp SA$.

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc $(ABCD)$.

a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD. Chứng minh $AH \perp SC$ và $BH \perp SD$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng $2a$, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{3}$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$. Tính SO theo a.

b) Chứng minh rằng $AC \perp SD$.

c) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB và SD. Chứng minh rằng $SC \perp IK$.

2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB, SC, SD.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$.

b) Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD.

c) Chứng minh rằng AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra ba đường thẳng AH, AI, AK cùng chứa trong một mặt phẳng.

d) Chứng minh rằng (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK. Từ đó suy ra $HK \perp AI$.

3 Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh $SM \perp (SCD)$, $SD \perp MC$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên MN. Chứng minh $SH \perp BN$. Tính SH.

4 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên bằng $2a$. Biết hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm H của AB. Gọi H' là trung điểm của $A'B'$, M là điểm thuộc cạnh $B'C'$ sao cho $B'C' = 4B'M$.

a) Chứng minh $B'C' \perp (BMH')$.

b) Tứ giác $CHH'C'$ là hình gì? Tại sao? Tính CH'.

5 Cho hình tròn tâm O, đường kính AB nằm trong mặt phẳng (P). Trên đường vuông góc với (P) tại A lấy điểm S, trên đường tròn (O) lấy điểm C, kẻ AI vuông góc SC và AK vuông góc SB.

a) Chứng minh rằng các mặt bên tứ diện $SABC$ là các tam giác vuông.

b) Chứng minh $AI \perp IK$ và $IK \perp SB$.

6 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H là trung điểm của cạnh AB và $SH \perp (ABCD)$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh

a) $AC \perp (SHK)$.

b) $CK \perp SD$.

7 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B; $AD = 2a$, $AB = BC = a$; SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SD, SA. Chứng minh rằng

a) Tam giác SCD vuông.

b) Tứ giác $BCMN$ là hình chữ nhật.

8 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, $A'D'$. Chứng minh $MP \perp C'N$.

9 Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

b) Gọi M là trung điểm của BB'. Chứng minh $BC' \perp AM$.

c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \dfrac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.
B. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.
C. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.
D. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.
B. Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với đường thẳng cho trước.
C. Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với mặt phẳng cho trước.
D. Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $CD \perp (SBD)$. **B.** $AB \perp (SAC)$. **C.** $SO \perp (ABCD)$. **D.** $CD \perp AC$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (SAD)$. **B.** $AB \perp (SAC)$. **C.** $AB \perp (SCD)$. **D.** $AB \perp (SBC)$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC vuông tại A có cạnh $SB \perp (ABC)$. AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SBC). **B.** (SAB). **C.** (SBC). **D.** (ABC).

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A lên SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AM \perp (SBC)$. **B.** $AM \perp (SCD)$. **C.** $AM \perp CD$. **D.** $AM \perp SD$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào dưới đây vuông góc với mặt đường thẳng BD?

A. (SAC). **B.** (SCD). **C.** (SAB). **D.** (SBD).

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $AH \perp BC$. **B.** $AH \perp AC$. **C.** $AH \perp SC$. **D.** $SA \perp BC$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $CH \perp AK$. **B.** $AK \perp SB$. **C.** $CH \perp SB$. **D.** $CH \perp SA$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$ và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), khi đó

A. I là trung điểm của AC.
B. I là trọng tâm của tam giác ABC.
C. I là trung điểm của AB.
D. I là trung điểm của BC.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $AB \perp CD$.
B. $AB = CD$.
C. $AC = BD$.
D. $CD \perp BD$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $SC \perp (AEF)$.
B. $SC \perp (AED)$.
C. $SC \perp (AFB)$.
D. $SC \perp (AEC)$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

A. $CE \perp (SAB)$.
B. $CE \perp (SDC)$.
C. $CB \perp (SAC)$.
D. Tam giác SDC vuông tại D.

—HẾT—

§3. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

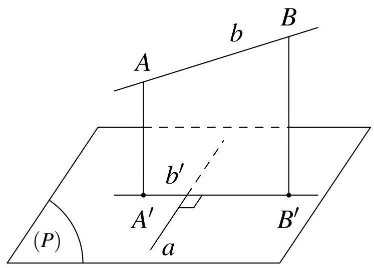
1 Phép chiếu vuông góc

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc* lên mặt phẳng (P).

- Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P). *Hình chiếu vuông góc* $\mathscr{H}'$ của hình $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P) còn được gọi là *hình chiếu* của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P).

2 Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

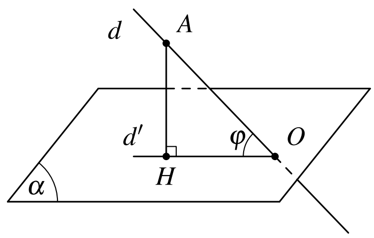


3 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

- Trường hợp $d \perp (\alpha)$ thì góc giữa đường thẳng d và (α) bằng 90°.
- Trường hợp d không vuông góc với (α) thì góc giữa d và và (α) bằng góc giữa d hình chiếu d' của nó trên (α).

⚠ *Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.*



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Xác định hình chiếu của điểm (đường) lên mặt phẳng (P)

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC).

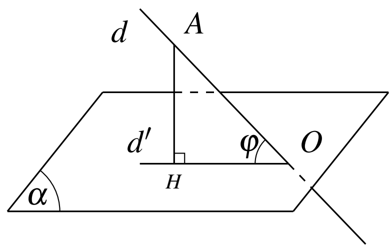
c) Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.

d) Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC).

DT 2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.

- Nếu $d \perp (P)$ thì $(d,(P)) = 90^\circ$.
- Nếu d không vuông (P) thì để xác định góc giữa d và (P), ta thường làm như sau
  - Xác định giao điểm O của d và (P).
  - Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P). Lúc đó $(d,(P)) = (d,d') = \widehat{AOH}$.



⚠ $0^\circ \leq (d,(P)) \leq 90^\circ$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

a) SB và $(ABCD)$.

b) SC và $(ABCD)$.

c) SO và $(ABCD)$.

d) SC và (SAB).

e) SB và (SAC).

f) BD và (SAC).

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và vuông góc với đáy.

a) Tính góc giữa SC với (ABC).

b) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB).

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tâm O, SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SA, BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính góc giữa MN và (SBD).

Ví dụ 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $B'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Ví dụ 6. Một chiếc cột cao 3 m được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài 5 m. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính tang góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

2 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa

a) SC và (ABC). b) SC và (SAB).

3 Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a. Tính côsin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD).

4 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a$, $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa SA và (ABC).

5 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

6 Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

7 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD).

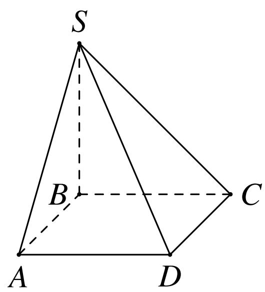
c) Gọi M là trung điểm của cạnh SC và α là góc giữa đường thẳng OM và mặt phẳng (SBC). Tính $\sin\alpha$.

8 Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60°. Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài $10\,\text{m}$. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu cen-ti-mét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SB \perp (ABCD)$(xem hình bên), góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{SDB}$. **B.** $\widehat{DSB}$. **C.** $\widehat{SDC}$. **D.** $\widehat{SDA}$.



Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa cạnh SC và mặt (SAD) là góc nào sau đây?

A. $\widehat{SCD}$. **B.** $\widehat{CSA}$. **C.** $\widehat{CSD}$. **D.** $\widehat{SCA}$.

Câu 3. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là.

A. $\widehat{SCO}$. **B.** $\widehat{ACB}$. **C.** $\widehat{SCD}$. **D.** $\widehat{SCB}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

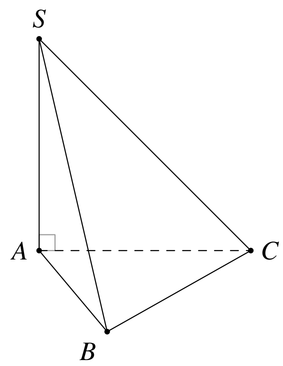
A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy là góc giữa hai đường thẳng nào dưới đây?

A. SB và BC. **B.** SB và SC. **C.** SB và AB. **D.** SA và SB.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.



Câu 7. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Câu 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính góc φ của đường thẳng AA' với mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\varphi = 45^\circ$. **B.** $\varphi = 90^\circ$. **C.** $\varphi = 60^\circ$. **D.** $\varphi = 0^\circ$.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AC' với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$.

Câu 11. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi φ là góc giữa cạnh bên với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\cos\varphi$.

A. $\cos\varphi = \sqrt{2}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SO vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và BC. Tính góc giữa đường thẳng MN với mặt phẳng $(ABCD)$, biết $MN = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 30°.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy trùng với trọng tâm tam giác ABC và $SH = \dfrac{a}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và SC. Gọi α là góc giữa đường thẳng MN với mặt đáy $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = \frac{2}{3}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{4}{3}$.

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S. Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Độ dài cạnh SO bằng

A. $SO = a\sqrt{3}$. **B.** $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $SO = a\sqrt{2}$. **D.** $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi φ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\varphi = 60^\circ$. **C.** $\tan\varphi = \sqrt{5}$. **D.** $\varphi = 45^\circ$.

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ đều. Gọi α là góc giữa AB và mặt phẳng (BCD). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\cos\alpha = 0$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAD).

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 18. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Câu 19. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA' = 4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$.

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và mặt phẳng $(A'BCD')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\alpha = 45^\circ$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

—HẾT—

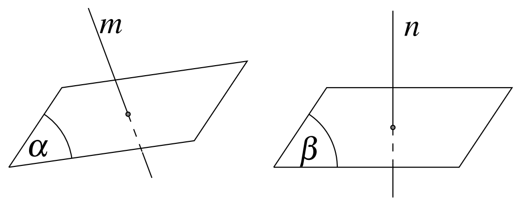
§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa:

- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng thì
$$0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$$



Chú ý:

- Hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°.
- Muốn xác định góc giữa hai mặt phẳng, ta tìm hai đường thẳng lần lượt vuông góc hai mặt phẳng. Khi đó, việc xác định góc giữa hai mặt phẳng được chuyển về bài toán xác định góc giữa hai đường thẳng (đã xét ở **Bài 2. Hai đường thẳng vuông góc**)

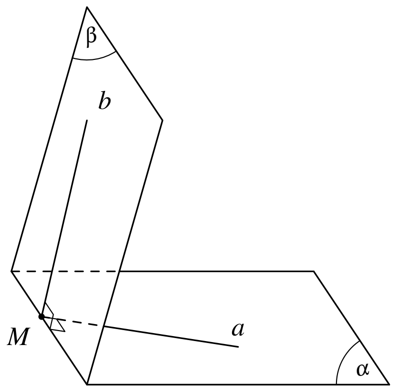
2 Cách xác định góc của hai mặt phẳng cắt nhau

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau. Muốn xác định góc giữa chúng, ta thực hiện theo các bước sau:

① Tìm giao tuyến c của (α) và (β).

② Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc hai mặt phẳng và cùng vuông góc với c tại một điểm.

③ Góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b.

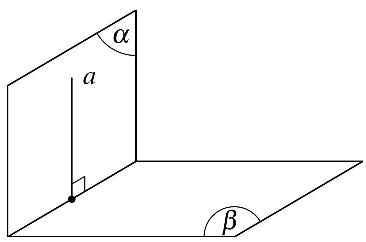


3 Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa: Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

Cách chứng minh: Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Tóm tắt: $\boxed{\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)}$



Các tính chất:

① Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và *vuông góc với giao tuyến* thì vuông góc với mặt phẳng kia.

