

Mục lục

Chương 1.	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	1
Bài 1.	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC	1
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	4
	1. Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn	4
	2. Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles	6
	3. Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác	7
	4. Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác	10
	5. Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức	11
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	19
Bài 2.	CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC	29
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	29
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	30
	1. Sử dụng công thức cộng, công thức nhân đôi	30
	2. Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng	32
	3. Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích	34
	4. Các bài toán chứng minh, rút gọn	34
	5. Vận dụng thực tiễn	36
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	42
Bài 3.	HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ	52
A	KIỆN THỨC CẦN NHỚ	52
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	53
	1. Tìm tập xác định của hàm số lượng giác	53
	2. Tính chẵn lẻ của hàm số	54
	3. Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất	55
	4. Đồ thị hàm số lượng giác	56
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	61
Bài 4.	PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	70

A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	70
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	72
	1. Giải các phương trình lượng giác cơ bản.....	72
	2. Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng.....	73
	3. Vận dụng thực tiễn.....	73
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	78
	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM	88
A	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1.....	88
B	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2.....	88
C	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3.....	88
D	ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 4.....	88

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC



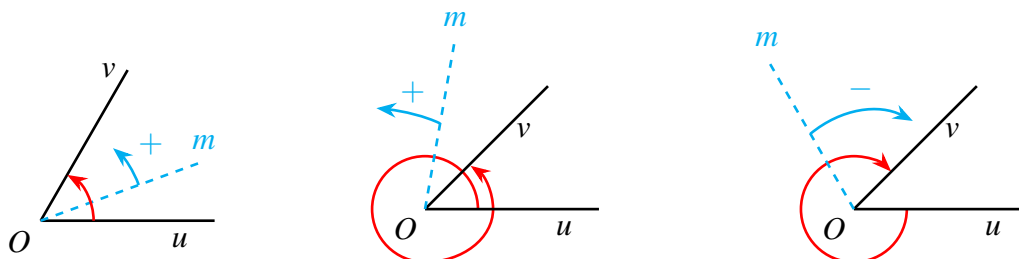
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 GÓC LƯỢNG GIÁC

Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác: Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này.

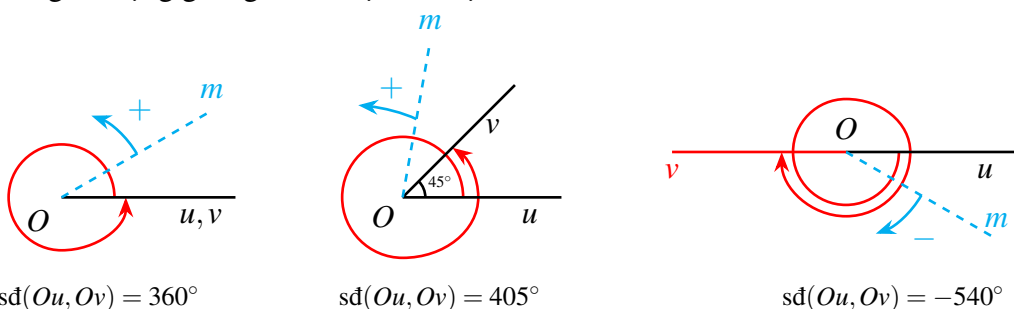
Ghi nhớ 1:

- Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .



Ghi nhớ 2:

- Khi tia Om quay một góc α° , ta nói số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) bằng α° , kí hiệu $sđ(Ou, Ov) = \alpha^\circ$ hoặc $(Ou, Ov) = \alpha^\circ$.
- Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Ou , tia cuối Ov và số đo α° của nó.



- Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou và tia cuối Ov sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

$$sđ(Ou, Ov) = \alpha^\circ + k360^\circ, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

$$\text{sd}(Ou, Ov) + \text{sd}(Ov, Ow) = \text{sd}(Ou, Ow) + k360^\circ \quad \text{với } k \in \mathbb{Z}.$$

2 ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Đơn vị đo góc:

- Đơn vị độ ($^\circ$): Chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn bởi cung đó sẽ có số đo là 1° .
- Đơn vị radian (rad): Trên đường tròn, nếu một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì ta nói cung đó có số đo là 1 rad. Khi đó, góc ở tâm chắn cung đó cũng có số đo 1 rad.

! Khi viết số đo một góc theo đơn vị rad, ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ ta hiểu là góc $\frac{\pi}{2}$ rad.

- Mối liên hệ giữa độ và radian:

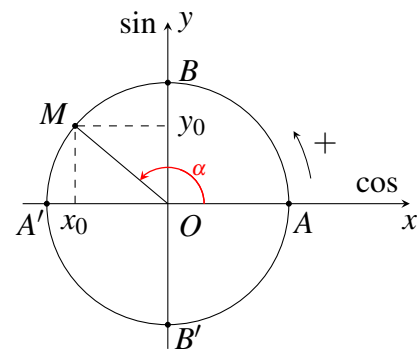
$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Độ dài cung tròn: Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì sẽ có độ dài là $l = R\alpha$.

3 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

Đường tròn lượng giác:

- Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tâm O bán kính 1, cùng với gốc $A(1;0)$ và chiều quay dương (như quy ước) gọi là đường tròn lượng giác.
- Cho góc lượng giác số đo α . Trên đường tròn lượng giác, tồn tại duy nhất điểm M sao cho góc lượng giác (OA, OM) bằng α (hình bên). Khi đó, M gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

Ghi nhớ 1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α thì

- ① Tung độ y_0 của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$, hay $\sin \alpha = y_0$.
- ② Hoành độ x_0 của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$, hay $\cos \alpha = x_0$.
- ③ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, với $\cos \alpha \neq 0$.
- ④ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, với $\sin \alpha \neq 0$.

Ghi nhớ 2: Ta có các kết quả sau được suy ra từ định nghĩa

- ① Vì $-1 \leq x_0; y_0 \leq 1$ nên $-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
- ② $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha; \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$.
- ③ $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha; \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha$.

4 QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

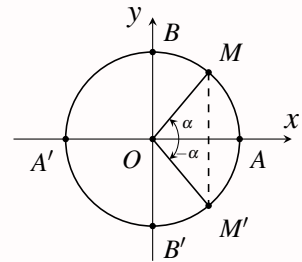
⚙ **Công thức lượng giác cơ bản:** Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

- ① $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- ② $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, với $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- ③ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, với $\alpha \neq k\pi$.
- ④ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$, với $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$.

⚙ **Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:**

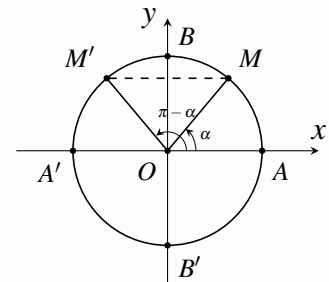
- ① Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$:

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



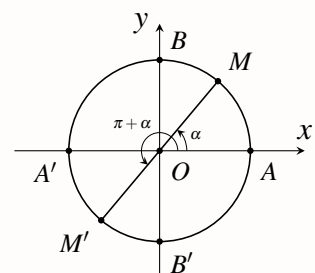
- ② Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$.

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



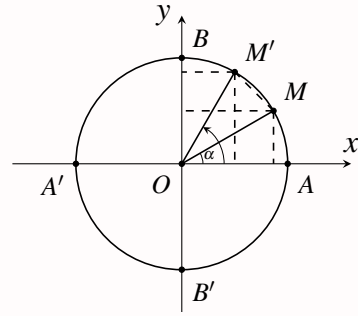
- ③ Hai góc hơn kém nhau π : α và $\alpha + \pi$

- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$



④ Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 ĐỔI ĐƠN VỊ GIỮA ĐỘ VÀ RADIAN. ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

☑ Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian:

a) $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$

b) $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

☑ Xét đường tròn có bán kính R .

- Cung tròn có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) thì có độ dài là $l = R\alpha$.
- Cung tròn có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) thì có độ dài là $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R$.

Bài 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian.

a) 72° ;

b) 600° ;

c) $-37^\circ 45' 30''$.

Lời giải.

Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ nên

• $72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$

• $600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3}$

• $-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = -\left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = -\frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx -0,6587$.

Bài 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ.

a) $\frac{5\pi}{18}$;

b) $\frac{3\pi}{5}$;

c) -4 .

Lời giải.

Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên

- $\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 50^\circ.$

- $\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ.$

- $-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$

Bài 3. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung, biết số đo tương ứng như sau:

b) 51°

c) $\frac{1}{3}$

Lời giải.

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

a) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8m$

$$\text{b) Ta có } l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04 \text{ m.}$$

c) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12$ m.

Bài 4. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

- a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1 h; 3 h; 5 h.
- b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải.

Trong 2 h, vệ tinh chuyển động hết 1 vòng quỹ đạo có độ dài là $2\pi \cdot 9000 = 18000\pi$ km. Suy ra

- a) Quãng đường vệ tinh chuyển động sau 1h là 9000π km.
 Quãng đường vệ tinh chuyển động sau 3h là $9000\pi \cdot 3 = 27000\pi$ km.
 Quãng đường vệ tinh chuyển động sau 5h là $9000\pi \cdot 5 = 45000\pi$ km.
- b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km thì sẽ mất

$$\frac{200000}{9000\pi} \approx 7 \text{ gi\`o}.$$

Bài 5. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn Bưu điện Hà Nội theo thứ tự dài 1,75 mét và 1,26 mét. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút và kim giờ vạch được cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu mét?

Lời giải.

Trong 15 phút kim giờ vạch được một cung tròn có số đo bằng $\frac{\pi}{24}$ và kim phút vạch được một cung tròn có số đo bằng $\frac{\pi}{2}$.

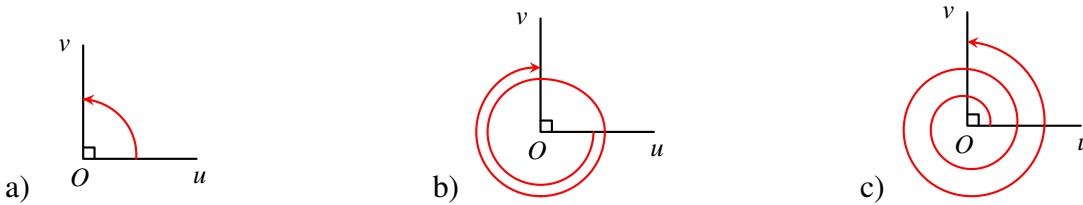
Trong 15 phút kim giờ vạch được cung tròn có độ dài bằng $1,26 \cdot \frac{\pi}{24} = \frac{21\pi}{400} \approx 0,16$ m.

Trong 15 phút kim phút vạch được cung tròn có độ dài bằng $1,75 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{8} \approx 2,75$ m.

DT 2 Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles

- Khi xác định số đo của góc lượng giác, ta cần chú ý đến chiều quay (chiều dương ngược kim đồng hồ, chiều âm cùng kim đồng hồ). Từ đó xác định chính xác số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) .
- Giả sử α° là một số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) . Suy ra số đo các góc lượng giác có cùng tia đầu Ou , tia cuối Ov có dạng $\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hệ thức Chasles: $\text{sđ}(Ov, Ow) = \text{sđ}(Ou, Ov) - \text{sđ}(Ou, Ow) + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Bài 6. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) được biểu diễn trong hình bên dưới.



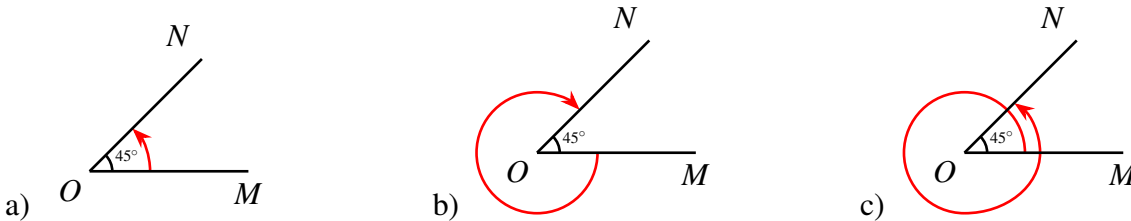
Lời giải.

a) 90° .

b) -630° .

c) 810° .

Bài 7. Cho $\widehat{MON} = 45^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên dưới và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .



Lời giải.

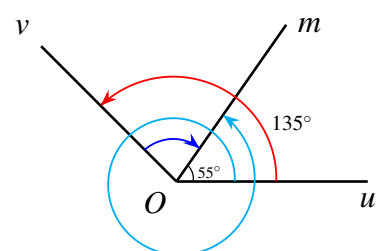
a) 45° .

b) -315° .

c) 405° .

Bài 8.

Xác định số đo các góc lượng giác (Ou, Ov) , (Ov, Om) và (Ou, Om) được minh họa ở hình bên.



Lời giải.

a) $(Ou, Ov) = 135^\circ$.

b) $(Ov, Om) = -80^\circ$.

