

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

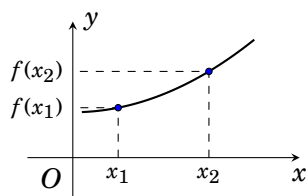
1 Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng).

Ghi nhớ 1

Hàm số đồng biến trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

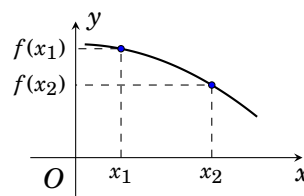


Trên K , đồ thị là một "đường đi lên" khi xét từ trái sang phải.

Ghi nhớ 2

Hàm số nghịch biến trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Trên K , đồ thị là một "đường đi xuống" khi xét từ trái sang phải.

Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

- Nếu $y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- Nếu $y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

2 Cực trị của hàm số

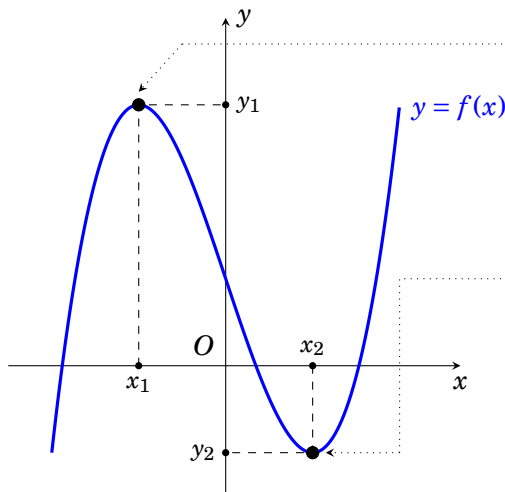
Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty, b$ có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

Định lý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Các tên gọi:



$(x_1; y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số;

- x_1 là điểm cực đại của hàm số;
- y_1 là giá trị cực đại của hàm số.

$(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số;

- x_2 là điểm cực tiểu của hàm số;
- y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Bài toán tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = f(x)$.
- ② Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ thuộc $\mathcal{D}$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần, xét dấu y' và lập bảng biến thiên. Từ đây, nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị.

Ghi nhớ cách xét dấu:

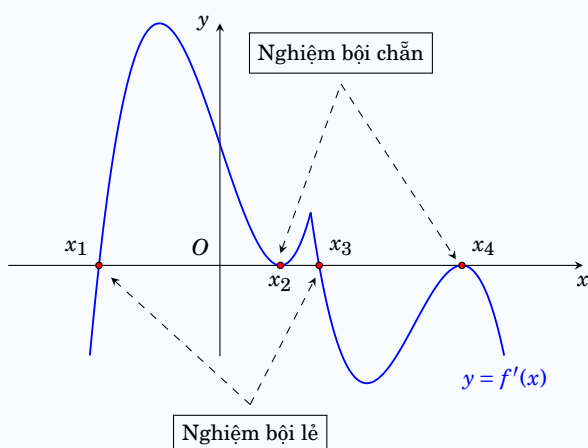
✓ Nếu

$$f'(x) = (x-a)(x-b)^2(x-c)^{2n}(x-d)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

thì phương trình $f'(x) = 0$ có

- $x = a$ là nghiệm đơn;
- $x = b$ là nghiệm kép;
- $x = c$ là nghiệm bội chẵn;
- $x = d$ là nghiệm bội lẻ.

✓ Khi xét dấu $f'(x)$ thì $f'(x)$ sẽ không đổi dấu khi qua nghiệm kép (nghiệm bội chẵn) và đổi dấu khi qua nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ).



BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ Bài 1. Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số sau

a) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$;

b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

d) $y = -2x^4 + 4x^2$;

e) $y = x^4 + 4x^3 - 1$;

f) $y = -16x^4 + x - 1$.

Bài 2. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x+1};$

b) $y = \frac{3x+1}{x-1};$

c) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1};$

d) $y = x + \frac{4}{x};$

e) $y = \sqrt{x^2-2x};$

f) $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}.$

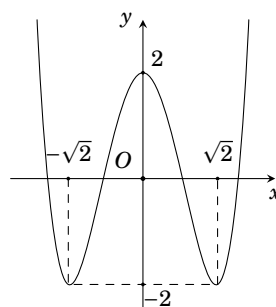
Hỏi thể tích $V(T)$, $0^{\circ}\text{C} \leq T \leq 30^{\circ}\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