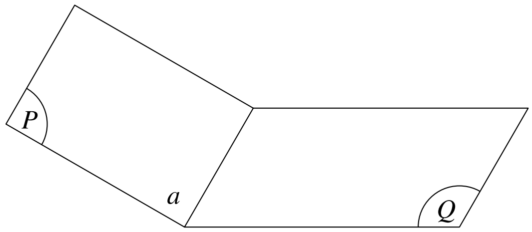
② Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

③ Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.

4 Góc nhị diện

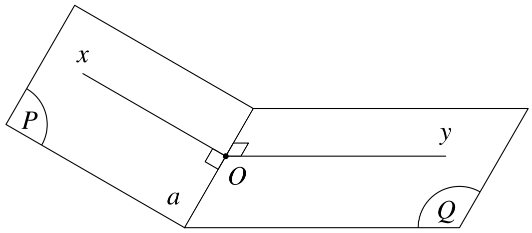
Định nghĩa:

Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P), (Q) có chung bờ a được gọi là một góc nhị diện, kí hiệu là $[P,a,Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P), (Q) tương ứng được gọi là các mặt phẳng của góc nhị diện đó.



Góc phẳng nhị diện:

Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P,a,Q]$, vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc (P), (Q) và vuông góc với a. Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P,a,Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a, được gọi là số đo của góc nhị diện $[P,a,Q]$.



Chú ý:

① Số đo của góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện và có thể nhận từ 0° đến 180°. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.

② Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M,a,N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt phẳng tương ứng chứa M, N.

③ Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

5 Một số hình lăng trụ đặc biệt

Hình lăng trụ đứng: là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

- Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... được gọi là hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác, ...

Hình lăng trụ đều: là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

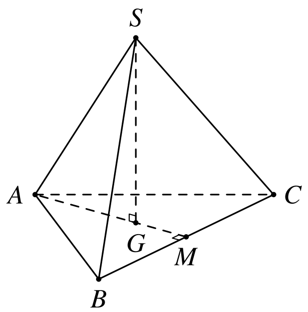
- Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.
- Ta có các loại lăng trụ đều như hình lăng trụ tam giác đều, hình lăng trụ tứ giác đều, hình lăng trụ ngũ giác đều …

Hình hộp đứng: là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

- *Đặc biệt 1*: Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Tất cả 6 mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.
- *Đặc biệt 2*: Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. Tất cả 6 mặt của hình lập phương đều là hình vuông.

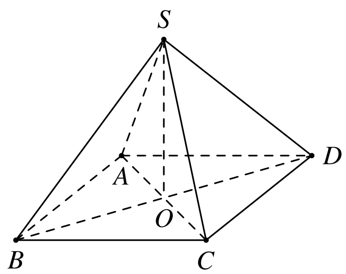
6 Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

Hình chóp đều: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.



* *Chóp tam giác đều*

* $SG \perp (ABC)$

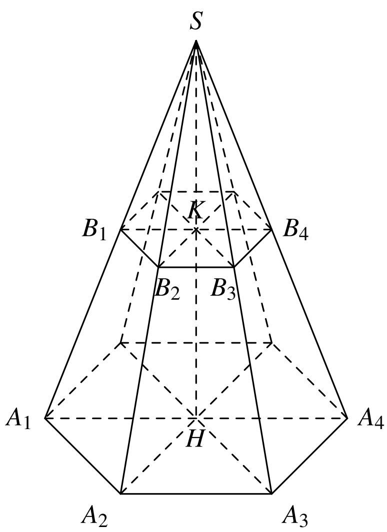


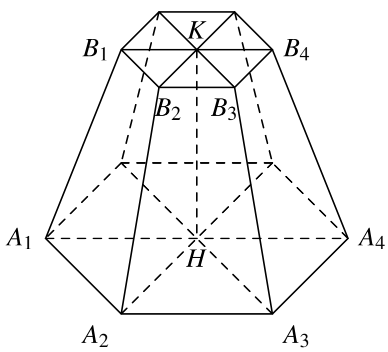
* *Chóp tứ giác đều*

* $SO \perp (ABCD)$

Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau; Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

Hình chóp cụt đều:





- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, $\ldots$, $A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trên được gọi là một *hình chóp cụt đều* (nói đơn giản là hình chóp cụt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2\ldots A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2\ldots B_n$), kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n.B_1B_2\ldots B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và $B_1B_2\ldots B_n$ được gọi là hai *mặt đáy*, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2,\ldots,A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng A_1B_1, $A_2B_2,\ldots,A_nB_n$ được gọi là các *cạnh bên*; các cạnh của mặt đáy được gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp cụt.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là *đường cao* của hình chóp cụt đều. Độ dài của đường cao được gọi là *chiều cao* của hình chóp cụt.

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Xác định góc giữa hai mặt phẳng

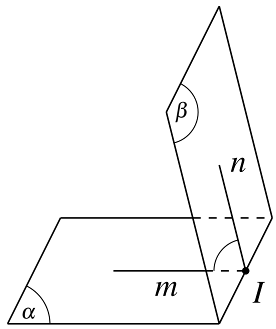
Cách 1: Dùng định nghĩa: Góc giữa (α) và (β) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với chúng.

Cách 2: Dựng hai đường trong hai mặt lần lượt vuông góc với giao tuyến. Các bước thực hiện:

① Dựng giao tuyến $c=(\alpha)\cap(\beta)$.

② Dựng $m\perp c$ và $n\perp c$ tại I, với $m\in(\alpha)$ và $n\in(\beta)$.

③ Góc cần tìm là $(m;n)$.

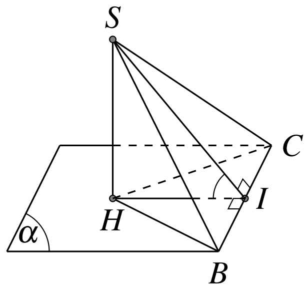


Nếu (β) chứa điểm S và H là hình chiếu vuông góc của S lên (α) (hình vẽ) thì ta dựng như sau:

① *Từ chân đường cao H, kẻ $HI\perp BC$.*

- *Nếu ΔHBC cân tại H hoặc đều thì I là trung điểm của BC.*
- *Nếu ΔHAB vuông tại B (hoặc C) thì I trùng B (hoặc C).*

① *Từ S, kẻ SI. Suy ra góc cần tìm là $\boxed{\widehat{SIH}}$.*



Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng

a) (SAC) và (SAD).

b) (SAB) và (SAD).

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

a) (SBC) và $(ABCD)$.

b) (SAD) và $(ABCD)$.

c) (SBD) và $(ABCD)$.

d) (SAB) và (SCD).

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$.

a) Khi $SA = a$, hãy tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$, (SBD) với $(ABCD)$.

b) Đặt $x = SA$. Tìm x để góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$, SA vuông góc mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$.

a) Tính góc giữa (SCD) với $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa (SCD) với (SBC).

Ví dụ 6. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = A'B = A'C = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC).

DT 2 Tính số đo của góc nhị diện

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $AC = a$. Tính số đo của mỗi góc nhị diện sau:

a) $[B, SA, C]$;

b) $[S, DA, B]$.

Ví dụ 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$.

b) Tính côsin của số đo góc nhị diện $[A', BD, C']$.

Ví dụ 9. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là $1,2$ m. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?

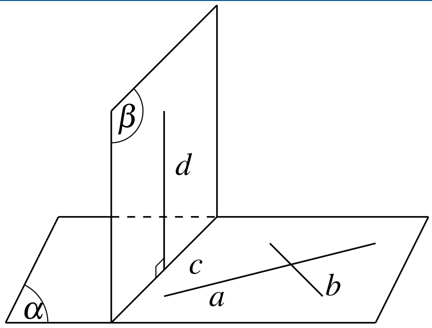
DT 3 Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp: Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Sơ đồ trình bày:

$$\text{Ta có } \begin{cases} d \perp a \ \textit{(giải thích)} \\ d \perp b \ \textit{(giải thích)} \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$

$$\text{Mà } d \subset (\beta) \text{ nên } (\beta) \perp (\alpha).$$



Lưu ý:

Nếu dựng được góc giữa (α) và (β). Khi đó, muốn chứng minh (α) vuông góc (β), ta chỉ cần chứng minh góc đó bằng $90°$.

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh $(SAB)\perp(SBC)$; $(SAC)\perp(SBD)$; $(SAD)\perp(SCD)$.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, SD. Chứng minh $(AMN)\perp(SAC)$

c) Gọi I là trung điểm AD và H là giao điểm của AC và BD. Chứng minh $(SHI)\perp(SAD)$

d) Gọi BE, DF là 2 đường cao của ΔSBD. Chứng minh $(ACF)\perp(SBC)$; $(AEF)\perp(SAC)$

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A. Gọi G là trọng tâm ΔABC, M là trung điểm BC và $SG \perp (ABC)$. Chứng minh $(SAM) \perp (ABC)$

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh bằng a, góc BAD bằng $60°$. Kẻ OH vuông góc với SC tại H. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng

a) $(SBD) \perp (SAC)$; b) $(SBC) \perp (BDH)$; c) $(SBC) \perp (SCD)$;

Ví dụ 13. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I và F lần lượt là trung điểm AB và AD. Chứng minh rằng $(SID) \perp (SFC)$.

DT 4 Tổng hợp tính toán

Ví dụ 14. Cho hình lăng trụ đứng lục giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $2a$.

a) Tính diện tích xung quanh của lăng trụ.

b) Tính diện tích toàn phần của lăng trụ.

Ví dụ 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và có $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Ví dụ 16. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng $2a$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính đường cao của hình chóp cụt và đường cao của mặt bên.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SAB)$.

b) $(SAC) \perp (BHK)$.

2 Cho tứ diện $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và SA vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh (SBC) vuông góc với (SAB).

b) Gọi AH và AK lần lượt là các đường cao của hai tam giác SAB và SAC. Chứng minh (SBC) vuông góc với (AHK).

3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $AB = a$, $AC = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.

4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình thoi tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$.

a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$

b) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD)$

c) Kẻ $OK \perp BC$. Chứng minh $BC \perp (SOK)$.

d) Chứng minh $(SBC) \perp (SOK)$

e) Kẻ $OH \perp SK$. Chứng minh $OH \perp (SBC)$.

5 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $(SAB) \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính cosin của số đo góc nhị diện $[S, BD, C]$ và góc nhị diện $[B, SC, D]$.

6 Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở Hình bên dưới có các ống hấp nhiệt chân không dài 1,8 m được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài 1,2 m. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

7 Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là $1,2$ m. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?

8 Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông, AC cắt BD tại O, $SO \perp (ABCD)$. Tất cả các cạnh của hình chóp bằng a.

a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC).

b) Gọi α là số đo của góc nhị diện $[S, CD, A]$. Tính $\cos\alpha$.

c) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), β là số đo của góc nhị diện $[A, d, D]$. Tính $\cos\beta$.

d) (*) Gọi γ là số đo của góc nhị diện $[B, SC, D]$. Tính $\cos\gamma$.

9 Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc giữa mặt bên và mặt đáy.

10 Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a, cạnh bên bằng b.

a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tang của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

11 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB.

a) Tinh côsin của góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SHC)$.

12 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (*tham khảo hình vẽ*). Tính sin của góc giữa hai mặt phẳng (BDA') và $(ABCD)$.