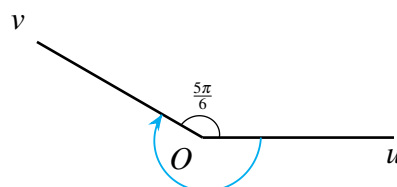
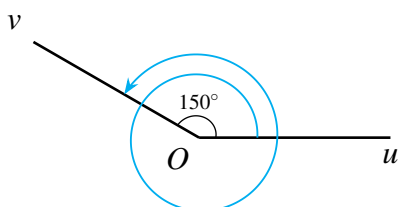
c) $(Ou, Om) = 415^\circ$.

Bài 9. Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác trong mỗi trường hợp sau:

a) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° ;

b) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$.

Lời giải.



a) Ta có $510^\circ = 360^\circ + 150^\circ$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo 510° được biểu diễn ở hình 1.

b) Ta có $-\frac{7\pi}{6} = -\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou , tia cuối Ov và có số đo $-\frac{7\pi}{6}$ được biểu diễn ở hình 2.

Bài 10. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{5\pi}{4}$. Tìm số đo các góc lượng giác (Ov, Ow) .

Lời giải.

Theo hệ thức Chasles, ta có:

$$\begin{aligned}(Ov, Ow) &= (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi \\ &= \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

DT

3

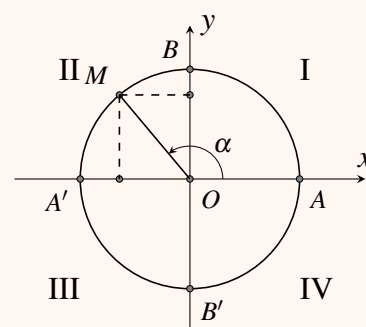
Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán.

Chú ý:

Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α , thì ta cần xem trên miền đó, các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào. Cụ thể:

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



Bài 11. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc lượng giác sau

- a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi$. b) $-\frac{3\pi}{4} + k2\pi$. c) $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \cos\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}. \\ \tan\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}. \\ \cot\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) &= \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin\left(-\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) &= \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \cos\left(-\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) &= \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \tan\left(-\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) &= \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1. \\ \cot\left(-\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) &= \cot\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &= \begin{cases} 1 \text{ khi } k \text{ chẵn} \\ -1 \text{ khi } k \text{ lẻ} \end{cases} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &= 0. \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &\text{ không xác định.} \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &= 0. \end{aligned}$$

Bài 12. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; b) $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
c) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. d) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}. \\ \text{Do } 90^\circ < \alpha < 180^\circ &\text{ nên } \cos \alpha < 0, \text{ suy ra } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -2\sqrt{2}.$$

b) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

• $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

• $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$, suy ra $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

• $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$.

• $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3}$.

d) Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin \alpha < 0$, suy ra $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$

• $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}$.

• $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3}{4}$.

Bài 13. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α , biết

a) $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

b) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

c) $\sin \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha < 0$.

d) $\cos \alpha = 0,8$ và $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$.

Lời giải.

a) Ta có $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

• $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

• $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}$.

b) Ta có $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$, suy ra $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

• $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

c) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - (0.8)^2 = 0.36 \Rightarrow \cos \alpha = \pm 0.6$.

Do $\tan \alpha < 0$ và $\sin \alpha = 0.8 > 0$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -0.6$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{3}{4}.$$

d) Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - (0.8)^2 = 0.36 \Rightarrow \sin \alpha = \pm 0.6$.

Do $\tan \alpha + \cot \alpha > 0$ nên $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ cùng dấu, suy ra $\sin \alpha > 0$. Vậy, $\sin \alpha = 0.6$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{3}.$$

DT

4

Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác

Hướng 1:

- Từ tỉ số lượng giác đã cho, ta tính toán các giá trị lượng giác có trong biểu thức M .
- Thay tất cả giá trị vừa tìm được vào M , suy ra kết quả.

Hướng 2:

- Biến đổi biểu thức M về tỉ số lượng giác đã cho.
- Thay kết quả vào M , suy ra kết quả.

≡ Bài 14. Cho $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, suy ra $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Từ đó, ta tính được $M = 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 3 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{6}{5}$.

≡ Bài 15. Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Lời giải.

Ta biến đổi $M = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$. Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$M = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow M = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.$$

≡ Bài 16. Cho $\cot \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} \\ &= \frac{2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) - 3 \cot \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right)}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= \frac{-3 \cot^3 \alpha + 2 \cot^2 \alpha - 3 \cot \alpha + 2}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= -\frac{35}{16}. \end{aligned}$$

≡ Bài 17. Biết $\sin x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \cos(2\pi - x) = \cos x \\ \cos(3\pi + x) = -\cos x \end{cases} \Rightarrow A = -\sin x + \cos x - \cos x = -\sin x = -\frac{1}{3}.$$

≡ Bài 18. Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức:

$$B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12}$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

- a) 6 giờ sáng; b) 10 giờ 30 phút sáng;
c) 12 giờ trưa; d) 8 giờ tối.

Lời giải.

- a) $t = 6$, suy ra $B = 87 \text{ mmHg}$.
b) $t = 10,5$, suy ra $B = 82,68 \text{ mmHg}$.
c) $t = 12$, suy ra $B = 80 \text{ mmHg}$.
d) $t = 20$, suy ra $B = 73,94 \text{ mmHg}$.

5

Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức

≡ Bài 19. Rút gọn các biểu thức sau:

- $$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha; & \text{b) } B = \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}; \\ \text{c) } C = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha; & \text{d) } D = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}. \end{array}$$

Lời giải.

- a) Ta có: $A = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha = \sin^2 \alpha (1 + \tan^2 \alpha) = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$.
- b) $B = \frac{2\sin^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2\sin^2 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 + \cot \alpha$.
- c) $C = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 1$.
- d) Ta có $D = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0$.

Bài 20. Chứng minh các đẳng thức sau:

- a) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$. b) $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 1 + 2\tan^2 \alpha$.
- c) $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 3\tan^2 \alpha + 2$. d) $1 - \cot^4 \alpha = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^4 \alpha}$.

Lời giải.

- a) Ta có $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$.
- b) Ta có $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2\tan^2 \alpha$.
- c) Ta có: $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 2 + 2\tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha = 3\tan^2 \alpha + 2$.
- d) Ta có $1 - \cot^4 \alpha = (1 + \cot^2 \alpha)(1 - \cot^2 \alpha) = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{\sin^2 \alpha - (\cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha}\right] = \frac{2\sin^2 \alpha - 1}{\sin^4 \alpha} = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^4 \alpha}$.

Bài 21. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

- a) $\sin(A + B) = \sin C$. b) $\cos(A + B) + \cos C = 0$.
- c) $\sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}$. d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B$.

Lời giải.

Do A, B, C là các góc của tam giác nên ta có $A + B + C = 180^\circ$.

- a) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.
Từ đó suy ra $\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$.
- b) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.
Từ đó suy ra $\cos(A + B) = \cos(180^\circ - C) = -\cos C \Rightarrow \cos(A + B) + \cos C = 0$.
- c) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A + B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$.
Từ đó suy ra $\sin \frac{A + B}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{C}{2}$.

d) Ta có $\tan(A - B + C) = \tan(A + B + C - 2B) = \tan(180^\circ - 2B) = -\tan 2B$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN CHO CÁC DẠNG TOÁN

1 Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết

a) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

b) $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

c) $\tan \alpha = -\frac{15}{8}$ và $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$;

d) $\cot \alpha = -2,4$ và $-180^\circ < \alpha < 0^\circ$.

Lời giải.

a) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$. Do đó $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ và $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}$.

b) Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{11}{61}\right)^2 = \frac{3600}{3721}$.

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$. Do đó $\sin \alpha = \frac{60}{61}$.

Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{60}{61}}{\frac{11}{61}} = \frac{60}{11}$ và $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{11}{60}$.

c) Ta có $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{8}{15}$; $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \left(-\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{289}{64}$.

Suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{64}{289}$. Vì $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \frac{8}{17}$.

Suy ra $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = -\frac{15}{17}$.

d) Ta có $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{5}{12}$; $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + (-2,4)^2 = \frac{169}{25}$.

Suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{25}{169}$. Vì $-180^\circ < \alpha < 0^\circ$ nên $\sin \alpha < 0$. Do đó $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$.

Suy ra $\cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = (-2,4) \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$.

2 Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = -\frac{5}{13} \end{cases}$$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

Từ đó ta có $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

- 3 Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{13}$.

Do $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{12}{5}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

- 4 Cho $\tan \alpha = 3$ và $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Do $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

- 5 Biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{3 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - \tan \alpha};$$

$$\text{b) } B = \frac{\cot^2 \alpha - \sin \alpha}{\tan \alpha + 2 \cos \alpha}.$$

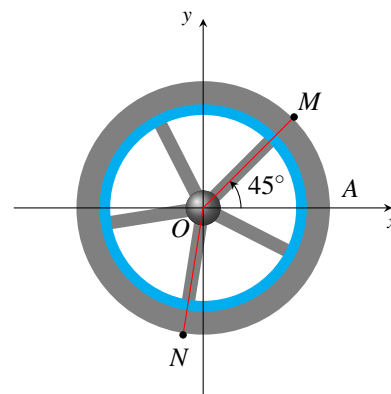
Lời giải.

Vì $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ và $\cot \alpha = -\frac{4}{3}$.

$$\text{a) } A = \frac{3 \cdot \frac{3}{5}}{2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{36}{17};$$

$$\text{b) } B = \frac{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{5}}{-\frac{3}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{212}{423}.$$

- 6 Trong hình vẽ bên, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



Lời giải.

Ta có $\widehat{AON} = \left(\frac{360^\circ}{5} - 45^\circ \right) + 72^\circ = 99^\circ$.

Vậy $(Ox, ON) = -99^\circ + k360^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- 7 Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm Q biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau

a) $\frac{\pi}{6}$;

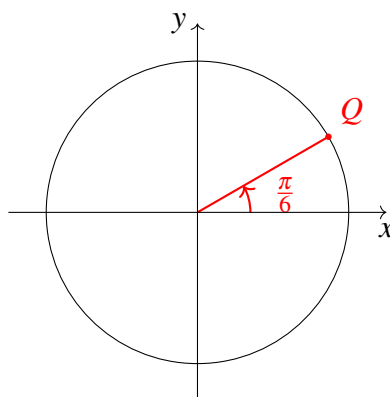
b) $-\frac{5\pi}{7}$;

c) 270° ;

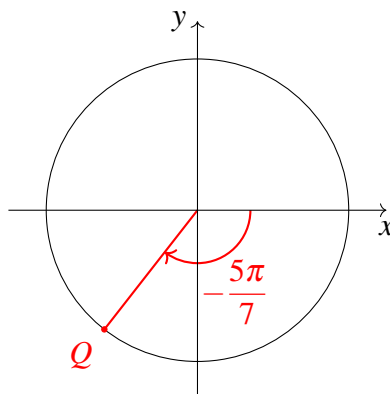
d) -415° .

Lời giải.

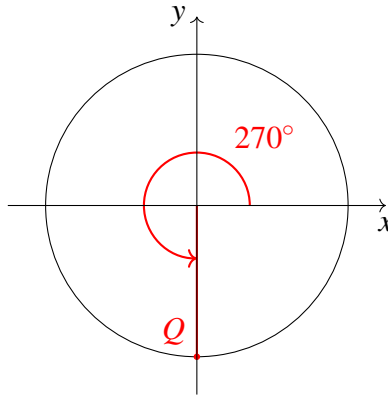
- a) Điểm Q trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{\pi}{6}$ được xác định trong hình sau:



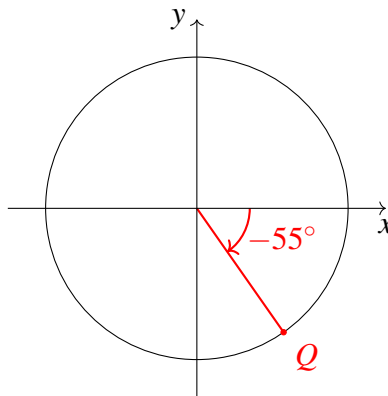
- b) Điểm Q trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{5\pi}{7}$ được xác định trong hình sau:



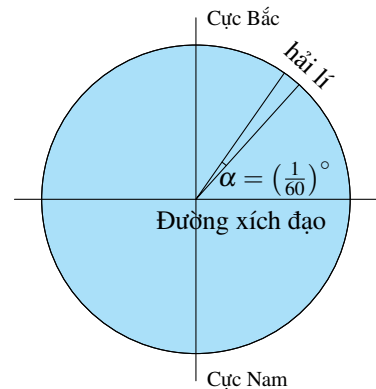
- c) Điểm Q trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng 270° được xác định trong hình sau:



- d) Ta có $-415^\circ = -55^\circ - 360^\circ$ nên điểm Q trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng -415° được xác định trong hình sau



- 8 Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình bên). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Lời giải.

$$1 \text{ hải lí} = \alpha \cdot R = \frac{1 \cdot \pi}{60 \cdot 180} \cdot 6371 \approx 1,85 \text{ km}.$$

- 9 Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.
- Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
 - Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm .