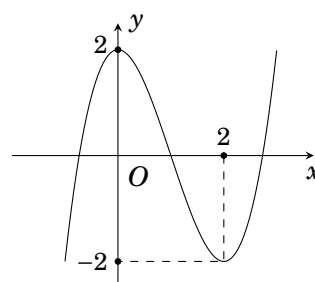
Hỏi thể tích $V(T)$, $0^{\circ}\text{C} \leq T \leq 30^{\circ}\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

D. $(0; \sqrt{2})$.

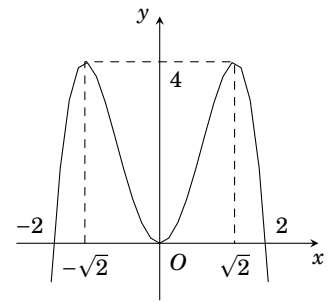


D. Hàm số nghịch biến trên $(0;2)$.



Câu 3. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = 2$. B. $x = 0$.
C. $x = -2$. D. $x = 4$.



Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
B. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2; -4)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x - 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.
D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 7. Gọi x_1 là điểm cực đại x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

A. 2.

B. 1.

C. -1.

D. 0.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 8. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ bằng

A. $2\sqrt{5}$.B. $2\sqrt{2}$.

C. 2.

D. 4.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 9. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1; 0)$.B. $(-1; +\infty)$.C. $(-3; 8)$.D. $(-\infty; -1)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 10. Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Gọi y_{CD}, y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2+3x+3}{x+2}$. Giá trị của biểu thức $y_{CD}^2 - 2y_{CT}^2$ bằng

- A. 8.
- B. 7.
- C. 9.
- D. 6.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = (x-3)e^x$.

- A. $x = 3$.
- B. $x = 0$.
- C. $x = 2$.
- D. $x = 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Câu 15. Cho hàm số $y = x^2 + 4\ln(3 - x)$. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số đã cho.

- A.** $y_{\text{CD}} = 2$. **B.** $y_{\text{CD}} = 4$. **C.** $y_{\text{CD}} = 1 + 4\ln 2$. **D.** $y_{\text{CD}} = 1$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

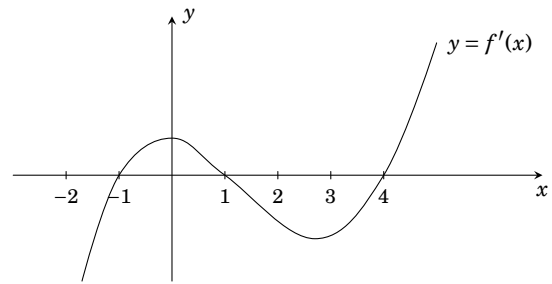
- A. Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến.
B. Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.
D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

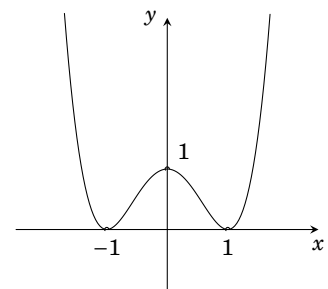
Câu 18. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- C. Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực tiểu.
- D. Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực đại.



Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó nhận xét nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ không có cực trị.
- B. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực tiểu.
- C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một cực đại.
- D. Hàm số $f(x)$ có 3 cực trị.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
- d) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	+	0	+

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.
c) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $2x + y - 4 = 0$.
d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ.

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
c) Tọa độ điểm $A(-2; -2)$, $B(0; 2)$.
d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB = 2\sqrt{5}$.

Câu 23. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- a) Phương trình hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.
c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.
d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.

 Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

① Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}.$$

② Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}.$$

Trường hợp hệ số a có chứa tham số, ta kiểm tra thêm trường hợp $a = 0$.

 Xét hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có $y' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$, với $ad-cb \neq 0$ và $c \neq 0$.

① Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad - cb > 0.$$

② Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad - cb < 0.$$

 Xét hàm phân thức $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có $y' = \frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$, với $ad \neq 0$.

① Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}.$$

② Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

 **Bài 1.** Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

b) $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 5)$.

d) $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- a) $y = \frac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.
- b) $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định
- c) $y = \frac{mx-8}{x-2m}$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.
- d) $y = \frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

Bài 3. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = \frac{2x^2 + 3x + m + 1}{x + 1}$ đồng biến trên các khoảng xác định.

b) $y = \frac{x^2 + (m + 1)x - 1}{2 - x}$ (m là tham số) nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 17. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{x+m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

- A. $m > -2$. B. $m < -2$. C. $m \leq -2$. D. $m \geq -2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x+1-m}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases}$. B. $-1 < m < 2$. C. $-1 \leq m \leq 2$. D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- A. $[2; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 2]$. D. $(-\infty; 2)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

A. $-2 < m < 2$.

B. $-2 < m < -1$.

C. $-2 \leq m < -1$.

D. $-2 < m \leq -1$.

Câu 6. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ là

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 9.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + (m^2 + 3)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- D. 0.**

Câu 8. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- D. 6.**

Câu 9. Cho hàm số $y = (m - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - 2x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- D. 6.**

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

A. $-1 < m < \frac{1}{3}$.

B. $m < -1$.

C. $m > \frac{1}{3}$.

D. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m + 1)x^2 + 6m(m + 1)x + 2019$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 2020.