13 Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng h, các đáy là các tam giác đều ABC, $A'B'C'$ có cạnh tương ứng là a, a' $(a > a')$. Tính độ dài các cạnh bên của hình chóp cụt.

14 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C]$, $[A, BD, C']$.

15 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Cho $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Tính AC'.

16 Cho hình lăng trụ đứng $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AA' = 2a, AD = 2a, AB = BC = a$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AC'.

b) Tính tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ.

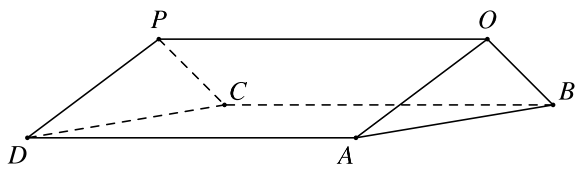
17 Cho hình hộp đứng $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Cho biết $AB = BD = a, A'C = 2a$.

a) Tính độ dài AA'.

b) Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

18 Cho hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ và đường nối tâm hai đáy bằng a. Tính độ dài cạnh bên và đường cao của mỗi mặt bên.

19 Hai mái nhà trong hình bên là hai hình chữ nhật ($AOPD$ và $BOPC$). Giả sử $AB = 4{,}8$ m, $OA = 2{,}8$ m, $OB = 4$ m.



a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.

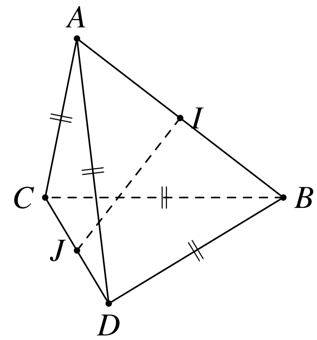
c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là 0,5 m. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

20 Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mái nhà mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

21 Cho hai tam giác ACD, BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính AB, IJ theo a và x.

b) Tìm x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc nhau.



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào **sai**?

A. Đáy là đa giác đều.
B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
C. Các mặt bên là những hình vuông.
D. Các cạnh bên là những đường cao.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.
B. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.
C. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.
D. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
B. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.
C. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

D. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây **sai** khi nói về hình chóp tứ giác đều?

A. Các cạnh bên bằng nhau. **B.** Các mặt bên là những tam giác đều.
C. Các cạnh đáy bằng nhau . **D.** Mặt đáy là hình vuông.

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, chiều cao của lăng trụ là cạnh

A. BB'. **B.** AC'. **C.** AB. **D.** AB'.

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
B. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 8. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì

A. Song song với nhau.
B. Trùng nhau.
C. Không song song với nhau.
D. Hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng bao nhiêu?

A. $60°$. **B.** $0°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi I là trung điểm BC. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

A. $\widehat{SCA}$. **B.** $\widehat{SBA}$. **C.** $\widehat{SIA}$. **D.** $\widehat{SCB}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SBC) \perp (SAC)$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $BM \perp AC$. **D.** $(SAB) \perp (SBC)$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD, cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SAC) \perp (ABCD)$. **B.** $(SBC) \perp (SAC)$. **C.** $(SAC) \perp (SCD)$. **D.** $(SAD) \perp (SBD)$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AB. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $(SBC) \perp (SAB)$. **B.** $(SAB) \perp (ABCD)$. **C.** $(SBD) \perp (ABCD)$. **D.** $(SHC) \perp (ABCD)$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi I là hình chiếu của A trên BC, α là góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng (ABC), β là số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\alpha = 90° - \beta$. **B.** $\alpha = 180° - \beta$. **C.** $\alpha = 90° + \beta$. **D.** $\alpha = \beta$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi α là số đo của các góc nhị diện $[A, BC, S]$. Tính $\cos\alpha$.

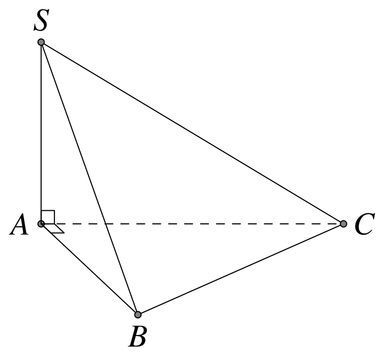
A. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{5}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi α là số đo của các góc nhị diện $[B, SA, C]$. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{5}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Câu 17. Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a}{2}$, tam giác ABC vuông tại A, $AC = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Tính góc giữa (SBC) với (ABC).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

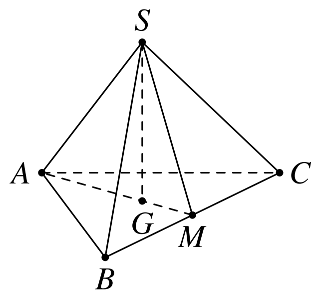


Câu 18. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

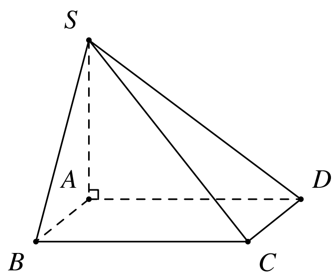
Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = a$, $SA = 2a$. Gọi φ là góc giữa mặt bên và mặt đáy. Tính $\cos\varphi$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{15}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB$. Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ có số đo bằng

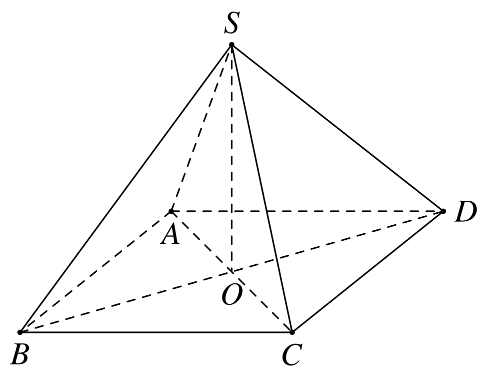
A. 30°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 45°.



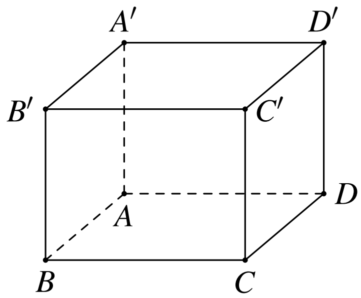
Câu 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\tan\varphi = \sqrt{2}$.

C. $\tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\tan\varphi = \sqrt{6}$.



Câu 22. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và α là góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và $(ABCD)$. Góc α thỏa mãn



A. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. **C.** $\tan\alpha = 2$. **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 23. Trong hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°, tang của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc α tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ có số đo bằng

A. $\alpha = 90^\circ$. **B.** $\alpha = 30^\circ$. **C.** $\alpha = 45^\circ$. **D.** $\alpha = 60^\circ$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60°.

A. $x = \frac{3a}{2}$. **B.** $x = a$. **C.** $x = 2a$. **D.** $x = \frac{a}{2}$.

—HẾT—

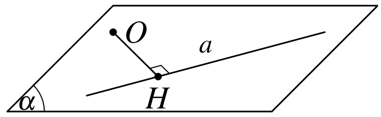
§5. KHOẢNG CÁCH

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm O và một đường thẳng a. Trong (O,a) gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a. Khi đó

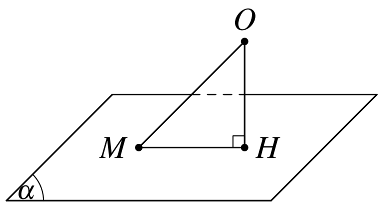
- Độ dài đoạn OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến a.
- Kí hiệu $\mathrm{d}(O,a) = OH$.



2 Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) và một điểm O, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α). Khi đó

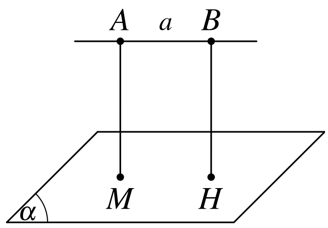
- Độ dài đoạn OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α). Kí hiệu $\mathrm{d}(O,(\alpha)) = OH$.
- Ta luôn có $OH \leq OM$, $\forall M \in (\alpha)$.



3 Khoảng cách từ một đường thẳng tới một mặt phẳng song song

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α).

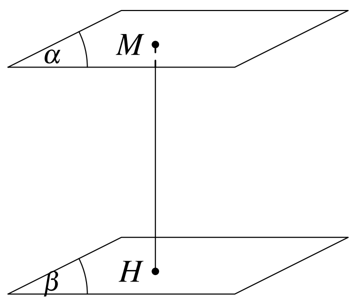
- Kí hiệu $\mathrm{d}(a,(\alpha))$.
- Nhận xét: $\mathrm{d}(a,(\alpha)) = \mathrm{d}(A,(\alpha)) = \mathrm{d}(B,(\alpha))$, với $A, B \in a$.



4 Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

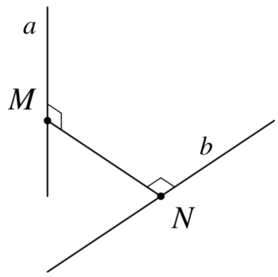
Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

- Kí hiệu $\mathrm{d}((\alpha),(\beta))$.
- Nhận xét $\mathrm{d}((\alpha),(\beta)) = \mathrm{d}(M,(\beta))$, với $M \in (\alpha)$.



5 Đường thẳng vuông góc chung và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Đường vuông góc chung: Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.
- Khoảng cách giữa hai đường chéo nhau:
  - Nếu đường thẳng vuông góc chung Δ cắt hai đường chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.
  - Kí hiệu $\mathrm{d}(a,b)$. Theo hình bên thì $\mathrm{d}(a,b) = MN$.

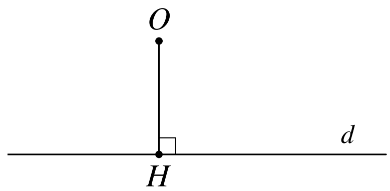


B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d, ta thực hiện các bước sau:

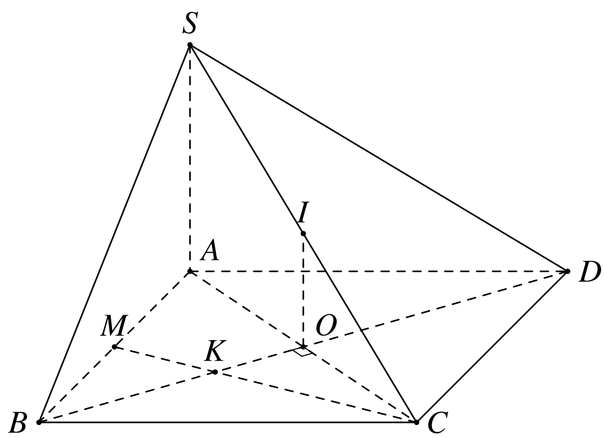
- Trong mặt phẳng $(O;d)$, hạ $OH \perp d$ tại H.
- Suy ra $\mathrm{d}(O,d) = OH$.



Ví dụ 1.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB.

a) Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ I đến CM, từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM.



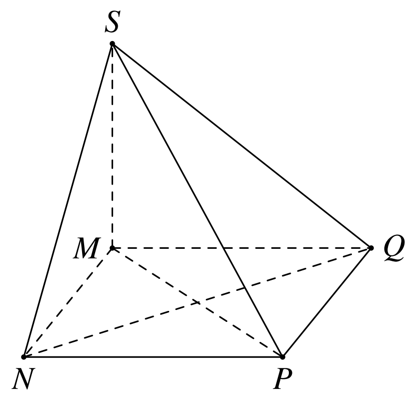
Ví dụ 2.

Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình thoi cạnh a, SM vuông góc với mặt phẳng $(MNPQ)$, $SM = a\sqrt{3}$ và góc $\widehat{MNP} = 60^\circ$.

a) Chứng minh rằng $NQ \perp SP$.

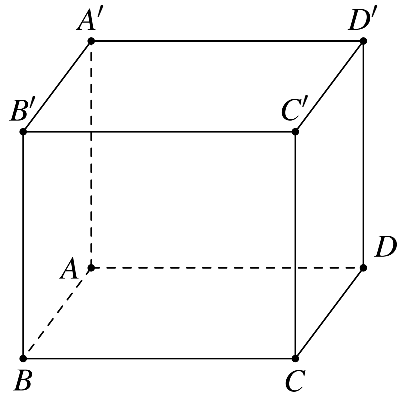
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và PQ.

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (SPQ). Tính độ dài MH.



Ví dụ 3.

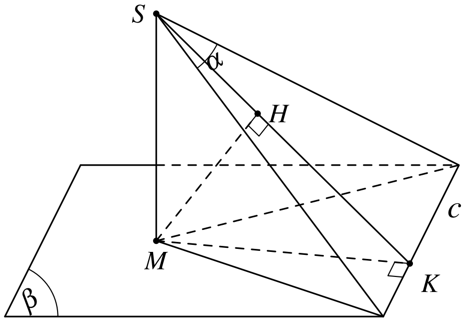
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.



DT 2 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Dựng khoảng cách từ M đến (α), ta chú ý hai trường hợp đặc biệt sau:

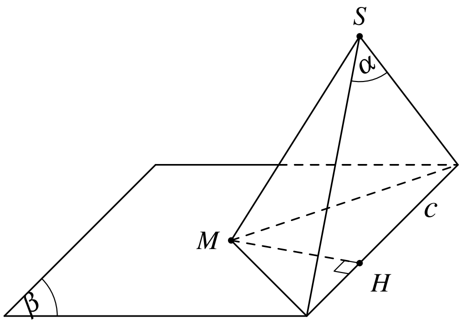
Trường hợp 1: Nếu M là hình chiếu vuông góc của một điểm $S \in (\alpha)$ xuống (β). Khi đó khoảng cách từ M đến (α) được dựng như sau:



- Bước 1. Dựng MK vuông góc với giao tuyến c tại K;
- Bước 2. Dựng SK.
- Bước 3. Dựng $MH \perp SK$ tại H. Suy ra

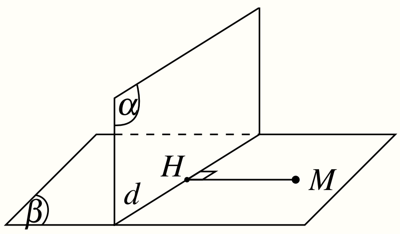
$$\mathrm{d}(M,(\alpha)) = MH.$$

Trường hợp 2: Nếu $M \in (\beta)$ mà $(\alpha) \perp (\beta)$ thì khoảng cách từ M đến (α) được dựng như sau:



- Kẻ MH vuông góc với giao tuyến c tại H
- Suy ra $\mathrm{d}(M,(\alpha)) = MH$.

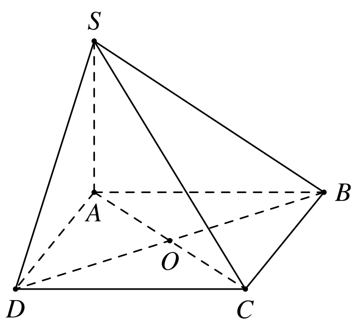
Trường hợp tổng quát, ta làm như sau:



- *Dựng mặt phẳng* (β) *chứa điểm* M *và* $(\beta) \perp (\alpha)$
- *Xác định giao tuyến* d *của* (β) *và* (α).
- *Kẻ* $MH \perp d$ *tại* H *thì* $MH \perp (\alpha)$. *Suy ra* $\mathrm{d}(M,(\alpha)) = MH$.

Ví dụ 4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$.



a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD).

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

c) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

d) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDC).

e) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $AB = 2a$, $SA = 4a$. Tính

a) Khoảng cách từ O đến (SAB).

b) Khoảng cách từ C đến (SAB).

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

DT 3 Khoảng cách giữa đường và mặt phẳng song song. Khoảng cách giữa hai mặt song song

- **Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α):** Để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện

- Chọn điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A tới (α) được xác định dễ nhất.
- Kết luận $\mathrm{d}(d;(\alpha)) = \mathrm{d}(A,(\alpha))$.

Cho hai mặt phẳng song song (α), (β): Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng ta thực hiện các bước

- Chọn điểm A trên (α) sao cho khoảng cách từ A tới (β) được xác định dễ nhất.
- Kết luận $\mathrm{d}((\beta);(\alpha)) = \mathrm{d}(A,(\beta))$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC);

b) Tính khoảng cách từ điểm AD đến mặt phẳng (SBC).

Ví dụ 8. Cho một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng a, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AA' = h$. Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD)$, AA' và $(BDD'B')$.

Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a:

a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$.

b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

Ví dụ 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA' tới mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

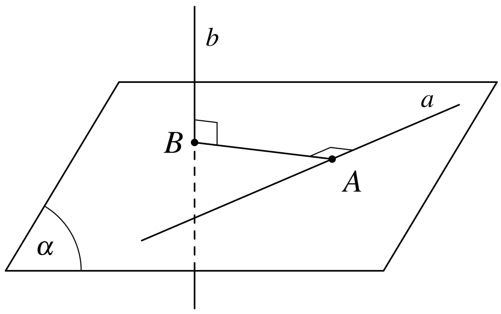
DT 4 Đoạn vuông góc chung. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Dựng đoạn vuông góc chung:

Trường hợp 1:

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

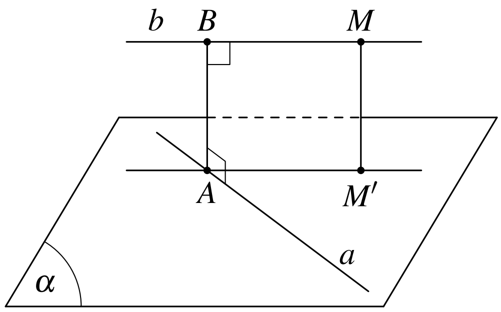
- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.
- Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



Trường hợp 2:

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.
- Lấy một điểm M tùy ý trên b và dựng MM' vuông góc với (α) tại M'.
- Từ M' dựng b' song song với b cắt a tại A.



- Từ A dựng AB song song với MM' cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Nhận xét:

- *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.*
- *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.*

Ví dụ 11. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của

a) OA và BC.

b) AI và OC.

Ví dụ 12. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA'.

Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa các đường thẳng

a) SC và BD.

b) AC và SD.

c) SD và AM.

Ví dụ 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$.

Ví dụ 15. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

2 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

3 Một chiếc máy bay cất cánh từ một điểm thuộc mặt đất phẳng nằm ngang. Trong 3 phút đầu máy bay bay với vận tốc 500 km/h và theo đường thẳng tạo với mặt đất một góc 15°. Hỏi sau 2 phút, máy bay ở độ cao bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?

4 Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, M là trung điểm của SC.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG).

5 Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người tô dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Vì sao?

6 Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc A bằng 60°, góc giữa AC' và $(ABCD)$ bằng 60°.

a) Tính đường cao của hình hộp đó.

b) Tìm đường vuông góc chung của $A'C$ và BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

7 Cho chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm giác ABC. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.

8 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = 3a$.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB.

9 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và DC'.

10 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách

a) Giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.

b) Giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

c) Từ điểm A đến đường thẳng $B'D'$.

d) Giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$.

11 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh bằng $a, SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Tính theo a khoảng cách

a) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

b) Từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

c) Giữa hai đường thẳng AB và SC.

12 Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc ABC bằng 60°, biết tam giác SBC đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a khoảng cách

a) Từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).

b) Từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

c) Giữa hai đường thẳng AB và SC.

13 Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{2}, AA' = a\sqrt{3}$. Tính theo a khoảng cách

a) Từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$.

b) Giữa hai đường thẳng BD và CD'.

14 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB = AC = AA' = a$. Tính theo a khoảng cách

a) Từ điểm A đến đường thẳng $B'C'$.

b) Giữa hai đường thẳng BC và AB'.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng tới đường thẳng.

B. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng là khoảng cách từ điểm đó tới một điểm bất kì của đường thẳng.

C. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó tới một điểm bất kì của mặt phẳng.

D. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng tới mặt phẳng.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với nó đồng thời chứa đường thẳng kia.

B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

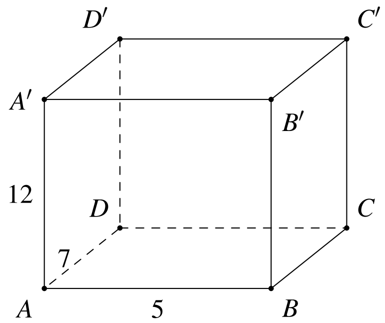
A. a. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước 5; 7; 12 (xem hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

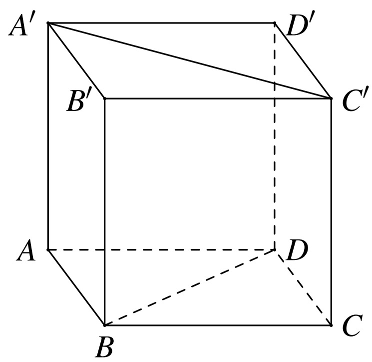
A. 7. **B.** 12. **C.** $\sqrt{74}$. **D.** 5.



Câu 6. Cho hình hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình vẽ bên. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

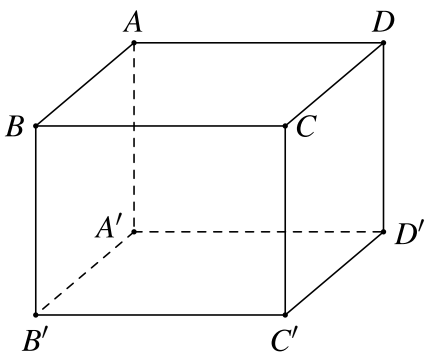
A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** $\sqrt{2}a$.

C. a. **D.** $\sqrt{3}a$.



Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C'$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.



Câu 8. Cho hình chóp $A.BCD$ có $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a, biết $AC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC' bằng

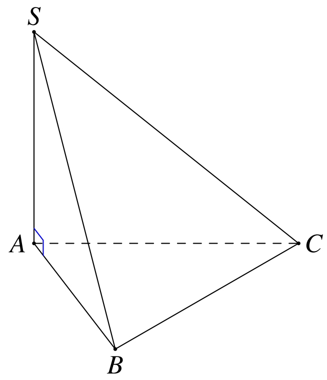
A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC)

A. $d = a$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a$ và tam giác ABC đều cạnh a (tham khảo hình bên). Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. a. **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm $I, AB = a, BC = a\sqrt{3}$; H là trung điểm của AI. Biết SH vuông góc với đáy và tam giác SAC vuông tại S. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. **B.** $d = a\sqrt{15}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{15}}{15}$. **D.** $d = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây là sai?