Lời giải.

a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ vòng, tức là quay được một góc $\frac{22\pi}{5}$ (rad) hay 792° .

b) Trong 1 phút, bánh xe lăn được $l = 340 \cdot \frac{22\pi}{5} \cdot 60 \approx 281,990(\text{mm}) \approx 282(\text{m})$.

10 Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau

- a) Đường tròn có bán kính $R = 5$ và cung có số đo 72° .
 b) Đường tròn có bán kính $R = 18$ và cung có số đo 150° .

Lời giải.

$$\text{a) } l = \frac{\pi \cdot 72}{180} \cdot 5 = 2\pi.$$

$$\text{b) } l = \frac{\pi \cdot 150}{180} \cdot 18 = 15\pi.$$

11 Bánh xe có đường kính (tính cả lốp) là 55 cm. Nếu xe chạy với vận tốc 40 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

Lời giải.

Chu vi của bánh xe bằng 55π cm.

Trong 1 giây xe đi được $\frac{40 \cdot 10^5}{3600} = \frac{10000}{9}$ cm.

Như vậy, trong 1 giây bánh xe quay được $\frac{10000}{9 \cdot 55\pi} = \frac{2000}{99\pi}$ vòng.

12 Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

Lời giải.

Ta có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B + 2C = 180^\circ + C$.

$\Rightarrow \sin(A + B + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C$.

13 Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } E = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha;$$

$$\text{b) } F = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Lời giải.

$$\text{a) } E = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha - 1 = \tan^2 \alpha.$$

b) Ta có

$$\bullet \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x;$$

$$\bullet \text{ Suy ra } F = 2 \left[1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \right] + 4 \sin^2 x \cos^2 x = 2$$

14 Chứng minh các hệ thức sau

$$\text{a) } \frac{1 + \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = \frac{2}{3 \cos^2 \alpha};$$

$$\text{b) } \frac{\sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha};$$

$$\text{c) } \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \tan \alpha \tan \beta;$$

$$\text{d) } \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

$$\text{e) } \frac{1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2;$$

$$\text{f) } \frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \tan^4 x.$$

Lời giải.

- a) Ta có
$$\frac{1 + \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = \frac{1 + (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)}{1 - [(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)]}$$
$$= \frac{1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 - [1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha]} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3 \cos^2 \alpha}.$$
- b) Ta có
$$\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha} = \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right)}{\cos \alpha \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right)} = \frac{\sin^2 \alpha (1 + \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha)}.$$
- c) Ta có
$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta} = \tan \alpha \tan \beta.$$
- d) Ta có
$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \tan^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left(\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} \right)$$
$$= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$
- e) Ta có
$$\frac{1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$$
$$= \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = (\sin x - \cos x)^2.$$
- f) Ta có
$$\frac{\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^4 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x (1 - \sin^2 x)} = \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x (1 - \sin^2 x)} = \tan^4 x.$$

15 Chứng minh các hệ thức sau không phụ thuộc vào x .

- a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1};$ b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2 \cot^2 x}{(\tan x - 1)(\cot^2 x + 1)}.$

Lời giải.

- a) Ta có
$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$
$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3$$
$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$
$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$
$$= 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$
$$\text{Do đó } A = \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \frac{3}{2}.$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

- b) Ta có
$$B = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x - 1) \frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\tan x - 1}$$
$$= \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1.$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 25. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 \text{ rad} = 60^\circ$. B. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. C. $1 \text{ rad} = 1^\circ$. D. $1 \text{ rad} = 180^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180° . Suy ra 1 rad tương ứng với x° . Vậy $x = \frac{180 \cdot 1}{\pi}$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 2. Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{5}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 3. Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{7}{18}$. B. $\frac{7\pi}{18}$. C. $\frac{70}{\pi}$. D. $\frac{7}{18\pi}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Ta có } \alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} = \frac{70\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}.$$

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 4. Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12} \text{ rad}$ sang đơn vị độ.

- A. 6° . B. 15° . C. 10° . D. 5° .

Lời giải.

Từ công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} \Rightarrow a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^\circ$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{\frac{\pi}{12} \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = 15^\circ.$$

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 5. Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. -286° . B. $286^\circ 28' 44''$. C. $-286^\circ 44' 28''$. D. $-286^\circ 28' 44''$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{-5 \cdot 180}{\pi}\right)^\circ = -286^\circ 28' 44''.$$

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 6. Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là cung

- A. có độ dài bằng nửa đường kính. B. có độ dài bằng đường kính.
C. có độ dài bằng 1. D. tương ứng với góc ở tâm 60° .

Lời giải.

Cung có độ dài bằng bán kính (nửa đường kính) thì có số đo bằng 1 rad.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 7. Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20 cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

- A. $\ell = 2,94$ cm. B. $\ell = 3,39$ cm. C. $\ell = 1,49$ cm. D. $\ell = 3,93$ cm.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\ell = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{16} \approx 3,93$ cm.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 8. Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 1,5 và bán kính bằng 20 cm.

- A. 40 cm. B. 60 cm. C. 30 cm. D. 20 cm.

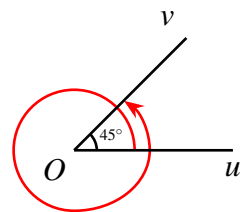
Lời giải.

Ta có $\ell = \alpha R = 1,5 \cdot 20 = 30$ cm.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 9. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 405° . B. 385° . C. -405° . D. 45° .

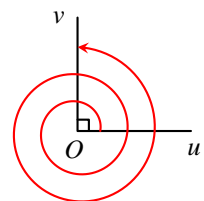


Lời giải.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 10. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 450° . B. -450° . C. 810° . D. 90° .

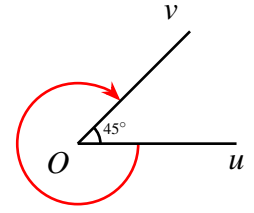


Lời giải.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 11. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

- A. 45° . B. -315° . C. 315° . D. 405° .



Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 12. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\frac{\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\frac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của các góc lượng giác (Ov, Ow) .

- A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

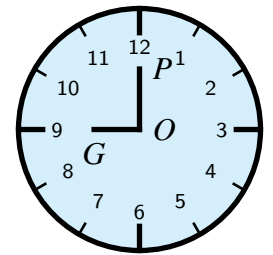
$$(Ov, Ow) = (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 13. Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số

12. Số đo các góc lượng giác (OG, OP) là

- A. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. B. $-90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
C. $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. D. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.



Lời giải.

Theo hình vẽ, các góc lượng giác có tia đầu OG và tia cuối OP sẽ có số đo $-90^\circ + k360^\circ$ hay $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 14. Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho góc lượng giác (OA, OM) có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox. Số đo các góc lượng giác (OA, ON) là

- A. $135^\circ + k360^\circ$. B. -45° .
C. 315° . D. $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Vì số đo góc lượng giác (OA, OM) bằng 45° nên $\widehat{AOM} = 45^\circ$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON} = 45^\circ$. Do đó số đo các góc lượng giác (OA, ON) là $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

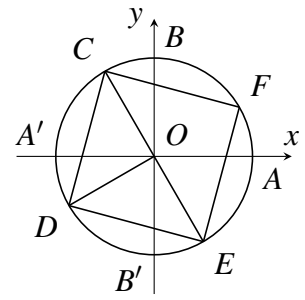
Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 15. Góc lượng giác nào sau đây có các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác gốc A tạo thành một hình vuông?

- A. $\frac{k2\pi}{3}$. B. $\frac{k\pi}{2}$. C. $\frac{k\pi}{3}$. D. $k\pi$.

Lời giải.

Hình vẽ tham khảo (hình vẽ bên). Hình vuông $CDEF$ có góc $\widehat{DCE}$ là 45° nên góc ở tâm là 90° tương ứng $\frac{k\pi}{2}$.



Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 16. Góc lượng giác nào sau đây có các điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác gốc A tạo thành một tam giác đều?

- A. $\frac{k\pi}{3}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k2\pi}{3}$. D. $\frac{k\pi}{2}$.

Lời giải.

Tam giác đều có góc ở đỉnh là 60° nên góc ở tâm là 120° tương ứng $\frac{k2\pi}{3}$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 17. Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

Lời giải.

$$\text{Do } \alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ nhất} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 18. Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ hai} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 19. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo $\frac{26\pi}{3}$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. M thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác.
 B. M thuộc góc phần tư thứ II của đường tròn lượng giác.
 C. M thuộc góc phần tư thứ III của đường tròn lượng giác.
 D. M thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác.

Lời giải.

$$\text{Xét } \frac{26\pi}{3} = \frac{2\pi + 24\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 8\pi.$$

Suy ra điểm biểu diễn của góc lượng giác $\frac{26\pi}{3}$ trùng với điểm biểu diễn của góc lượng giác $\frac{2\pi}{3}$. Vậy M thuộc góc phần tư thứ II của đường tròn lượng giác.

Chọn đáp án **(B)** $\square$

Câu 20. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

- A.** $-\tan \alpha$. **B.** $\cot \alpha$. **C.** $\tan \alpha$. **D.** $-\cot \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\tan(2017\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

Chọn đáp án **(C)** $\square$

Câu 21. Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

- A.** $-\sin \alpha$. **B.** $\cos \alpha$. **C.** $\sin \alpha$. **D.** $-\cos \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha.$$

Chọn đáp án **(B)** $\square$

Câu 22. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng.

- A.** $\sin(A + C) = -\sin B$. **B.** $\cos(A + C) = -\cos B$.
C. $\tan(A + C) = \tan B$. **D.** $\cot(A + C) = \cot B$.

Lời giải.

Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A + C = \pi - B$.

Khi đó $\sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B$; $\cos(A + C) = \cos(\pi - B) = -\cos B$.

$\tan(A + C) = \tan(\pi - B) = -\tan B$; $\cot(A + C) = \cot(\pi - B) = -\cot B$.

Chọn đáp án **(B)** $\square$

Câu 23. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

- A.** $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. **C.** $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. **D.** $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

Chọn đáp án **(D)** $\square$

Câu 24. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

- A.** $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. **D.** $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 25. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$.

- A.** $P = -\frac{4}{9}$. **B.** $P = \frac{4}{9}$. **C.** $P = -\frac{4}{19}$. **D.** $P = \frac{4}{19}$.

Lời giải.

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \cos \alpha \text{ ta được } P = \frac{3 \tan \alpha - 2}{5 + 7 \tan \alpha} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 + 7 \cdot 2} = \frac{4}{19}.$$

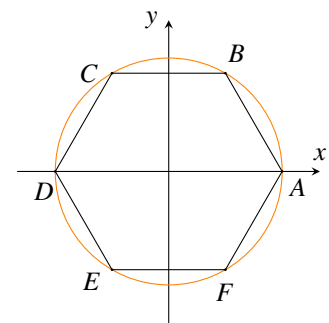
Chọn đáp án **D** ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp trong đường tròn lượng giác (thứ tự đi từ A đến các đỉnh theo chiều ngược chiều kim đồng hồ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

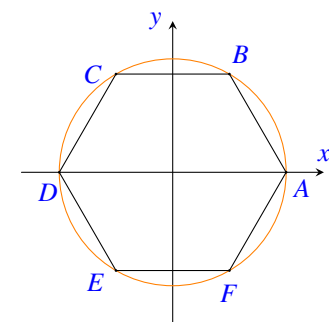
- a)** Các góc lượng giác (OA, OB) có số đo là $\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
b) Các góc lượng giác (OA, OC) có số đo là $\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
c) Các góc lượng giác (OA, OE) có số đo là $\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
d) Các góc lượng giác (OA, OF) có số đo là $\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \text{sđ}(OA, OB) &= \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{sđ}(OA, OC) &= \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{sđ}(OA, OE) &= \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{sđ}(OA, OF) &= \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án

a đúng	b đúng	c sai	d sai
--------	--------	-------	-------

 ☐

Câu 27. Cho biết $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)** Nếu $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **b)** Nếu $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ thì $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.
c) Nếu $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **d)** Nếu $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

a) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$. Do đó $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

d) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d sai ☐

Câu 28. Cho biết $\cos \alpha = -0,8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\sin \alpha = 0,36$.

b) Nếu $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\sin \alpha = -0,36$.

c) Nếu $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\cot \alpha = -\frac{4}{3}$.

d) Nếu $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\cot \alpha = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - (-0,8)^2 = 0,36$

a) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$. Do đó $\sin \alpha = \sqrt{0,36} = 0,6$.

b) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0$. Do đó $\sin \alpha = -\sqrt{0,36} = -0,6$

c) Xét $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-0,8}{0,6} = -\frac{4}{3}$.

d) Xét $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-0,8}{0,6} = -\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☐ c đúng ☐ d sai ☐

Câu 29. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α thỏa $\cot \alpha = \frac{7}{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\tan \alpha = \frac{3}{7}$.

b) x_0 và y_0 cùng dấu.

c) $\sin^2 \alpha = \frac{9}{58}$.

d) $\cos^2 \alpha = \frac{49}{58}$.