B. 2018.

C. 2021.

D. 2019.

D. $[0; +\infty)$.

D. $m \geq 0$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{x^2 - 8x}{x + m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $(-8; 0)$.

B. $(0; 8)$.

C. $[0; 8]$.

D. $[-8; 0]$.

Câu 15. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x + 1 + \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

A. $(-\infty; 0)$.

B. $[0; 1)$.

C. $[0; +\infty) \setminus \{1\}$.

D. $(-\infty; 0]$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = 2^{x^3 - x^2 + mx + 1}$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. $m \leq -8$.

B. $m > -8$.

C. $m \geq -1$.

D. $m < -1$.

D. 4.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\frac{3}{4} \leq m < 0$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2+2m)x - 3$, với m là tham số.

- a)** Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -m$ và $x_2 = -m - 2$.
c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \geq -1$.

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{x+5}{x+m}$, với m là tham số.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m \geq 5$.
c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m < 5$.
d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -8)$ khi và chỉ khi $(5; 8)$.

 Tìm m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước ($f(x)$ có đạo hàm tại x_0):

- ① Giải điều kiện $y'(x_0) = 0$, tìm m .
- ② Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được và chọn giá trị m nào thỏa yêu cầu.

 Biện luận cực trị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ với $\Delta_{y'} = b^2 - 3ac$

- ① $\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$: Hàm số có hai điểm cực trị
- ② $\Delta_{y'} \leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$: Hàm số không có cực trị.

CHÚ Ý

 Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$ thì $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$.

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

 Các công thức tính toán thường gặp:

- Độ dài $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$
- Khoảng cách từ M đến Δ : $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, với $\Delta: Ax + By + C = 0$.
- Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \text{hoành} \cdot \text{hoành} + \text{tung} \cdot \text{tung} = 0$.
- Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$, với $\overrightarrow{AB} = (a_1; b_1)$, $\overrightarrow{AC} = (a_2; b_2)$.

 Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = -\frac{2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

 **Bài 1.** Tìm m để hàm số

a) $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

b) $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$ đạt cực đại tại $x_0 = 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- d) $y = -x^3 - 3mx^2 + m - 2$ với m là tham số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = 2$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (1-3m)x + 2$ có cực đại và cực tiểu.

- A. $m \leq -5; m \geq 0$. B. $m < -5; m > 0$. C. $-5 < m < 0$. D. $-5 \leq m \leq 0$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 2$ có cực đại và cực tiểu.

- A. $m > -3$. B. $m \geq 3$. C. $m \geq -3$. D. $m > 3$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

- A. 2. B. 4. C. 0. D. Vô số.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 5. Giả sử hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}mx$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 0$. Giá trị của m là

A. $m = \frac{4}{3}$.

B. $m = -3$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 12x + m + 2$ có hai cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía trục hoành?

A. $m = -2$.

B. $-18 < m < 14$.

C. $\forall m \in \mathbb{R}$.

D. $m \neq 1$.

Câu 8. Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - (m^2 - 4)x + 1$ có hai điểm cực trị nằm ở hai phía của trục Oy là

A. $(-\infty; 2)$.

B. $\mathbb{R} \setminus [-2; 2]$.

C. $(-2; 2)$.

D. $(2; +\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 2$.

Câu 10. Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

A. $m = 3$.

B. $m = -3$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Câu 11. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = -7$.

D. $m = 5$.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Khi đó $a + b$ bằng

A. -4 .

B. 4 .

C. 2 .

D. -2 .

Câu 13. Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tích $m_1 \cdot m_2$ bằng

A. 12 .

B. 6 .

C. -15 .

D. -20 .

D. -2.

d) Hàm số có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CP} < x_{CT}$ khi $0 < m < 2$.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số.

- a) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m .
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$.
- c) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$.
- d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn thuộc đường thẳng cố định với hệ số góc $k = -3$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$, với m là tham số.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.
- b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ khi $m = \frac{1}{2}$.
- d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị có phương trình là $y = 2x - 2m$.