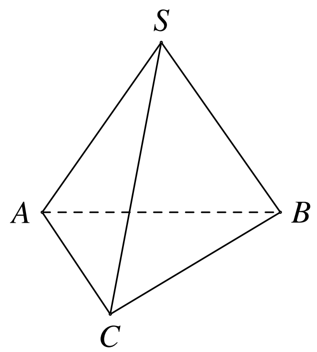
A. $\mathrm{d}(C,(SAB)) = \mathrm{d}(C,(SAD))$. **B.** $\mathrm{d}(A,(SBD)) = \mathrm{d}(B,(SAC))$.
C. $\mathrm{d}(B,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD))$. **D.** $\mathrm{d}(S,(ABCD)) = SA$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

A. $a\sqrt{6}$. **B.** $a\sqrt{3}$.
C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.



Câu 16. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh là $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. **C.** $a\sqrt{14}$. **D.** $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{11}}{22}$. **D.** $\frac{a\sqrt{4}}{3}$.

Câu 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $a\sqrt{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{11}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 22. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$, $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{15}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I là J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa IJ và (SAD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Câu 25. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P là trung điểm của các cạnh AD, CD, $A'D'$. Tính khoảng cách giữa CC' và mặt phẳng (MNP).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

—HẾT—

§6. THỂ TÍCH

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Thể tích khối lăng trụ

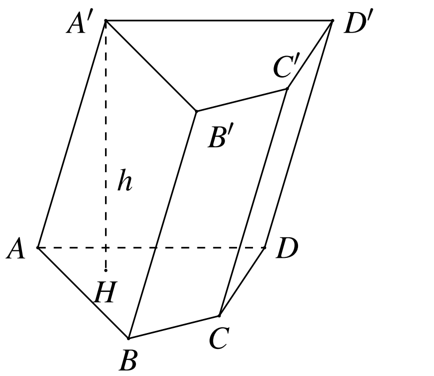
Thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với đường cao của lăng trụ.

$$\boxed{V = S_{\text{đáy}} \cdot h}$$

Trong đó

① $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy của khối lăng trụ;

② h là chiều cao của khối lăng trụ.



Hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$

2 Thể tích khối chóp

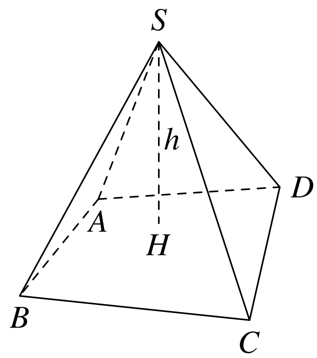
Ta có thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với đường cao hình chóp.

$$\boxed{V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{đáy}} \cdot h}$$

Trong đó

① $S_{\text{đáy}} = S_{ABCD}$ là diện tích mặt đáy của khối chóp.

② $h = SH$ là chiều cao của khối chóp.



3 Thể tích khối chóp cụt đều

Thể tích của khối chóp cụt đều được tính theo công thức

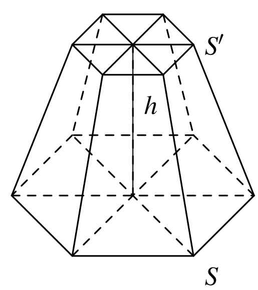
$$\boxed{V\frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})}$$

Trong đó

① S là diện tích đáy lớn của khối chóp cụt đều.

① S' là diện tích đáy bé của khối chóp cụt đều.

② $h = SH$ là chiều cao của khối chóp cụt đều.



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính thể tích khối lăng trụ

Phương pháp:

- Tính diện tích đáy $S_{\text{đáy}}$ và độ dài đường cao h của khối lăng trụ;
- Thay vào công thức $V = S_{\text{đáy}} \cdot h$.

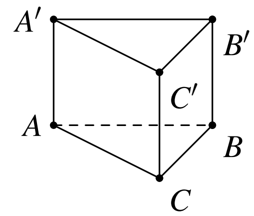
Các trường hợp đặc biệt:

① Thể tích V của khối hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt a, b, c là $V = a \cdot b \cdot c$.

② Thể tích V của khối hộp lập phương có cạnh bằng a là $V = a^3$.

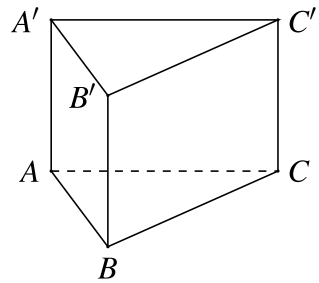
Ví dụ 1.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, tam giác ABC đều và có cạnh bằng a. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.



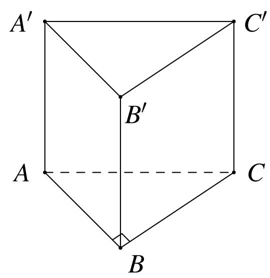
Ví dụ 2.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC đều cạnh bằng a và chu vi của mặt bên $ABB'A'$ bằng $6a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



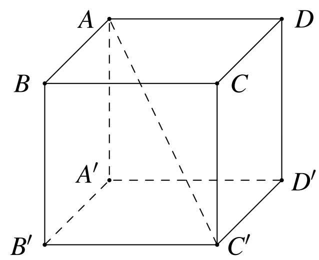
Ví dụ 3.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

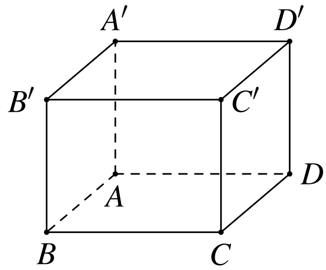


Ví dụ 4.

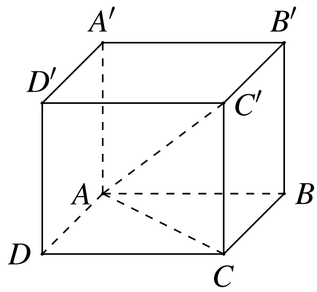
Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.



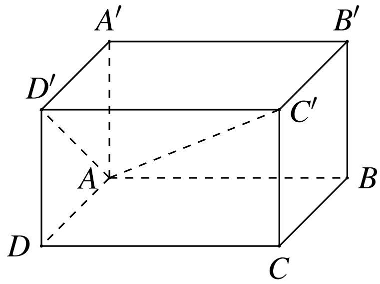
Ví dụ 5.
Tính thể tích của khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, $A'B = 2a$.



Ví dụ 6.
Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Góc giữa đường chéo với đáy bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ này theo a.



Ví dụ 7.
Khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài AD; AD'; AC' lần lượt là 1; 2; 3. Tính thể tích V của khối chóp $A.A'B'C'D'$.



DT 2 Tính thể tích khối chóp

Phương pháp:

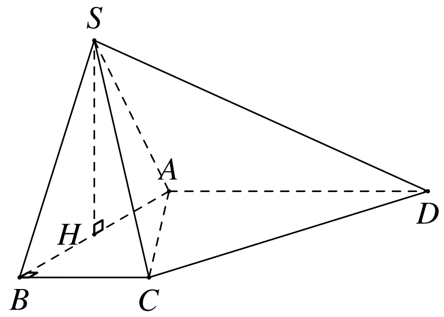
- Tính diện tích đáy $S_{\text{đáy}}$ và độ dài đường cao h của khối chóp;
- Thay vào công thức $V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}} \cdot h$.

Ví dụ 8. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

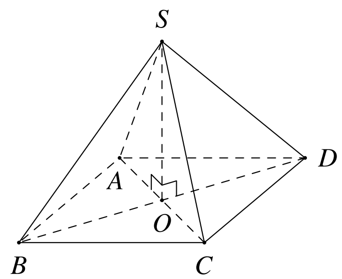
....
....
....
....
....

Ví dụ 9.

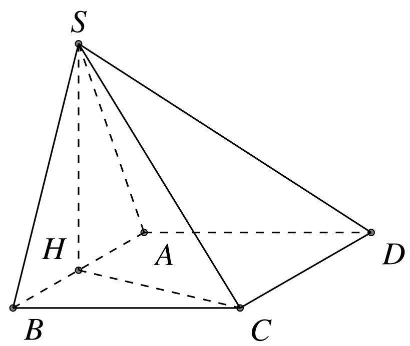
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = \dfrac{AD}{2} = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ACD$.



Ví dụ 10.
Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

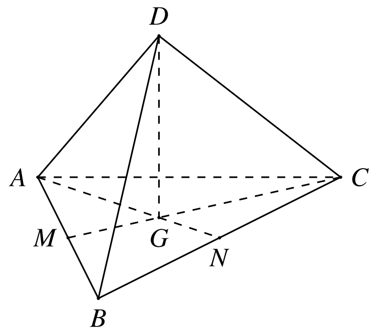


Ví dụ 11.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a$. Hình chiếu của S lên đáy là trung điểm H của cạnh AB, góc tạo bởi SC và đáy là 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.



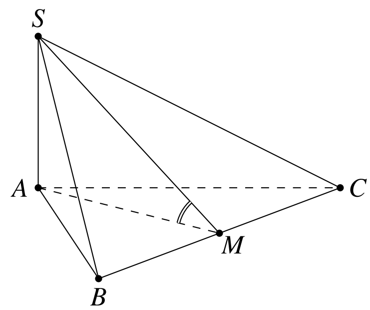
Ví dụ 12.

Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh bằng $2a$.



Ví dụ 13.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Biết góc tạo với hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°, tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.



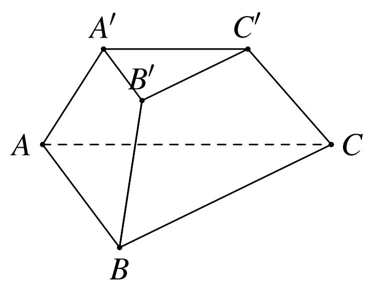
DT 3 Tính thể tích khối chóp cụt đều

Phương pháp:

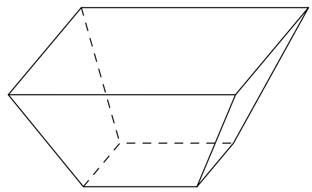
- Tính diện tích hai đáy (lớn, bé) S, S' và độ dài đường cao h của khối chóp cụt đều;
- Thay vào công thức $V\frac{1}{3}\cdot h\cdot(S+S'+\sqrt{S\cdot S'})$.

Ví dụ 14.

Tính thể tích của khối chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB=4a$, $A'B'=a$.



Ví dụ 15.
Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm, đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm.



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Tính thể tích hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = 3a$, $AC = 5a$, $AA' = 2a$.

2. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đường chéo $AC' = \sqrt{6}$.

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

4. Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

5. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy bằng $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

8. Diện tích ba mặt của hình hộp chữ nhật lần lượt là 15 cm^2, 24 cm^2, 40 cm^2. Tính thể tích của khối hộp đó.

9. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh $AA' = a$ và hình chiếu vuông góc H của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

10. Cho hình chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy lớn $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng a. Tính theo a thể tích khối chóp cụt $ABCD.A'B'C'D'$.

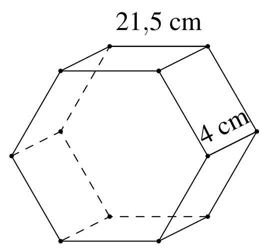
11 Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông cân tại B, $BA = BC = a$, $A'B$ tạo với đáy (ABC) một góc 60°. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

12 Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên ABB_1A_1 bằng 4; khoảng cách giữa cạnh CC_1 và mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 7. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

13 Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BB'C'C)$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30°. Tính thể tích của khối lăng trụ theo a.