Lời giải.

a) $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{3}{7}$

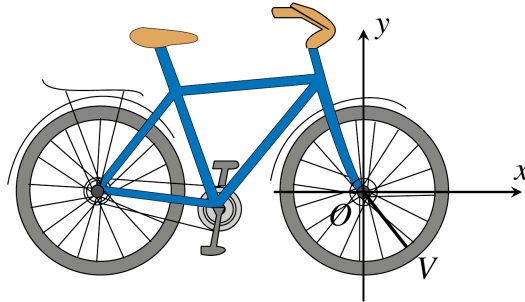
b) Do $\tan \alpha = \frac{3}{7} > 0$ nên $\sin \alpha = y_0$ và $\cos \alpha = x_0$ cùng dấu.

c) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{9}{58}$.

d) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{58} = \frac{49}{58}$.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d đúng ☐

Câu 30. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được 4 vòng.
- b) Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được 225 vòng.
- c) Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là 450π .
- d) Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là 494,8 m (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải.

- a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8} = 3,75$ (vòng).
- b) Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75 \cdot 60 = 225$ (vòng)
- c) Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225 \cdot 2\pi = 450\pi$.
- d) Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r = 0,35$ m. Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là $450\pi \cdot 0,35 \approx 494,8$ m.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d đúng ☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 31 đến câu 35 vào ô kết quả.

Câu 31. Biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của các biểu thức $A = \frac{3 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - \tan \alpha}$ (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải.

Vì $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$, $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ và $\cot \alpha = -\frac{4}{3}$. Suy ra

$$A = \frac{3 \cdot \frac{3}{5}}{2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{36}{17} \approx 2,1$$

Đáp án: **-2,1** □

Câu 32. Một đường tròn có bán kính 30 cm. Tìm độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{15}$ (kết quả tính bằng đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

Độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{15}$ là $l_1 = \frac{\pi}{15} \cdot 30 = 2\pi \approx 6,28$ (cm).

Đáp án: **6,28** □

Câu 33. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 15 vòng trong 8 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 2 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 700 mm (kết quả tính bằng m và làm tròn đến hàng đơn vị).

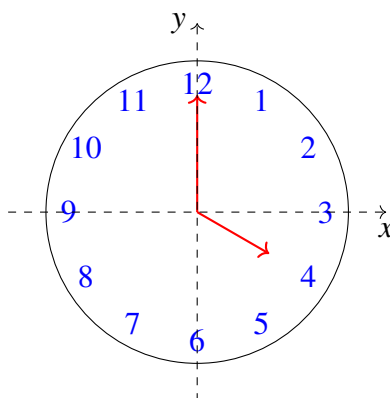
Lời giải.

- Với mỗi vòng bánh xe đã quay được một góc 360° (hay 2π) Trong 8 giây bánh xe quay được 15 vòng nên 1 giây bánh xe quay được một góc $\alpha = \frac{15}{8} \cdot 2\pi = \frac{15\pi}{4} \Rightarrow \alpha = 675^\circ$
- Trong 1 giây bánh xe quay được một góc $\alpha = \frac{15\pi}{4}$ nên quãng đường mà xe đi được trong thời gian 2 phút là $l = \frac{15\pi}{4} \cdot \frac{700}{2} \cdot 120 = 4948008,429\text{mm} \approx 495\text{m}$

Đáp án: **495** □

Câu 34. Kim giờ dài 6 cm và kim phút dài 11 cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu? (kết quả được tính bằng đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải.



Sau t (giờ) từ lúc 4 giờ kim phút quay tới góc $90^\circ - t \cdot 360^\circ$ và kim giờ quay tới góc $-30^\circ - t \cdot 30^\circ$. Hai kim ở vị trí vuông góc sớm nhất khi $90^\circ - t \cdot 360^\circ - (-30^\circ - t \cdot 30^\circ) = 90^\circ \Rightarrow t = \frac{1}{11}$.

Vậy thời gian ngắn nhất để hai kim ở vị trí vuông góc là sau $\frac{1}{11}$ giờ.

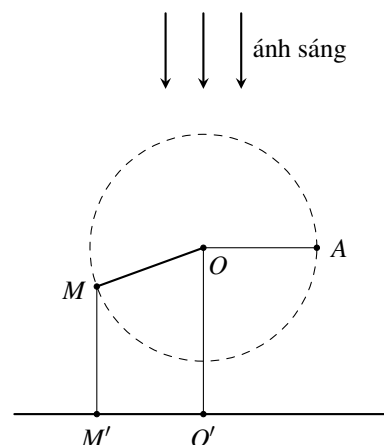
Lúc đó tổng quãng đường của hai đầu kim đi được là

$$S = \frac{1}{11} \cdot 2\pi \cdot 11 + \frac{1}{11} \cdot \frac{2\pi}{12} \cdot 6 = \frac{23\pi}{11} \approx 6,57 \text{ cm.}$$

Đáp án: **6,57**

Câu 35.

Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm? Kết quả tính theo đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần mười.



Lời giải.

$$\text{Ta có } \alpha = \frac{60}{13} \cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}.$$

$$\text{Suy ra } O'M' = |OM \cos \alpha| = \left| 10 \cos \frac{120\pi}{13} \right| \approx 7,5 \text{ cm.}$$

Đáp án: **7,5**

§2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức cộng:

$$\textcircled{1} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{2} \sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

$$\textcircled{3} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{4} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\textcircled{5} \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\textcircled{6} \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}.$$

2 Công thức nhân đôi:

$$\textcircled{1} \sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

$$\textcircled{2} \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$\textcircled{3} \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$$

$$\textcircled{4} \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3 Công thức hạ bậc:

$$\textcircled{1} \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$$

$$\textcircled{3} \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

4 Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\textcircled{1} \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

$$\textcircled{2} \sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)].$$

$$\textcircled{3} \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

$$\textcircled{4} \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)].$$

5 Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\textcircled{1} \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{2} \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{3} \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$$

$$\textcircled{4} \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Sử dụng công thức cộng, công thức nhân đôi

Bài 1. Khai triển:

a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right);$

c) $\sin(x + 60^\circ);$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right);$

e) $\tan\left(a + \frac{\pi}{3}\right);$

f) $\tan\left(\frac{\pi}{6} - 2a\right).$

Lời giải.

Bài 2. Hãy tính

a) $\sin 75^\circ$

b) $\sin 15^\circ$

c) $\tan \frac{7\pi}{12}.$

d) $\cot \frac{5\pi}{8}.$

e) $\cos 795^\circ.$

f) $\sin 18^\circ.$

Lời giải.

a) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$

b) $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

c) Ta có $\tan \frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}.$

d) Ta có $\cot \frac{5\pi}{8} = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\tan \frac{\pi}{8}.$

Lại có $1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}},$ suy ra:

$$1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}.$$

Vì $\tan \frac{\pi}{8} > 0$ nên $\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}.$ Vậy $\cot \frac{5\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}.$

e) Ta có $795^\circ = 75^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ nên

$$\begin{aligned} \cos 795^\circ &= \cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

f) Ta có $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ nên $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$ (*). Trong đó

• $\cos 36^\circ = \cos(2 \cdot 18^\circ) = 1 - 2 \sin^2 18^\circ.$

$$\begin{aligned}
\bullet \sin 54^\circ &= \sin(18^\circ + 36^\circ) = \sin 18^\circ \cos 36^\circ + \sin 36^\circ \cos 18^\circ \\
&= \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ \\
&= \sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ (1 - \sin^2 18^\circ) \\
&= 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ.
\end{aligned}$$

Thay hai kết quả này vào (*), ta được

$$3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1 \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ hoặc } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$$\text{Vì } 0 < \sin 18^\circ < 1 \text{ nên } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

≡ Bài 3. Cho $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$; $\cos 2\alpha$ và $\sin\left(\alpha + \frac{19\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}.$$

$$\text{Do } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \text{ nên } \cos \alpha > 0, \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}.$$

$$\bullet \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{25}.$$

$$\bullet \sin\left(\alpha + \frac{19\pi}{4}\right) = \sin \alpha \cdot \cos\left(\frac{19\pi}{4}\right) + \cos \alpha \cdot \sin\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

≡ Bài 4. Cho $\tan \alpha = -2$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$, $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \cos \alpha < 0, \text{ suy ra } \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\bullet \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\bullet \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\bullet \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{3}.$$

≡ Bài 5. Cho $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

Vì $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$. Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\begin{aligned} \bullet \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \bullet \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\begin{aligned} \bullet \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) &= \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}}; \\ \bullet \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) &= \cos 2\alpha \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}. \end{aligned}$$

DT

2

Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng

≡ Bài 6. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \cos 45^\circ \cos 15^\circ$.

b) $B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ$.

c) $C = \sin 75^\circ \sin 15^\circ$.

d) $D = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$.

Lời giải.

a) $A = \frac{1}{2} (\cos(45^\circ + 15^\circ) + \cos(45^\circ - 15^\circ)) = \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 30^\circ) = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$.

b) $B = \frac{1}{2} [\sin(75^\circ + 15^\circ) - \sin(75^\circ - 15^\circ)] = \frac{1}{2} (\sin 90^\circ - \sin 60^\circ) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

c) $C = -\frac{1}{2} (\cos(75^\circ + 15^\circ) - \cos(75^\circ - 15^\circ)) = -\frac{1}{2} (\cos 90^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{1}{4}$.

d) $D = \sin \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{16\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{6\pi}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{-2\pi}{3} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

≡ Bài 7. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $\cos 5a \sin 3a$.

b) $2 \cos(a + b) \cos(a - b)$.

c) $\sin(a - b) \cos(b - a)$.

d) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$.

Lời giải.

a) $\cos 5a \sin 3a = \sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2} [\sin(3a - 5a) + \sin(3a + 5a)] = \frac{1}{2} [\sin(-2a) + \sin 8a]$.

b) $2 \cos(a + b) \cos(a - b) = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(a + b - a + b) + \cos(a + b + a - b)] = \cos 2b + \cos 2a$.

$$c) \sin(a-b)\cos(b-a) = \frac{1}{2} [\sin(a-b-b+a) + \sin(a-b+b-a)] = \frac{1}{2} \sin(2a-2b).$$

d)

$$\begin{aligned} 4\cos x \cos 2x \cos 3x &= 4(\cos 4x \cos 2x) \cos x = 4 \cdot \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x) \cos x \\ &= 2\cos 2x \cos x + 2\cos 6x \cos x = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x. \end{aligned}$$

≡ Bài 8. Biến đổi mỗi biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $A = 2\sin(a+b)\sin(a-b)$

c) $C = 8\cos x \sin 2x \sin 3x$

b) $B = \sin x \sin 2x \sin 3x$

d) $D = \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ)$

Lời giải.

$$\begin{aligned} a) A &= 2\sin(a+b)\sin(a-b) = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(a+b-a+b) - \cos(a+b+a-b)] = \cos 2b - \cos 2a. \\ \text{Vậy } A &= 2\sin(a+b)\sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 3x (\sin 2x \sin x) = \frac{1}{2} \sin 3x [\cos x - \cos 3x] \\ &= \frac{1}{2} \sin 3x \cos x - \frac{1}{2} \sin 3x \cos 3x = \frac{1}{4} [\sin 2x + \sin 4x] - \frac{1}{4} \sin 6x. \\ \text{Vậy } B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) C &= 8\cos x \sin 2x \sin 3x = 8\sin 3x \sin 2x \cos x = 4[\cos x - \cos 5x] \cos x \\ &= 4\cos^2 x - 4\cos 5x \cos x = 2(1 + \cos 2x) - 2(\cos 4x + \cos 6x). \\ \text{Vậy } C &= 8\cos x \sin 2x \sin 3x = 2 + 2\cos 2x - 2\cos 4x - 2\cos 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) D &= \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ) = \cos x \cdot \frac{1}{2} [\cos 120^\circ + \cos 2x] \\ &= \frac{1}{2} \cos x \left[-\frac{1}{2} + \cos 2x \right] = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \cos x = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x. \\ \text{Vậy } D &= \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ) = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

≡ Bài 9. Chứng minh $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) \cdot \frac{1}{2} (\cos 20^\circ - \cos 140^\circ) \\ &= \frac{1}{4} (\cos 20^\circ - \cos 60^\circ) (\cos 20^\circ + \cos 40^\circ) \\ &= \frac{1}{4} (\cos^2 20^\circ + \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \cos 40^\circ) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 + \cos 40^\circ}{2} + \frac{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \cos 40^\circ \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

Bài 10. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tích.

a) $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a$.

b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Lời giải.

a) $\sin a + \sin 3a + \sin 5a = \sin 5a + \sin a + \sin 3a = 2 \sin 3a \cos 2a + \sin 3a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1)$.

Vậy $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1)$.

b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos 3x + \cos x) + (\cos 2x + 1)$

$$= 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 + 1 = 2 \cos x (\cos 2x + \cos x) = 2 \cos x \cdot 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

Vậy $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 4 \cos x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

Bài 11. Chứng minh

a) $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ$.

b) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$.

c) $\sin 20^\circ - \sin 100^\circ + \sin 140^\circ = 0$.

d) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$.

Lời giải.

a) Ta có $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = 2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 5^\circ = \sqrt{3} \cos 5^\circ$.

b) Ta có $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = (-2) \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin(-18^\circ) = \sin 18^\circ$.

c) Ta có $\sin 20^\circ - \sin 100^\circ + \sin 140^\circ = (\sin 20^\circ + \sin 140^\circ) - \sin 100^\circ = 2 \cdot \sin 80^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 100^\circ = \sin 80^\circ - \sin 80^\circ = 0$.

d) Ta có

$$\begin{aligned} \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ &= (\tan 9^\circ + \tan 81^\circ) - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ) \\ &= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 9^\circ \cdot \cos 81^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\cos 27^\circ \cdot \cos 63^\circ} \\ &= \frac{\cos 27^\circ \cdot \cos 63^\circ - \cos 9^\circ \cdot \cos 81^\circ}{\cos 9^\circ \cdot \cos 81^\circ \cdot \cos 27^\circ \cdot \cos 63^\circ} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (\cos 90^\circ + \cos 36^\circ) - \frac{1}{2} \cdot (\cos 90^\circ + \cos 72^\circ)}{\frac{1}{2} \cdot (\cos 90^\circ + \cos 36^\circ) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos 90^\circ + \cos 72^\circ)} \\ &= \frac{2 \cdot (\cos 36^\circ - \cos 72^\circ)}{\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ} \\ &= \frac{(-4) \cdot \sin 54^\circ \cdot \sin(-18^\circ)}{\sin 54^\circ \cdot \sin 18^\circ} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Bài 12. Rút gọn các biểu thức:

$$\text{a) } A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}.$$

$$\text{b) } B = (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b.$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin a}{\sqrt{2} \cos a} = \tan a.$$

$$\text{b) Ta có } B = \tan(a - b) (1 + \tan a \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b = 1.$$

Bài 13. Chứng minh các biểu thức sau

$$\text{a) } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta. \quad \text{b) } \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta).$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= -\frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \cos 2\beta) \\ &= -\frac{1}{2} [(1 - 2\sin^2 \alpha) - (1 - 2\sin^2 \beta)] = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} &= \frac{\sin \alpha + \frac{1}{2} [\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(-\alpha)]}{\cos \alpha - \left(-\frac{1}{2}\right) [\cos(\alpha + 2\beta) - \cos(-\alpha)]} \\ &= \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta)} \\ &= \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \cos(-\beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(-\beta)} = \tan(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Bài 14. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$\text{a) } A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right);$$

$$\text{b) } B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right).$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2\alpha \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2\alpha \right] = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

b) Vì $\alpha + \frac{\pi}{6} = \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{2}$ suy ra $\begin{cases} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$ nên

$$\begin{aligned} B &= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

Bài 15. Chứng minh các đẳng thức sau trong điều kiện có nghĩa của biểu thức

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$ b) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \cot \alpha$
 c) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ d) $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x = 1$

Lời giải.

a) VT = $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$
 $= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha =$ VP.

b) VT = $\frac{1 - \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (2 \cos \alpha - 1)}{\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha =$ VP.

c) VT = $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)}$
 $= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$ VP.

d) $P = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\sin x + \cos x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$

DT

5

Vận dụng thực tiễn

Bài 16. Một thiết bị trễ kĩ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5 \sin t$ và phát lại được nốt thuần $f_2(t) = 5 \cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là một sóng âm hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$) của sóng âm.

Lời giải.

Ta có $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 5(\sin t + \cos t) = 5\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$. Suy ra

- Biên độ âm $k = 5\sqrt{2}$.
- Pha ban đầu $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

≡ Bài 17. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}, \\x_2(t) &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.\end{aligned}$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải.

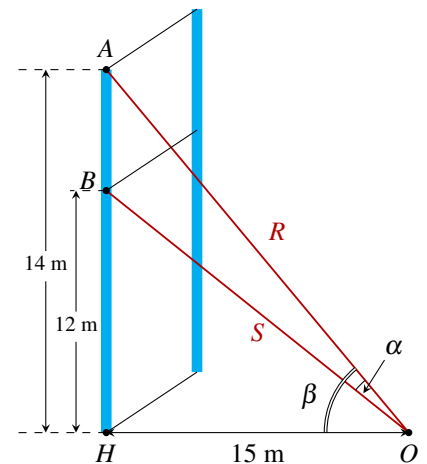
Ta có $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \right] = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi t}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$. Suy ra

- Biên độ âm $k = 2\sqrt{2}$.
- Pha ban đầu $\varphi = -\frac{\pi}{12}$.

≡ Bài 18.

Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình bên).

- Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Lời giải.

- Đặt $\widehat{HOA} = \beta$ và $\widehat{HOB} = \beta_1$. Ta tính được

$$\tan \beta = \frac{AH}{HO} = \frac{14}{15}; \quad \tan \beta_1 = \frac{BH}{HO} = \frac{12}{15}.$$

Khi đó

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \beta_1) = \frac{\tan \beta - \tan \beta_1}{1 + \tan \beta \tan \beta_1} = \frac{10}{131}.$$

- Với $\tan \alpha = \frac{10}{131}$ và góc $0 < \alpha < 90^\circ$, suy ra $\alpha = 4^\circ$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN CHO CÁC DẠNG TOÁN

1 Tính

a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}$, $0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}$, $90^\circ < b < 180^\circ$.

Lời giải.

a) Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{6}}{6}$.

b) Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$. Do đó $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Suy ra $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$.

Ta có $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{-2\sqrt{2} - 1}{-2\sqrt{2} + 1} = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$.

c) Có $0^\circ < a < 90^\circ$ nên $\cos a = \frac{3}{5}$, $90^\circ < b < 180^\circ$ nên $\cos b = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8 + 3\sqrt{5}}{15}$.

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a = \frac{4}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$.

2 Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$

Do $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{7}$.

3 Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{5}$. Tính $\sin 2\alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{25}$.

Do $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin 2\alpha = \frac{4}{25} - 1 = -\frac{21}{25}$.

4 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$;

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$.

Lời giải.

a) Ta có $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$.

b) Ta có $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$
 $= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2$
 $= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4\alpha) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$.

5 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \cos 2\alpha$; b) $\sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha$;

c) $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$; d) $\tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}$.

Lời giải.

a) Ta có $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 2 \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) \right]$
 $= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$.

b) Ta có $\sin \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin \alpha (1 + 2 \cos^2 \alpha - 1) = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha = \sin 2\alpha \cos \alpha$.

c) Ta có $\frac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha + (1 - \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha + (1 + \cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha}$
 $= \frac{2 \sin \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)}{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)} = \tan \alpha$.

d) Ta có $\tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 2 \cdot \frac{\tan^2 \alpha - 1}{2 \cdot \tan \alpha} = -\frac{2}{\tan 2\alpha}$.

6 Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos a + \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right)$.

b) $\cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right)$.

Lời giải.

a) Ta có $\cos a + \sin a = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) = \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} + \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) =$
 $\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right)$.

Mặt khác ta cũng có $\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right) =$
 $\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right)$.

7 Rút gọn các biểu thức sau đây

a) $A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a}$.

b) $B = \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a}$.

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \sin a}{2 \cos 3a \sin a} = -\frac{\sin 3a}{\cos 3a} = -\tan 3a.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a} = \frac{(\sin 3a + \sin a) - 2 \sin 2a}{(\cos 3a + \cos a) - 2 \cos 2a} \\ &= \frac{2 \sin 2a \cos a - 2 \sin 2a}{2 \cos 2a (\cos a - 1)} = \frac{2 \sin 2a (\cos a - 1)}{2 \cos 2a (\cos a - 1)} = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \tan 2a. \end{aligned}$$

8 Rút gọn biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}; \quad \text{b) } B = \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3}\right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} \\ &= \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \cos \left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3}\right) &= 2 \cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a; \\ \cot a - \cot \frac{a}{2} &= \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} \\ &= \frac{\sin \left(\frac{a}{2} - a\right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}.$$

9 Chứng minh rằng $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, với điều kiện biểu thức có nghĩa.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{\left[\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{\left[\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} = \frac{2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{2 \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \cot^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

10 Chứng minh các đẳng thức sau

$$\text{a) } \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + a\right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - a\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2a;$$

$$\text{b) } \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{2}.$$

Lời giải.

a) Ta có

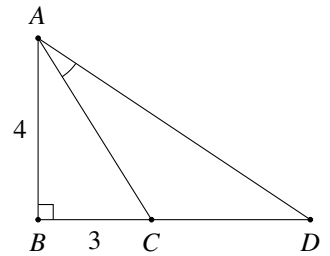
$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+a\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-a\right) &= \left(\sin\frac{\pi}{8}\cos a+\sin a\cos\frac{\pi}{8}\right)^2-\left(\sin\frac{\pi}{8}\cos a-\sin a\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 \\ &= 4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\sin a\cos a=\sin\frac{\pi}{4}\sin 2a=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right) \\ &= \cos^2\alpha+\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{2\pi}{3}\sin\alpha\right)^2 \\ &= \cos^2\alpha+2\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha+\frac{3}{4}\sin^2\alpha\right)=\frac{3}{2}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

11

Tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan\widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD (làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải.

Đặt $\widehat{BAC} = \varphi$ thì $\tan\varphi = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}$. Theo hình vẽ

$$\tan\widehat{BAD} = \tan(\varphi + 30^\circ) = \frac{\tan\varphi + \tan 30^\circ}{1 - \tan\varphi \tan 30^\circ} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}.$$

Ta có $\tan\widehat{BAD} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB \tan\widehat{BAD}$. Khi đó

$$CD = BD - BC = AB \tan\widehat{BAD} - 3 = 6,4.$$

12

Dao động của một vật là tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, có phương trình lần lượt là $x_1 = 6\cos 100\pi t$ (mm) và $x_2 = 6\sin 100\pi t$ (mm), (t tính bằng giây). Tính li độ của vật tại thời điểm $t = 0,25$ giây.

13

Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

b) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A \cos B \cos C$.

c) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$;

d) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

Lời giải.

a)

b)

c) Ta có $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cot\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$. Suy ra

$$\frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}} \Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}.$$

$$\text{Tức là } \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1.$$

d) Từ kết quả câu a) ta có

$$\frac{1}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{C}{2}\cot\frac{A}{2}} = 1 \Leftrightarrow \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b.$

B. $\cos(a + b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b.$

C. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

Lời giải.

Ta có $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 2. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$

B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 3. Cho các góc lượng giác a, b và $T = \cos(a + b) \cos(a - b) - \sin(a + b) \sin(a - b)$. Mệnh đề sau đây đúng?

A. $T = \sin 2b.$

B. $T = \sin 2a.$

C. $T = \cos 2a.$

D. $T = \cos 2b.$

Lời giải.

Ta có $T = \cos(a + b) \cos(a - b) - \sin(a + b) \sin(a - b) = \cos[(a + b) + (a - b)] = \cos 2a.$

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 4. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khi đó, giá trị của $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\sqrt{6} - \frac{1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì $\cos \alpha > 0$ nên $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{Ta có } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 5. Biết $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $-\frac{3}{5}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

D. $\frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Lời giải.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$. Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\text{Suy ra } P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}.$$

Chọn đáp án (C) $\square$

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

A. $\frac{3 + \sqrt{21}}{8}$.

B. $\frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.

C. $\frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$.

D. $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\text{Thay } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4} \text{ và } \cos \alpha = \frac{3}{4} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}.$$

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 7. Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin(a + b)$.

A. $\frac{56}{65}$.

B. $\frac{63}{65}$.

C. $-\frac{33}{65}$.

D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \text{ mà } a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \text{ mà } b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Khi đó } \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}.$$

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 8. Cho hai góc nhọn $a; b$ thỏa $\cos a = \frac{1}{3}; \cos b = \frac{1}{4}$. Tính $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$.