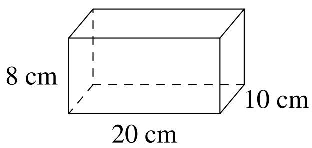
14 Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

15 Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều với chiều cao là 4 cm và cạnh lục giác dài 21,5 cm. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimét khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

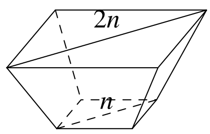


16 Một chì neo câu cá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều được làm hoàn toàn bằng chì có khối lượng 137 mg. Biết cạnh đáy nhỏ và cạnh đáy lớn của khối chóp cụt đều dài lần lượt 1 và 3 cm, khối lượng riêng của chì bằng 11,3 g/cm^3. Tính chiều cao của chì neo câu cá đó theo đơn vị cen-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

17 Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 8 cm (Hình 50a). Để san bớt nước cho đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài n cm, miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n$ (cm) (Hình 50b). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị cen-ti-mét khối.



Hình 50a



Hình 50b

18 Người ta cắt bỏ bốn hình vuông cùng kích thước ở bốn góc của một tấm tôn hình vuông có cạnh 1 m để gò lại thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông cần bỏ đi có độ dài bằng bao nhiêu để thùng hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1 Thể tích khối chóp

Câu 1. (TN-2021). Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{3}{2}a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $\frac{1}{3}a^3$. **D.** a^3.

Câu 2. Một khối chóp có diện tích đáy là 10 cm^2 và chiều cao là 6 cm. Thể tích của khối chóp đó là

A. 20 cm^3. **B.** 60 cm^3. **C.** 30 cm^3. **D.** 10 cm^3.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 4. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\dfrac{2}{3}a^3$. Tính theo a cạnh của hình vuông $ABCD$.

A. a. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Câu 6. Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Tính thể tích khối tứ diện $O.ABC$.

A. $\dfrac{abc}{3}$. **B.** $\dfrac{abc}{4}$. **C.** $\dfrac{abc}{6}$. **D.** $\dfrac{abc}{2}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của khối chóp $S.ABC$.

A. $h = 12\sqrt{3}a$. **B.** $h = 6\sqrt{3}a$. **C.** $h = 4\sqrt{3}a$. **D.** $h = 2\sqrt{3}a$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$ và mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{9}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{27}$.

Câu 9. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và đáy bằng 30°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 10. Thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng 3.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 11. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 3a$, $AC = 5a$. Biết SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt đáy một góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = 20\sqrt{3}a^3$. **B.** $V = 60\sqrt{3}a^3$. **C.** $V = 25\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 75\sqrt{3}a^3$.

Câu 12. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại A. Biết $BC = 3a$, $AB = a$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $V_{S.ABC} = \dfrac{4a^3}{9}$. **B.** $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V_{S.ABC} = \dfrac{2a^3}{9}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{9a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 3a$, $BC = 5a$, $SA = 2a\sqrt{3}$, $\widehat{SAC} = 30^\circ$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc mặt đáy.

A. $V = 3a^3\sqrt{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy, góc tạo bởi (SBC) với đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $SC = a\sqrt{3}$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3}$. **D.** a^3.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a$. Hình chiếu H của S trên mặt phẳng (ABC) thuộc cạnh AB sao cho $AH = 2HB$, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{26}}{36}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{26}}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{13}}{36}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{26}}{72}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm của cạnh AD, cạnh bên SB hợp với đáy một góc 60°. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{5}}{6\sqrt{3}}$.

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên hợp với đáy một góc 30°. Thể tích khối chóp bằng

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20. Kim tự tháp Kê-ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147 m, cạnh đáy dài 230 m. Tính thể tích của Kim tự tháp.

A. 2 592 100 m^3. **B.** 2 592 009 m^3. **C.** 7 776 300 m^3. **D.** 3 888 150 m^3.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích V và M là trọng tâm tam giác SAB. Tính thể tích khối chóp $M.ABCD$.

A. $\dfrac{V}{3}$. **B.** $\dfrac{2V}{3}$. **C.** $\dfrac{V}{2}$. **D.** $2V$.

Câu 22. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có diện tích đáy bằng $2\sqrt{3}$ và diện tích một mặt bên bằng 4. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{22}}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{22}}{3}$.

Câu 23. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, biết SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, (SBC) hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{3R^3}{4}$. **B.** $3R^3$. **C.** $\dfrac{3R^3}{6}$. **D.** $\dfrac{3R^3}{2}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 3a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

2 Thể tích khối lăng trụ

Câu 25. Thể tích khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$. **B.** $2a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** a^3.

Câu 26. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3$, $AD=4$ và $AA'=5$.

A. $\mathrm{V}=10$. **B.** $\mathrm{V}=12$. **C.** $\mathrm{V}=20$. **D.** $\mathrm{V}=60$.

Câu 27. Nếu tăng chiều dài hai cạnh đáy của khối hộp chữ nhật lên 10 lần thì thể tích tăng lên bao nhiêu lần?

A. 100. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 1000.

Câu 28. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 6. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Thể tích khối chóp $O.A'B'C'D'$ là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 29. Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $\sqrt{3}a^2$, độ dài cạnh bên là $a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\sqrt{2}a^3$. **B.** $\sqrt{6}a^3$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 30. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V=\sqrt{2}a^3$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **C.** $V=3\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{4}$.

Câu 31. Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích của khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 32. Cho $(\mathscr{H})$ là khối lăng trụ đứng tam giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau. Biết thể tích của $(\mathscr{H})$ bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Tính độ dài các cạnh của khối lăng trụ $(\mathscr{H})$.

A. $\sqrt[3]{3}$. **B.** $\sqrt[3]{\dfrac{16}{3}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 33. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và mỗi mặt bên đều có diện tích bằng $4a^2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **C.** $2a^3\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 34. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $A'C$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$.

Câu 35. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 36. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = 3a$ bằng

A. $3\sqrt{3}a^3$. **B.** $9a^3$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $3a^3$.

Câu 37. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm, $AC' = 7$ cm. Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. 24 cm^3. **B.** 42 cm^3. **C.** 12 cm^3. **D.** 36 cm^3.

Câu 38. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, tam giác $A'AC$ vuông cân tại A. Thể tích khối hộp đã cho bằng

A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 39. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, đường chéo $A'C$ tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc α thỏa $\cot\alpha = \sqrt{5}$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $\sqrt{5}a^3$. **C.** $\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{5}}$.

Câu 40. Tổng diện tích các mặt của một hình lập phương bằng 150. Thể tích của khối lập phương đó là

A. 125. **B.** 625. **C.** 25. **D.** 145.

Câu 41. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích của tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

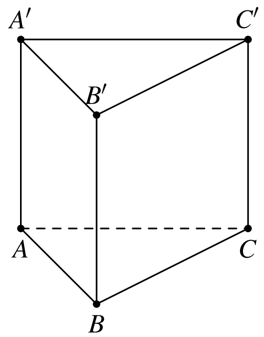
A. $V = 6V_1$. **B.** $V = 4V_1$. **C.** $V = 3V_1$. **D.** $V = 2V_1$.

Câu 42. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, $AB = 2a$, $AC = a$, $BC' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $4a^3$. **C.** $\dfrac{4a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

Câu 43. Một lăng trụ đứng tam giác có các cạnh đáy là 11 cm, 12 cm, 13 cm và diện tích xung quanh bằng 144 cm^2 (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đó là

A. $18\sqrt{105}$ cm^3. **B.** $12\sqrt{105}$ cm^3.
C. $6\sqrt{105}$ cm^3. **D.** $24\sqrt{105}$ cm^3.



Câu 44. (Tốt nghiệp THPT – 2022, Mã đề 101). Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $12\sqrt{2}a^3$. **D.** $4\sqrt{2}a^3$.

Câu 45. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, đường thẳng DB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ góc 30°. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $8a^3\sqrt{2}$. **D.** a^3.

Câu 46. Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là 10cm^2, 20cm^2, 32cm^2. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. 40cm^3. **B.** 64cm^3. **C.** 80cm^3. **D.** 160cm^3.

Câu 47. Cho hình hộp chữ nhật có đường chéo $d = \sqrt{21}$. Độ dài ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân có công bội $q = 2$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 48. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60°, đường thẳng $A'C$ hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 30°. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. a^3. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $2a^3\sqrt{6}$. **D.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 49. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 50. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AA'B'D'$ là tứ diện đều cạnh a, khi đó thể tích của khối hộp đã cho là

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V = a^3\sqrt{2}$.

—HẾT—

Chương 9

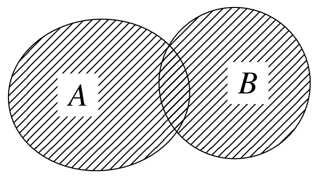
CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

§1. CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

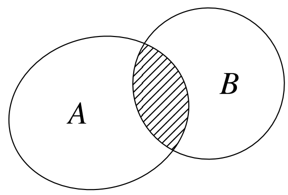
1 PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

Cho hai biến cố A và B. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω.



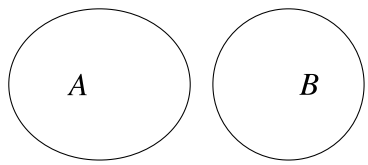
Biến cố hợp: Biến cố: "A hoặc B xảy ra" được gọi là biến cố hợp của A và B.

- Kí hiệu là $A \cup B$.
- Biến cố hợp $A \cup B$ là tập con của không gian mẫu Ω.



Biến cố giao: Biến cố: "Cả A và B đều xảy ra" được gọi là biến cố giao của A và B.

- Kí hiệu là $A \cap B$ hoặc AB;
- Biến cố giao $A \cap B$ là tập con của không gian mẫu Ω.



Biến cố xung khắc: Biến cố A và biến cố B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra. Hai biến cố A và B xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \varnothing$.

⚠ *Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.*

2 CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

Công thức cộng xác suất: Cho hai biến cố A và B. Khi đó

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)}$$

Đặt biệt: Nếu hai biến cố A và B là xung khắc $(A \cap B = \varnothing)$ thì

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)}$$

⚠ *Cho biến cố A và biến cố đối* $\overline{A}$. *Ta có* $\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Biến cố hợp, biến cố giao, biến cố xung khắc

Ví dụ 1. Một tổ trong lớp 11B có 4 học sinh nữ là Hương, Hồng, Dung, Phương và 5 học sinh nam là Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải. Trong giờ học, giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ đó lên bảng để kiểm tra bài. Xét các biến cố sau:

① A: "Học sinh đó là một bạn nữ";

② B: "Học sinh đó có tên bắt đầu là chữ cái H".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố A, B và $M = A \cup B$.

Ví dụ 2. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5", B là biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6". Gọi C là biến cố "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm". Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao $A \cap C$ và $B \cap C$.

Ví dụ 3. Một hộp có 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Hãy xác định các cặp biến cố xung khắc trong các biến cố sau:

A : "Hai viên bi lấy ra cùng màu xanh";

B : "Hai viên bi lấy ra cùng màu đỏ";

C : "Hai viên bi lấy ra cùng màu";

D : "Hai viên bi lấy ra khác màu".