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) \\ &= (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 = \cos^2 a \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 9. Cho $\tan \alpha = 3$. Khi đó giá trị của $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ là

- A. $\frac{7}{17}$. B. $\frac{17}{7}$. C. -4 . D. -2 .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{3 + 1}{1 - 3 \cdot 1} = -2.$$

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 10. Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 1 . D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 11. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó $\cos 2\alpha$ bằng

- A. $\frac{3}{8}$. B. $-\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $-\frac{31}{8}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}.$$

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khi đó $\tan 2\alpha$ bằng

- A. $P = -\frac{120}{119}$. B. $P = -\frac{119}{120}$. C. $P = \frac{120}{119}$. D. $P = \frac{119}{120}$.

Lời giải.

Ta có $P = \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{12}{13}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ vào P , ta được $P = \frac{120}{119}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 13. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 + \sin 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 14. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Khi đó $\sin \alpha - \cos \alpha$ bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $-\frac{3}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Vì $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$.

Suy ra $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$. Do $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Vậy $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 15. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Khi đó $(1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$ bằng

A. 12.

B. $\frac{21}{2}$.

C. 6.

D. 21.

Lời giải.

Ta có $P = \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha\right) (-1 - 2 \cos 2\alpha)$.

Thay $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{5}{2} + 1\right) \left(-1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6}$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 16. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1 \text{ suy ra } a + b = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 17. Cho $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}} = -1.$$

Mặt khác $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ suy ra $0 < x + y < \pi$. Do đó $x + y = \frac{3\pi}{4}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 18. Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

- A. $\frac{p}{q-1}$. B. $-\frac{p}{q-1}$. C. $\frac{2p}{1-q}$. D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Lời giải.

Vì $\tan \alpha, \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ nên theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = -p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{p}{q-1}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 19. Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5 \cos(100\pi t + \pi)$ (cm) và $x_2 = 5 \cos(100\pi t - \pi/2)$ (cm). Phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là

- A. $x = 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm). B. $x = 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).
C. $x = 10 \cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm). D. $x = 10 \cos\left(100\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= 5 \cos(100\pi t + \pi) + 5 \cos(100\pi t - \pi/2) \\ &= 5 [\cos(100\pi t + \pi) + \cos(100\pi t - \pi/2)] \\ &= 5 \cdot 2 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{3\pi}{4} \\ &= -5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t - \frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 20. Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số theo các phương trình: $x_1 = 2 \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ (cm); $x_2 = 2 \cos(5\pi t)$ (cm). Biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là

A. 2.

B. 4.

C. $2\sqrt{2}$.D. $\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\text{Xét } x(t) = x_1 + x_2 = 2 \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cos(5\pi t) = 2\sqrt{2} \cos\left(5\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Chọn đáp án **C** ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$.

b) $\cos 2\alpha = -\frac{119}{169}$.

c) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{26}$.

d) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{17}$.

Lời giải.

a) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$.

b) $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{169}$.

c) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{26}$.

d) Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$.

$$\text{Suy ra } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{12}{5} + 1}{1 - \left(-\frac{12}{5}\right) \cdot 1} = \frac{7}{17}.$$

Chọn đáp án

a đúng	b đúng	c đúng	d đúng
--------	--------	--------	--------

 ☐

Câu 22. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$ và $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

b) $\sin \beta = \frac{25}{169}$.

c) $\sin(\alpha + \beta) = \frac{56}{65}$.

d) $\cos(\alpha - \beta) = \frac{63}{65}$.

Lời giải.

a) Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

b) Vì $0^\circ < \beta < 90^\circ$ nên $\sin \beta > 0$. Do đó

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65};$

d) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{63}{65}.$

Chọn đáp án

a sai	b sai	c đúng	d đúng
-------	-------	--------	--------

 ☐

Câu 23. Biết $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos \alpha = \frac{9}{25}.$ b) $\sin \alpha = \frac{16}{25}.$ c) $\tan \alpha = \frac{3}{4}.$ d) $\cot \alpha = \frac{4}{3}.$

Lời giải.

Ta có $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ nên $2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{7}{25}$

a) Suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$. Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì $\cos \alpha > 0$ nên $\cos \alpha = \frac{3}{5}.$

b) Suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$. Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì $\sin \alpha > 0$ nên $\sin \alpha = \frac{4}{5}.$

c) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$

d) $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}.$

Chọn đáp án

a sai	b sai	c sai	d sai
-------	-------	-------	-------

 ☐

Câu 24. Phương trình dao động điều hòa của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ (cm) là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$), $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động và ω là tần số góc. Xét hai dao động điều hòa có phương trình lần lượt là

$$x_1(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)} \text{ và } x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}.$$

Đặt $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ là phương trình tổng hợp của hai dao động này. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tần số góc của dao động tổng hợp là $\frac{\pi}{4}.$

b) Phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right).$

c) Biên độ của dao động tổng hợp trên bằng 3.

d) Pha ban đầu của dao động tổng hợp trên là $\frac{\pi}{12}.$

Lời giải.

a) Tần số góc $\omega = \frac{\pi}{4}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= 3 \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \cos \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 3 \cdot 2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3} \right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6} \right)}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3} \right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6} \right)}{2} \\ &= 6 \cos \frac{\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \\ &= 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12} \right)$.

c) Căn cứ vào phương trình $x(t)$, ta có biên độ dao động là $3\sqrt{2}$.

d) Căn cứ vào phương trình $x(t)$, ta có pha ban đầu là $\frac{\pi}{12}$.

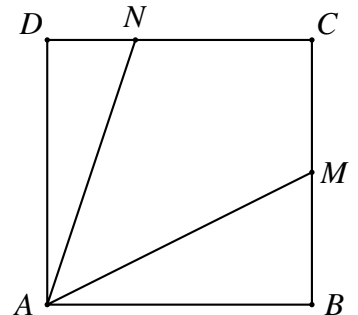
Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d đúng ☐

Câu 25.

Trên một mảnh giấy hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN , ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$ (Hình bên).

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\tan \widehat{BAM} = \frac{1}{2}$.
 b) $\tan \widehat{DAN} = \frac{1}{3}$.
 c) $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 60^\circ$.
 d) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng 30° .



Lời giải.

Giả sử hình vuông có độ dài cạnh là 1.

- a) Tam giác ABM vuông tại B có $\tan \widehat{BAM} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}$.
 b) Tam giác ADN vuông tại D có $\tan \widehat{DAN} = \frac{DN}{AD} = \frac{1}{3}$.
 c) $\tan (\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \frac{\tan \widehat{BAM} + \tan (\widehat{DAN})}{1 - \tan \widehat{BAM} \tan (\widehat{DAN})} = 1 \Rightarrow \widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ$
 d) Góc chiếu sáng là $\widehat{MAN}$. Ta có

$$\widehat{MAN} = 90^\circ - (\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 45^\circ$$

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45° .

Chọn đáp án

a đúng	b đúng	c sai	d sai
--------	--------	-------	-------

 ☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30 vào ô kết quả.

Câu 26. Cho hai góc a và b với $\tan a = \frac{1}{7}$ và $\tan b = \frac{3}{4}$. Khi đó, $\tan(a+b)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

$$\text{Mà } \tan a = \frac{1}{7} \text{ và } \tan b = \frac{3}{4} \text{ nên } \tan(a+b) = 1.$$

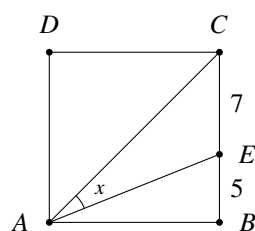
Đáp án:

1

 ☐

Câu 27.

Cho hình vuông $ABCD$ như hình vẽ bên. Tính $\tan x$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \tan(45^\circ - x) &= \tan \widehat{EAB} = \frac{5}{12} \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} &= \frac{5}{12} \\ \Leftrightarrow \tan x &= \frac{7}{17} \approx 0,41. \end{aligned}$$

Đáp án:

0,41

 ☐

Câu 28. Biết $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = n \cdot \tan \alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Giá trị n bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Xét

$$\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

Suy ra $n = 1$.

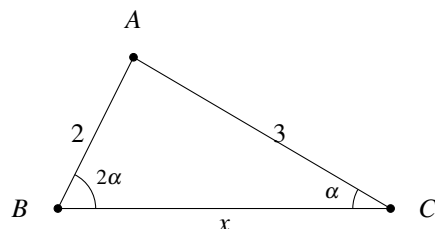
Đáp án:

1

 ☐

Câu 29.

Cho tam giác ABC như hình vẽ. Biết $\widehat{B} = \widehat{C} = 2\alpha$, $AB = 2$, $AC = 3$. Tính độ dài cạnh BC .

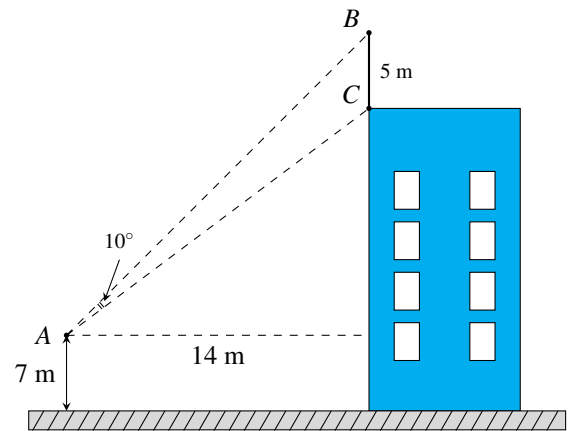


Lời giải.

Đáp án: **2,5**

Câu 30.

Trên nóc một tòa nhà thẳng đứng có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất và cách tòa nhà 14 m có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten với góc $\widehat{BAC} = 10^\circ$. Tính chiều cao của tòa nhà (tính bằng mét và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải.

Đặt $CR = h > 0$ và $\widehat{CAR} = \alpha$. Ta có

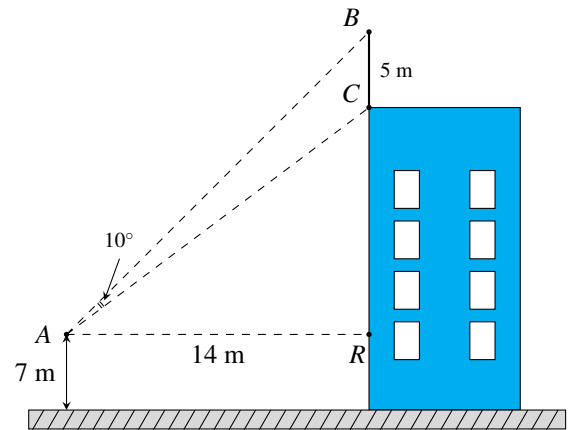
$$\bullet \tan \alpha = \frac{h}{14}.$$

$$\bullet \tan(\alpha + 10^\circ) = \frac{h+5}{14}.$$

$$\tan(\alpha + 10^\circ) = \frac{h+5}{14} \Leftrightarrow \frac{\tan \alpha + \tan 10^\circ}{1 - \tan \alpha \cdot \tan 10^\circ} = \frac{h+5}{14}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{h}{14} + \tan 10^\circ}{1 - \frac{h}{14} \cdot \tan 10^\circ} = \frac{h+5}{14}. \text{ Giải phương trình này, ta}$$

tìm được $h \approx 12$. Suy ra, chiều cao ngôi nhà là $h + 7 = 19$ (m).



Đáp án: **19**

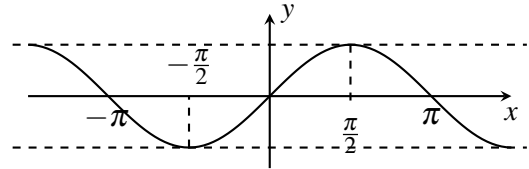
§3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

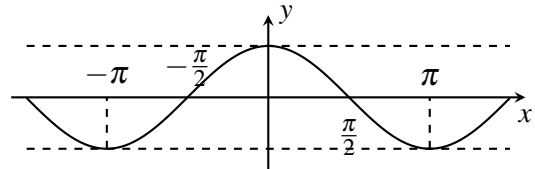
1 Hàm số $y = \sin x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



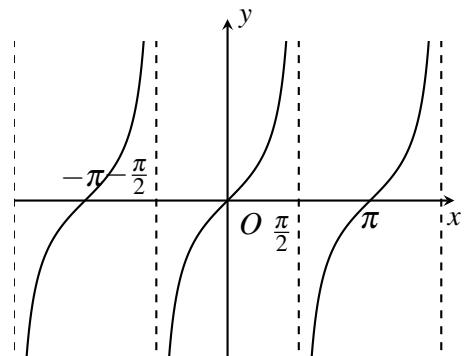
2 Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1; 1]$, tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



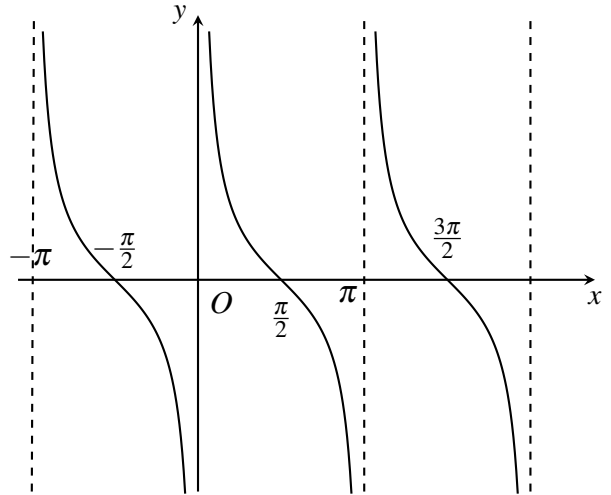
3 Hàm số $y = \tan x$

- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$; Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



4 Hàm số $y = \cot x$

- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

**PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****DT****1****Tìm tập xác định của hàm số lượng giác**

Ta chú ý một số điều kiện sau:

- a) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x) \neq 0$.
- b) $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.
- c) $y = \tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- d) $y = \cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

≡ Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

- | | | |
|---|---|---|
| a) $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x}$ | b) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ | c) $y = \frac{2 + 3\cos 2x}{\sin x}$ |
| d) $y = \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$ | e) $y = \frac{\sin x - 3}{\cos x + 1}$ | f) $y = \frac{2\sin x + 3}{\cos x + 2}$ |
| g) $y = \frac{2\sin x + 3}{\sin x - 1}$ | h) $y = \frac{2\sin x - 3}{2\sin x + 3}$ | i) $y = \sin \frac{x-1}{x+2}$ |
| j) $y = \sqrt{3 - 2\cos x}$ | k) $y = \frac{\sqrt{\cos x + 2}}{1 + \cos x}$ | l) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ |

≡ Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

- | | | |
|----------------------|-----------------------------|---|
| a) $y = 2\tan x + 3$ | b) $y = 2\tan 2x - 4\sin x$ | c) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ |
|----------------------|-----------------------------|---|

≡ Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số sau có tập xác định $\mathbb{R}$.

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|--|
| a) $y = \sqrt{m - \cos x}$ | b) $y = \sqrt{2\sin x - m}$ | c) $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$ |
|----------------------------|-----------------------------|--|

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{\cos^2 x - (2+m)\cos x + 2m}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} \cos^2 x - (2+m)\cos x + 2m &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (\cos x - 2)(\cos x - m) &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1). \end{aligned}$$

Do $\cos x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \cos x - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \cos x \leq m, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $m \geq 1$.

DT 2 Tính chẵn lẻ của hàm số

Ta thực hiện các bước sau:

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số – Tập $\mathcal{D}$ phải đối xứng.
- ② Tính $f(-x)$ (chỗ nào có biến x , ta thay bởi $-x$) và thu gọn kết quả. Khi đó
 - Nếu $f(-x) = f(x)$: hàm số đã cho là hàm chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$: hàm số đã cho là hàm lẻ.
 - Nếu không rơi vào 2 trường hợp trên, ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

GHI NHỚ

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| ① Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. | ② Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn. |
| ③ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ. | ④ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ. |

Bài 5. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

- a) $y = \sin x \cdot \cos x$; b) $y = \tan x + \cot x$; c) $y = \sin^2 x$.

Lời giải.

a) Hàm số $y = f(x) = \sin x \cdot \cos x$ là hàm số lẻ vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -(\sin x \cdot \cos x) = -f(x)$.

b) Hàm số $y = g(x) = \tan x + \cot x$ là hàm số lẻ vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in D$ và $g(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -(\tan x + \cot x) = -g(x)$.

c) Hàm số $y = h(x) = \sin^2 x$ là hàm số chẵn vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $h(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = h(x)$.

≡ Bài 6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$.

b) $f(x) = \sqrt{2 + \sin x} + \sqrt{2 - \sin x}$.

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ nên $\mathcal{D}$ là tập đối xứng.Ta có $f(-x) = \sin^2(-2x) + \cos(-3x) = \sin^2 2x + \cos 3x = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.Do đó hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.Với mọi $x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$$f(-x) = \sqrt{2 + \sin(-x)} + \sqrt{2 - \sin(-x)} = \sqrt{2 - \sin x} + \sqrt{2 + \sin x} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho chẵn trên D .

c)

DT

3

Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

Ta thường dùng một trong 3 phương pháp sau:

☒ Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

① $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

② $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

③ $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$

④ $0 \leq |\sin x|, |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

☒ Sử dụng điều kiện có nghiệm

① $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

② $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$.

③ $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

☒ Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó, kết luận.

≡ Bài 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = 2 \sin x + 3$

b) $y = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{3}$

c) $y = \sqrt{2 + \cos x} - 1$

d) $y = 4 \sin x \cos x + 1;$

e) $y = 4 - 3 \sin^2 2x.$

f) $y = (3 - \sin x)^2 + 1$

≡ Bài 8. Tìm x để hàm số $y = (\sin x + 3)^2 - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

≡ Bài 9. Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

≡ Bài 10. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

b) $y = \sin 2x - \cos 2x$

c) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$

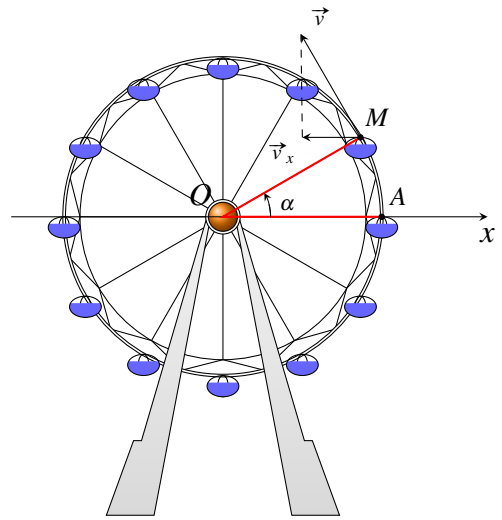
Bài 11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

- a) $y = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$ b) $y = 2\cos^2 x + 3\cos x - 2$ c) $y = \cos 2x - \sin x + 3$

Bài 12.

Khi du quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình bên).

- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x
b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.



DT

4

Đồ thị hàm số lượng giác

Bài 13. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

- a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$;
b) $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi)$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\bullet \left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} - 4\pi; \frac{\pi}{2} - 4\pi\right).$$

Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right)$.

$$\bullet \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 10\pi; \frac{3\pi}{2} + 10\pi\right).$$

Do hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$.

b) Ta có

$$\bullet (-20\pi; -19\pi) = (0 - 20\pi; \pi - 20\pi).$$

Do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$ nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng $(-20\pi; -19\pi)$.

- $(-9\pi; -8\pi) = (-\pi - 8\pi; 0 - 8\pi)$.

Do hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng $(-9\pi; -8\pi)$

Bài 14. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimet, $\omega > 0$. Khi đó, chu kỳ T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong các trường hợp:

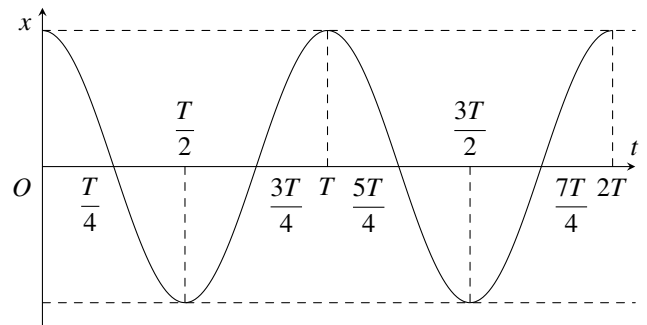
- a) $A = 3\text{cm}, \varphi = 0$; b) $A = 3\text{cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$; c) $A = 3\text{cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

- a) Khi $A = 3\text{cm}, \varphi = 0$, ta có: $x = 3 \cos(\omega t) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 9:

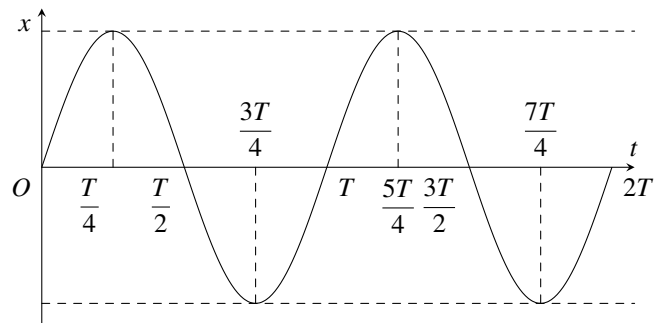
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	3	0	-3	0	3



- b) Khi $A = 3\text{cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 10:

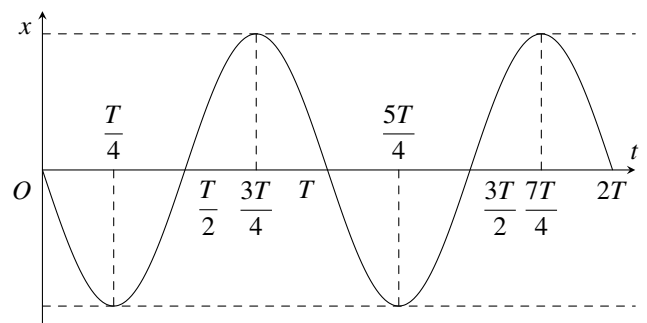
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	3	0	-3	0



- c) Khi $A = 3\text{cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 11:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	-3	0	3	0



1 Tập xác định của các hàm số

a) $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x};$

b) $y = \sqrt{1 + \cos 2x}.$

Lời giải.

a) Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$

b) Điều kiện $1 + \cos 2x \geq 0$

Mà $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \cos 2x \leq 2$ nên $1 + \cos 2x \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}.$

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}.$

2 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cot \left(3x - \frac{\pi}{4} \right).$

b) $y = \frac{\sin x}{\cos 2x - 1}.$

c) $y = \sqrt{\frac{2 + \sin x}{1 - \cos x}}.$

d) $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}.$

Lời giải.

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi:

$$\cos 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

c) Hàm số xác định khi $\begin{cases} \frac{2 + \sin x}{1 - \cos x} \geq 0 \\ 1 - \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

d) Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}.$

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

3 Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau:

a) $y = \sin 2x.$

b) $y = |\sin x|.$

c) $y = \tan^2 x.$

d) $y = \sqrt{1 - \cos x}.$

e) $y = \tan x + \cot x.$

f) $y = \sin x \cdot \cos 3x.$

Lời giải.

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y = f(x) = \sin 2x.$$

$$\text{Ta có } f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x).$$

Vậy $y = \sin 2x$ là hàm số lẻ.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y = f(x) = |\sin x|.$$

$$\text{Ta có } f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x).$$

Vậy $y = f(x) = |\sin x|$ là hàm số chẵn.

c) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$y = f(x) = \tan^2 x$$

$$\text{Ta có } f(-x) = \tan^2(-x) = \tan^2 x = f(x).$$

Vậy $y = f(x) = \tan^2 x$ là hàm số chẵn.

d) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y = f(x) = \sqrt{1 - \cos x}.$$

$$\text{Ta có } f(-x) = \sqrt{1 - \cos(-x)} = \sqrt{1 - \cos x} = f(x).$$

Vậy $y = \sqrt{1 - \cos(x)}$ là hàm số chẵn.

e) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$y = f(x) = \tan x + \cot x$$

$$\text{Ta có } f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x).$$

Vậy hàm số $f(x) = \tan x + \cot x$ là hàm số lẻ.

f) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y = f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$$

$$\text{Ta có } f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-3x) = -\sin x \cdot \cos 3x = -f(x).$$

Vậy hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos 3x$ là hàm số lẻ.

4 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 3 - 2 \sin 2x$

b) $y = 5 - 3 \cos 4x.$

c) $y = 3 - 2|\sin 2x|.$

d) $y = 3 \sin^2 2x - 4$

Lời giải.

a) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -2 \sin 2x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 3 - 2 \sin 2x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5.$$

- $\max y = 5$ khi $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$

- $\min y = 1$ khi $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

b) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos 4x \leq 1 \\ \Leftrightarrow 3 &\geq -3 \cos 4x \geq -3 \\ \Leftrightarrow 5 + 3 &\geq 5 - 3 \cos 4x \geq 5 - 3 \\ \Leftrightarrow 2 &\leq y \leq 8. \end{aligned}$$

- $\max y = 8$ khi $\cos 4x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.
- $\min y = 2$ khi $\cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

c) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\sin 2x| \leq 1 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq -2|\sin 2x| \leq 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq 3 - 2|\sin 2x| \leq 3. \end{aligned}$$

- $\max y = 3$ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$.
- $\min y = 1$ khi $\sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pm\pi}{4} + k\pi$.

d) Do $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ nên $-4 \leq y = 3 \sin^2 2x - 4 \leq -1$.