Ví dụ 4. Thực hiện hai thí nghiệm. Gọi T_1 và T_2 lần lượt là các biến cố "Thí nghiệm thứ nhất thành công"và "Thí nghiệm thứ hai thành công". Hãy biểu diễn các biến cố sau theo hai biến cố T_1 và T_2.

a) A: "Có ít nhất một trong hai thí nghiệm thành công".

b) B: "Có đúng một trong hai thí nghiệm thành công".

DT 2 Công thức cộng xác suất của hai biến cố xung khắc

- Nếu hai biến cố A và B là xung khắc $\left(A \cap B = \varnothing\right)$ thì

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)}$$

- Cho biến cố A và $\overline{A}$ là biến cố đối của A. Khi đó, ta có

$$\boxed{\mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)}$$

Ví dụ 5. Một hộp chứa 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 20. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 37";

b) "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6".

Ví dụ 6. Một hộp chứa 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Cả 4 viên bi lấy ra đều có cùng màu";

b) "Có ít nhất 3 viên bi xanh trong 4 viên bi lấy ra".

Ví dụ 7. Trong một căn phòng có 36 người, trong đó có 25 người họ Nguyễn và 11 người họ Trần. Chọn ngẫu nhiên hai người trong phòng đó. Tính xác suất để hai người được chọn có cùng họ.

Ví dụ 8. Một hộp chứa 10 quả bóng xanh và 10 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 5 quả bóng từ hộp. Tính xác suất của biến cố " có ít nhất 3 quả bóng xanh trong 5 quả bóng lấy ra".

Ví dụ 9. Một lớp có 41 học sinh trong đó có 15 bạn nam và 26 bạn nữ. Cô giáo chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên ra bốn bạn đi trực ban.

a) Tính xác suất để cả bốn bạn đó đều là nữ.

b) Tính xác suất để có ít nhất một bạn nam.

Ví dụ 10. Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 10 thẻ đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hòm một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ lấy ra

a) có ít nhất một thẻ đánh số 1.

b) tổng hai số ghi trên hai thẻ khác 19.

DT 3 Công thức cộng xác suất của hai biến cố bất kì

Cho hai biến cố A và B. Khi đó

$$\boxed{\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)}$$

Ví dụ 11. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp.

a) Viết các kết quả thuận lợi của không gian mẫu Ω và hai biến cố

A: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp";

B: "Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa".

b) Viết các kết quả thuận lợi của mỗi biến cố $A \cup B$, $A \cap B$.

c) Tính $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B)$.

Ví dụ 12. Một hộp đựng 25 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố P : "Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 4"; Q: "Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 6".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố P, Q và $S = P \cap Q$.

c) Tính xác suất của biến cố $P \cup Q$.

Ví dụ 13. Lớp 11A có 44 học sinh trong đó có 14 học sinh đạt điểm tổng kết môn Hóa học loại giỏi và 15 học sinh đạt điểm tổng kết môn Vật lý loại giỏi. Biết rằng khi chọn một học sinh của lớp đạt điểm tổng kết môn Hóa học hoặc Vật lý loại giỏi có xác suất là 0,5. Số học sinh đạt điểm tổng kết giỏi cả hai môn Hóa học và Vật lý là

Ví dụ 14. Gieo ngẫu nhiên 3 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố A: "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc chia hết cho 15".

Ví dụ 15. Trong một công ty có 40 nhân viên, trong đó có 19 người thích chơi bóng bàn, 20 người thích chơi cầu lông, 8 người không thích chơi cả cầu lông và bóng bàn. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong công ty đó. Tính xác suất để người đó

a) Thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng bàn và cầu lông.

b) Thích chơi cầu lông và không thích chơi bóng bàn.

c) Thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông.

d) Thích chơi đúng một trong hai môn.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5", B là biến cố "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6".

a) Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố trên.

b) Hãy liệt kê các kết quả của phép thử làm cho cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.

2 Tung một đồng xu cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp (S) ở lần tung thứ nhất".

B: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa (N) ở lần tung thứ nhất".

Hai biến cố trên có xung khắc hay không? Vì sao?

3 Hai xạ thủ X, Y mỗi người bắn một viên đạn vào một mục tiêu. Xét các biến cố A: "Xạ thủ X bắn trúng"; B: "Xạ thủ Y bắn trúng". Nêu nội dung của các biến cố AB, $A \cup B$, $\overline{AB}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, $\overline{A}B \cup A\overline{B}$.

4 Trong một hộp có 8 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong hộp. Gọi A là biến cố: "Cả hai viên bi có màu xanh"; B là biến cố: "có một viên bi màu xanh và một viên bi màu đỏ".

a) Tính $\mathrm{P}(A)$ và $\mathrm{P}(B)$.

b) Tính xác suất để trong hai viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu xanh.

5 Trong bình đựng có 10 viên bi, trong đó có 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy được 1 hoặc 2 viên bi đỏ.

6 Một hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 40. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

a) "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 76".

b) "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10".

7 Xếp ngẫu nhiên 6 người A, B, C, D, E, F vào một cái bàn dài có 6 chỗ ngồi. Tính xác suất để

a) hai người A và B ngồi cạnh nhau.

b) hai người A và B không ngồi cạnh nhau.

8 Chọn ngẫu nhiên hai người từ một nhóm 9 nhà toán học tham dự hội thảo, trong nhóm có 5 nhà toán học nam và 4 nhà toán học nữ. Tính xác suất để hai người được chọn có cùng giới tính.

9 Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên hai viên biên. Tính xác suất để chọn được hai viên bi cùng màu.

10 Mai, Lan và 5 bạn cùng lớp xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố "Có it nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng".

11 Hai đội A và B thi đấu trận chung kết bóng chuyền nữ chào mừng ngày 20 - 11 (trận chung kết tối đa 5 hiệp). Đội nào thắng 3 hiệp trước thì thắng trận. Xác suất để đội A thắng mỗi hiệp là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất P để đội A thắng trận.

12 Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 34 em thích ăn chuối, 22 em thích ăn cam và 2 em không thích ăn cả hai loại quả đó. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để em đó:

a) Thích ăn ít nhất một trong hai loại quả chuối hoặc cam.

b) Thích ăn cả hai loại quả chuối và cam.

13 Một nhóm có 50 người được phỏng vấn họ đã mua cành đào hay cây quất vào dịp Tết vừa qua, trong đó có 31 người mua cành đào, 12 người mua cây quất và 5 người mua cả cành đào và cây quất. Chọn ngẫu nhiên một người. Tính xác suất để người đó:

a) Mua cành đào hoặc cây quất.

b) Mua cành đào và không mua cây quất.

c) Không mua cành đào và không mua cây quất.

d) Mua cây quất và không mua cành đào.

14 Một nhóm 30 bệnh nhân có 24 người điều trị bệnh X, có 12 người điều trị cả bệnh X và bệnh Y, có 26 người điều trị ít nhất một trong hai bệnh X hoặc Y. Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân. Tính xác suất để người đó:

a) Điều trị bệnh Y.

b) Điều trị bệnh Y và không điều trị bệnh X.

c) Không điều trị cả hai bệnh X và Y.

15 Một nhà xuất bản phát hành hai cuốn sách A và B. Thống kê cho thấy có 50% người mua sách A; 70% người mua sách B; 30% người mua cả sách A và sách B. Chọn ngẫu nhiên một người mua. Tính xác suất để:

a) Người mua đó mua ít nhất một trong hai sách A hoặc B;

b) Người mua đó không mua cả sách A và sách B.

16 Một dãy phố gồm 40 gia đình, trong đó 23 gia đình có điện thoại thông minh, 18 gia đình có laptop và 26 gia đình có ít nhất một trong hai thiết bị này. Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong dãy phố. Tính xác suất để gia đình đó:

a) Có điện thoại thông minh và laptop.

b) Có điện thoại thông minh nhưng không có laptop.

c) Không có cả điện thoại thông minh và laptop.

17 Tại các trường trung học phổ thông của một tỉnh, thống kê cho thấy có 63% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa A, 56% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa B và 28,5% giáo viên môn Toán tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B. Tính tỉ lệ giáo viên môn Toán các trường trung học phổ thông của tỉnh đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai biến cố A và B. Biến cố " A hoặc B xảy ra" được gọi là

A. Biến cố giao của A và B. **B.** Biến cố đối của A.
C. Biến cố hợp của A và B. **D.** Biến cố đối của B.

Câu 2. Cho hai biến cố A và B. Biến cố " Cả A và B đều xảy ra" được gọi là

A. Biến cố giao của A và B. **B.** Biến cố đối của A.
C. Biến cố hợp của A và B. **D.** Biến cố đối của B.

Câu 3. Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $\mathrm{P}(A \cup B)$ bằng

A. $\mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$. **B.** $\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B)$. **C.** $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A \cap B)$. **D.** $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Câu 4. Nếu A và B là hai biến cố của cùng một phép thử thì $\mathrm{P}(A \cup B)$ bằng

A. $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$. **B.** $\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

C. $\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$.
D. $\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)$.

Câu 5. Một hộp có 10 viên bi màu hồng và 14 viên bi màu vàng, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi. Xét các biến cố:

P : "Hai viên bi được lấy ra có màu hồng";

Q : "Hai viên bi được lấy ra có màu vàng".

Khi đó, biến cố hợp của hai biến cố P và Q là:

A. "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu hồng".
B. "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu".
C. "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu vàng".
D. "Hai viên bi được lấy ra có màu khác nhau".

Câu 6. Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tích số chấm xuất hiện là số lẻ”. Biến cố nào sau đây xung khắc với biến cố A?

A. “Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm”.
B. “Tổng số chấm xuất hiện là số lẻ”.
C. “Xuất hiện ít nhất một mặt có số chấm là số lẻ”.
D. “Xuất hiện hai mặt có số chấm khác nhau”.

Câu 7. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên từ 1 đến 20 . Xét các biến cố A : "Số được chọn chia hết cho 3 "; B : "Số được chọn chia hết cho 4 ". Khi đó biến cố $A\cap B$ là

A. $\{3;4;12\}$.
B. $\{3;4;6;8;9;12;15;16;18;20\}$.
C. $\{12\}$.
D. $\{3;6;9;12;15;18\}$.

Câu 8. Một hộp có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30 . Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp. Xét các biến cố sau:

P : "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 2"

Q : "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 4 "

Biến cố $P\cap Q$ là

A. "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 8 ".
B. "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 2".
C. "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 6 ".
D. "Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 4 ".

Câu 9. Cho $P(A)=\frac{1}{4}, P(A\cup B)=\frac{1}{2}$. Biết A,B là hai biến cố xung khắc, thì $P(B)$ bằng

A. $\frac{1}{8}$.
B. $\frac{1}{4}$.
C. $\frac{3}{4}$.
D. $\frac{1}{3}$.

Câu 10. Cho A là một biến cố liên quan phép thử T. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $P(A)=0 \Leftrightarrow A=\Omega$.
B. $P(A)$ là số nhỏ hơn 1.
C. $P(A)$ là số lớn hơn 0.
D. $P(A)=1-P(\bar{A})$.

Câu 11. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển lấy ra có ít nhất 1 quyển là môn toán.

A. $\frac{2}{7}$.
B. $\frac{1}{21}$.
C. $\frac{37}{42}$.
D. $\frac{5}{42}$.

Câu 12. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn có ít nhất một nữ.

A. $\frac{2}{15}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{1}{15}$.

Câu 13. Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ một hộp chứa 5 quả bóng xanh và 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Xác suất của biến cố "Hai bóng lấy ra có cùng màu"là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Câu 14. Một hộp chứa sáu quả cầu trắng và bốn quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả. Tính xác suất sao cho có ít nhất một quả màu trắng?

A. $\frac{209}{210}$. **B.** $\frac{8}{105}$. **C.** $\frac{1}{21}$. **D.** $\frac{1}{210}$.

Câu 15. Gieo một con súc xắc cân đối và đồng chất hai lần. Xác suất đề ít nhất một lần xuất hiện mặt sáu chấm là

A. $\frac{6}{36}$. **B.** $\frac{8}{36}$. **C.** $\frac{12}{36}$. **D.** $\frac{11}{36}$.

Câu 16. Một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó 4 phế phẩm. Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm.

A. $\frac{637}{969}$. **B.** $\frac{7}{9}$. **C.** $\frac{91}{285}$. **D.** $\frac{91}{323}$.

Câu 17. Trong nhóm 60 học sinh có 30 học sinh thích học Toán, 25 học sinh thích học Lý và 10 học sinh thích cả Toán và Lý. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ nhóm này. Xác suất để được học sinh này thích học ít nhất là một môn Toán hoặc Lý?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 18. Một lớp học gồm 50 bạn, trong đó có 20 bạn thích chơi bóng đá, 28 bạn thích chơi bóng rổ và 8 bạn thích chơi cả hai môn. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Xác suất của biến cố "Bạn được gặp thích chơi bóng đá hoặc bóng rổ" là

A. $0,16$. **B.** $0,96$. **C.** $0,48$. **D.** $0,8$.

Câu 19. Một hộp đựng 10 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 15 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 15 . Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ trong hộp. Gọi A là biến cố "Viên bi lấy ra có màu đỏ", B là biến cố "Viên bi lấy ra ghi số chẵn". Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. $0,4$. **B.** $0,88$. **C.** $0,48$. **D.** $0,68$.

Câu 20. Có 12 người xếp thành một hàng dọc (vị trí của mỗi người trong hàng là cố định). Chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng. Tính xác suất để 3 người được chọn không có 2 người đứng nào cạnh nhau.

A. $\frac{6}{11}$. **B.** $\frac{55}{126}$. **C.** $\frac{21}{55}$. **D.** $\frac{7}{110}$.

—HẾT—

§2. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

Định nghĩa: Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý: Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau cũng độc lập: A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$.

2 CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì

$$\boxed{\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B)}$$

Nếu $\mathrm{P}(AB) \neq \mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B)$ *thì A và B không độc lập.*

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Biến cố độc lập

Ví dụ 1. Gieo hai đồng xu cân đối. Xét các biến cố A: "Cả hai đồng xu đều ra mặt sấp", B: "Có ít nhất một đồng xu ra mặt sấp". Hỏi A và B có độc lập hay không?

Ví dụ 2. Một hộp đựng 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh, có cùng kích thước và khối lượng.

a) Bạn Minh lấy ngẫu nhiên một viên bi, ghi lại màu của viên bi được lấy ra rồi trả lại viên bi vào hộp. Tiếp theo, bạn Hùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:
A: "Minh lấy được viên bi màu đỏ";
B: "Hùng lấy được viên bi màu xanh".
Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

b) Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi và không trả lại vào hộp. Tiếp theo, bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:
C: "Sơn lấy được viên bi màu đỏ";
D: "Tùng lấy được viên bi màu xanh".
Chứng tỏ rằng hai biến cố C và D không độc lập.

DT 2 Công thức nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Ví dụ 3. Cho hai biến cố độc lập A và B cùng liên quan đến một phép thử thỏa mãn $\mathrm{P}(A) = 0{,}2$ và $\mathrm{P}(B) = 0{,}3$. Tính xác suất của các biến cố: $\overline{A}$, $\overline{B}$, AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$ và $\overline{A}\overline{B}$.

Ví dụ 4. Hai bệnh nhân cùng nhiễm một loại virus. Xác suất biến chứng nặng của bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai lần lượt là 0,2 và 0,25; khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập. Tính xác suất của các biến cố:

a) M: "Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều bị biến chứng nặng";

b) N: "Bệnh nhân thứ nhất không bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai bị biến chứng nặng";

c) Q: "Bệnh nhân thứ nhất bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai không bị biến chứng nặng";

d) R: "Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều không bị biến chứng nặng";

e) S: "Có ít nhất một trong hai bệnh nhân bị biến chứng nặng".

Ví dụ 5. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh; hộp thứ hai chứa 6 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả cầu. Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ.

Ví dụ 6. Một phần mềm chuyển đổi ngôn ngữ có xác suất dịch chính xác một câu Tiếng Anh sang Tiếng Việt là 0,8. Hỏi nếu phần mềm đó dịch một văn bản 100 câu từ Tiếng Anh sang Tiếng Việt thì xác suất dịch sai hai câu là bao nhiêu?

Ví dụ 7. Hai bạn An và Bình cùng tập ném bóng rổ một cách độc lập ở hai nửa sân khác nhau. Xác suất bạn An và bạn Bình ném bóng vào rổ lần lượt là $0,6$ và $0,9$. Trong cùng một lần ném, tính xác suất có ít nhất một bạn ném bóng vào rổ.

Ví dụ 8. Hai bạn An và Bình không quen biết nhau và đều học xa nhà. Xác suất để bạn An về thăm nhà vào ngày Chủ nhật là 0,2 và của bạn Bình là 0,25. Dùng sơ đồ hình cây để tính xác suất vào ngày Chủ nhật mà

a) cả hai bạn đều về thăm nhà.

b) có ít nhất một bạn về thăm nhà.

c) cả hai bạn đều không về thăm nhà.

d) Chỉ có bạn An về thăm nhà.

e) có đúng một bạn về thăm nhà.

Ví dụ 9. Ở lúa, hạt gạo đục là tính trạng trội hoàn toàn so với hạt gạo trong. Cho cây lúa có hạt gạo đục thuần chủng thụ phấn với cây lúa có hạt gạo trong được F1 toàn hạt gạo đục. Tiếp tục cho các cây lúa F1 thụ phấn với nhau và thu được các hạt gạo mới. Lần lượt chọn ra ngẫu nhiên 2 hạt gạo mới, tính xác suất của biến cố "Có đúng 1 hạt gạo đục trong 2 hạt gạo được lấy ra".

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Có hai chuồng nuôi thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 3 con thỏ trắng và 7 con thỏ đen. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra một con thỏ. Xét hai biến cố sau:
A: "Bắt được con thỏ trắng từ chuồng I";
B: "Bắt được con thỏ đen từ chuồng II".
Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

2 Có hai chuồng nuôi gà. Chuồng I có 9 con gà mái và 3 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái và 6 con gà trống. Bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng I để đem bán rồi dồn các con gà còn lại của chuồng I vào chuồng II. Sau đó bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng II. Xét hai biến cố sau:
E: "Bắt được con gà trống từ chuồng I";
F: "Bắt được con gà mái từ chuồng II".
Chứng tỏ rằng hai biến cố E và F không độc lập.

3 Cho $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A \cup B) = 0{,}6$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

4 Gieo hai con xúc xắc cân đối. Xét các biến cố:
A: "Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm";
B: "Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7".
Chứng tỏ rằng A và B không độc lập.

5 Có 3 hộp I, II, III. Mỗi hộp chứa ba tấm thẻ đánh số $1, 2, 3$. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Xét các biến cố sau:
A: "Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ là 6";
B: "Ba tấm thẻ có ghi số bằng nhau".

a) Tính $P(A), P(B)$.

b) Hỏi A, B có độc lập không?

6 Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

a) Biết $P(A) = 0,4$ và $P(\overline{A}B) = 0,3$. Tính xác suất của các biến cố B và $A \cup B$.

b) Biết $P(\overline{A}B) = 0,4$ và $P(A \cup B) = 0,9$. Tính xác suất của các biến cố A, B và AB.

7 Cho A, B là hai biến cố độc lập và $P(AB) = 0{,}1$; $P\left(A\overline{B}\right) = 0{,}4$. Tìm $P\left(A \cup \overline{B}\right)$.

8 Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án của câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.

9 Hai đội A và B thi đấu trận chung kết bóng chuyền nữ chào mừng ngày 20 - 11 (trận chung kết tối đa 5 hiệp). Đội nào thắng 3 hiệp trước thì thắng trận. Xác suất để đội A thắng mỗi hiệp là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất P để đội A thắng trận.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hai biến cố A và $\bar{B}$ không độc lập.
B. Hai biến cố $\bar{A}$ và $\bar{B}$ không độc lập.
C. Hai biến cố $\bar{A}$ và B độc lập.
D. Hai biến cố A và $A \cup B$ độc lập.

Câu 2. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0{,}4$ và $P(B) = 0{,}5$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. 0,9 . **B.** 0,7. **C.** 0,5. **D.** 0,2.

Câu 3. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $\mathrm{P}(A) = 0,4$ và $\mathrm{P}(AB) = 0,2$. Xác suất của biến cố B là

A. $0,5$. **B.** $0,6$. **C.** $0,7$. **D.** $0,8$.

Câu 4. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $\mathrm{P}(A) = 0,4$ và $\mathrm{P}(AB) = 0,2$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. $0,6$. **B.** $0,7$. **C.** $0,8$. **D.** $0,9$.

Câu 5. Hai người độc lập nhau ném bóng vào rổ. Mỗi người ném vào rổ của mình một quả bóng. Biết rằng xác suất ném bóng trúng vào rổ của từng người tương ứng là $\frac{1}{5}$ và $\frac{2}{7}$. Gọi A là biến cố: "Cả hai cùng ném bóng trúng vào rổ". Khi đó, xác suất của biến cố A là bao nhiêu?

A. $P(A) = \frac{1}{25}$. **B.** $P(A) = \frac{4}{49}$. **C.** $P(A) = \frac{12}{35}$. **D.** $P(A) = \frac{2}{35}$.

Câu 6. Xác suất thực hiện thành công một thí nghiệm là $0,7$. Thực hiện thí nghiệm đó 2 lần liên tiếp một cách độc lập với nhau. Xác suất của biến cố "Cả 2 lần thí nghiệm đều thành công" là

A. $0,7$. **B.** $0,21$. **C.** $0,49$. **D.** $1,4$.

Câu 7. Trong phòng làm việc có hai máy tính hoạt động độc lập với nhau, khả năng hoạt động tốt trong ngày của hai máy này tương ứng là $0,75$ và $0,85$. Xác suất để cả hai máy hoạt động không tốt trong ngày là

A. $0,0675$. **B.** $0,0375$. **C.** $0,0575$. **D.** $0,0475$.

Câu 8. Xác suất thực hiện thành công một thí nghiệm là $0,7$. Thực hiện thí nghiệm đó 2 lần liên tiếp một cách độc lập với nhau. Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất thí nghiệm thất bại, lần thứ hai thí nghiệm thành công" là:

A. $0,21$. **B.** $0,09$. **C.** 1. **D.** $0,42$.

Câu 9. Ba xạ thủ A_1, A_2, A_3 độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của A_1, A_2, A_3 tương ứng là $0,7$; $0,6$ và $0,5$. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

A. $0,45$. **B.** $0,21$. **C.** $0,94$. **D.** $0,75$.

Câu 10. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh; hộp thứ hai chứa 6 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả cầu. Xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ bằng

A. $\frac{7}{20}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{20}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

—HẾT—