○ $y = -4$ khi $\sin 2x = 0$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = 0$.

○ $y = -1$ khi $\sin^2 2x = 1$, luôn tồn tại x thỏa mãn, chẳng hạn $x = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $\min y = -4$ và $\max y = -1$.

5 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y = 2 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

b) $y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3$.

Lời giải.

a) Ta có $y = 2 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 2 - \sin^2 2x$.

Vì $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ nên $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 2 - 0 \geq 2 - \sin^2 2x \geq 2 - 1 \Leftrightarrow 2 \geq y \geq 1$.

Vậy $\min y = 1$ khi $\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

$\max y = 2$ khi $\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Biến đổi $y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3 = (2 \sin x + 1)^2 + 2$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin x \leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq 2 \sin x + 1 \leq 3 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (2 \sin x + 1)^2 \leq 9 \\ \Leftrightarrow 2 &\leq (2 \sin x + 1)^2 + 2 \leq 11. \end{aligned}$$

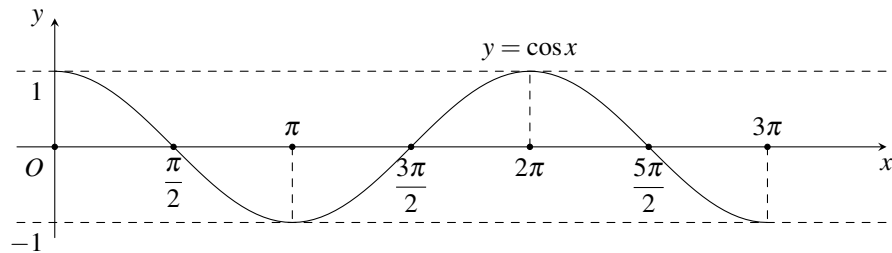
Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 11$ khi $x = \frac{\pi}{2}$ và $\min_{x \in \mathbb{R}} y = 2$ khi $\sin x = -\frac{1}{2}$.

6 Cho hàm số $y = \cos x$ với $x \in [0; 3\pi]$.

- Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
- Hàm số đã cho đồng biến, nghịch biến trên những khoảng nào?
- Tại các điểm nào thì giá trị của hàm số lớn nhất, nhỏ nhất?
- Tìm các giá trị của $x \in [0; \pi]$ sao cho $\cos 3x \leq 0$.

Lời giải.

a) Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; 3\pi]$ như sau



- Hàm số đồng biến trên khoảng $(\pi, 2\pi)$, nghịch biến trên các khoảng $(0; \pi)$ và $(2\pi; 3\pi)$.
- Giá trị của hàm số lớn nhất khi $x = 0$ và $x = 2\pi$. Giá trị của hàm số nhỏ nhất khi $x = \pi$ và $x = 3\pi$.
- Đặt $t = 3x$. Vì $0 \leq x \leq \pi$ nên $0 \leq t \leq 3\pi$.
 Từ đồ thị của hàm số ở trên, ta có $\cos t \leq 0$ khi và chỉ khi $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ hoặc $\frac{5\pi}{2} \leq t \leq 3\pi$.
 Do đó $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty)$. D. $[-1; 1]$.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 2. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là

- A. $[-2; 2]$. B. $[0; 2]$. C. $[-1; 1]$. D. $[0; 1]$.

Lời giải.

Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2x$ là $[-1; 1]$

Chọn đáp án **C** □

Câu 3. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
 B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
 C. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
 D. Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Lời giải.

Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , các hàm số $y = \tan x, y = \cot x, y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 4. Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

- A. $T = 2\pi$.
 B. $T = \frac{\pi}{2}$.
 C. $T = \pi$.
 D. $T = 4\pi$.

Lời giải.

Chú ý với k là số nguyên dương hàm số $y = \sin kx$ có chu kỳ $T = \frac{2\pi}{k}$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 5. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.
 B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
 C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.
 D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Lời giải.

Theo định nghĩa thì trong bốn hàm số đã cho, chỉ có hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 6. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

- A. $y = \sin^2 x$.
 B. $y = x \cos 2x$.
 C. $y = x \sin x$.
 D. $y = \cos x$.

Lời giải.

Tất cả các hàm ở 4 đáp án đều có tập xác định là $\mathbb{R}$, nên để kiểm tra tính lẻ, ta chỉ cần kiểm tra tính chất $f(-x)$ có bằng với $f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và hàm đó là $y = x \cos 2x$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
 B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. $y = \sin 2x$.
 D. $y = \tan x - \sin 2x$.

Lời giải.

Xét $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Mặt khác $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ nên là hàm chẵn.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot x$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 9. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3\cos x}{\sin x}$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 10. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

- A. $x \neq k2\pi$. B. $x \neq k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy điều kiện xác định của hàm số đã cho là $x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 11. Với ký hiệu $k \in \mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. B. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy điều kiện xác định của hàm số đã cho là $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 12. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$.

- A. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos 3x - 1}{\cos x + 1}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 14. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\min y = -2, \max y = 4.$

B. $\min y = 2, \max y = 4.$

C. $\min y = -2, \max y = 3.$

D. $\min y = -1, \max y = 4.$

Lời giải.

Ta có: $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq y \leq 4.$

• $y = -2 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \min y = -2.$

• $y = 4 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \max y = 4.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2\cos^2 3x.$

A. $\min y = 1, \max y = 2.$

B. $\min y = 1, \max y = 3.$

C. $\min y = 2, \max y = 3.$

D. $\min y = -1, \max y = 3.$

Lời giải.

Ta có: $0 \leq \cos^2 3x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq y \leq 3.$

• $y = 1 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \min y = 1.$

• $y = 3 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \max y = 3.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2\sin x + 3}.$

A. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 1.$

B. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2\sqrt{5}.$

C. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 2.$

D. $\max y = \sqrt{5}, \min y = 3.$

Lời giải.

Ta có $1 \leq 2\sin x + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq \sqrt{5}.$

Vậy $\max y = \sqrt{5}$ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $\min y = 1$ khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \frac{4}{1 + 2\sin^2 x}.$

A. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 4.$

B. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 3.$

C. $\min y = \frac{4}{3}, \max y = 2.$

D. $\min y = \frac{1}{2}, \max y = 4.$

Lời giải.

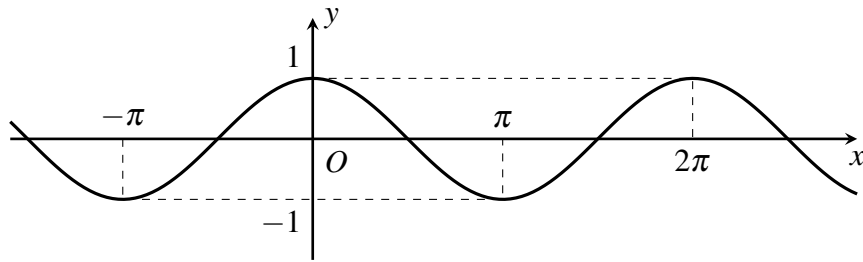
Ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq y \leq 4.$

• $y = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \min y = \frac{4}{3}.$

• $y = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Rightarrow \max y = 4.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 18. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = 1 + \sin x$.

B. $y = 1 - \sin x$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \cos x$.

Lời giải.

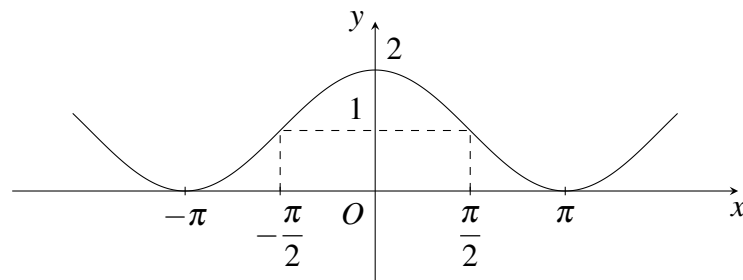
Ta thấy $y(0) = 1$, do đó loại đáp án C.

Hàm số không đạt giá trị bằng 2 tại $x = \frac{\pi}{2}$ hay $x = -\frac{\pi}{2}$, loại đáp án A và B.

Do đó, hàm số cần tìm phải là $y = \cos x$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 19. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = \cos x + 1$.

B. $y = 2 - \sin x$.

C. $y = 2 \cos x$.

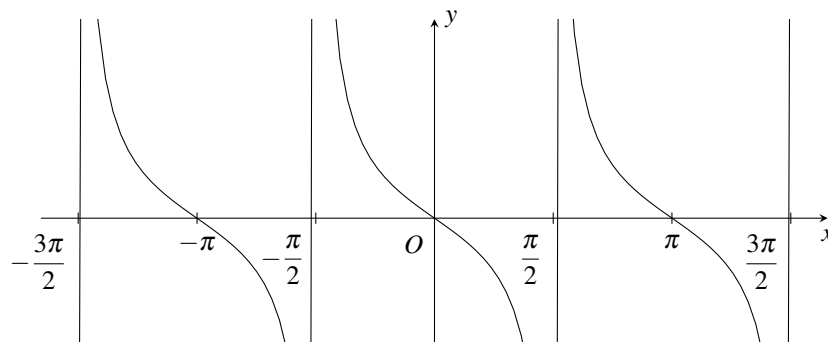
D. $y = \cos^2 x + 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(0, \pi)$. Trong các hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = \cos x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 20. Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị ở hình vẽ dưới đây?



A. $y = -\tan x$.

B. $y = \cot x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = -\cot x$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = \tan x$ ta suy ra đồ thị trên của hàm số $y = -\tan x$.

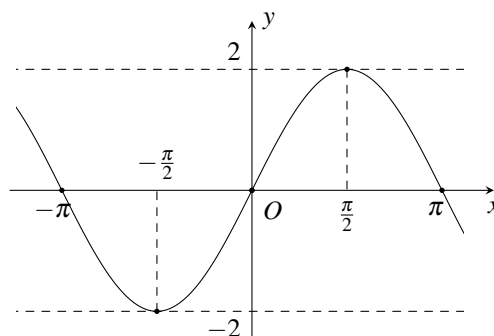
Chọn đáp án **(A)** ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21.

Cho hàm số $y = 2 \sin x$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

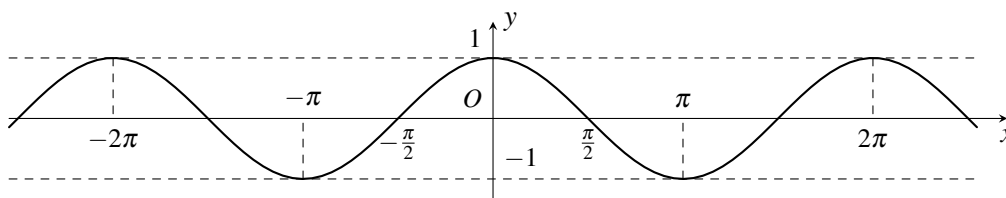
- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Tập giá trị của hàm số là $[-1; 1]$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -1$ tại đúng 2 điểm phân biệt.



Lời giải.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b sai ☐ c sai ☐ d sai ☐

Câu 22. Cho đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ như hình bên dưới



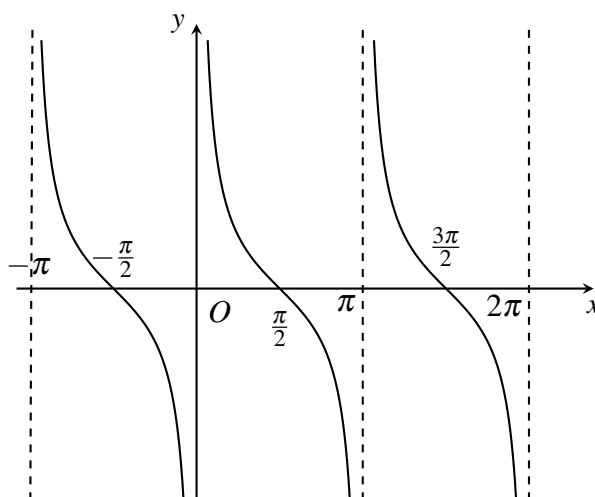
Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi; \pi)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2\pi; -\pi)$.
- c) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.
- d) Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$, có đúng 3 giá trị của x để hàm số nhận giá trị bằng 0.

Lời giải.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d đúng ☐

Câu 23. Cho hàm số $y = \cot x$ có đồ thị như hình bên dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$..
 b) Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; \pi)$.
 c) Trên $[-\pi; \pi]$ có đúng ba giá trị của x để $\cot x = 0$.
 d) Trên $[0; \pi]$, $\cot x < 1$ khi và chỉ khi $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

Lời giải.

Chọn đáp án

a đúng	b sai	c sai	d đúng
--------	-------	-------	--------

 ☐

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin^2 x - 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 b) Hàm số là một hàm số chẵn.
 c) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.
 d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -3 .

Lời giải.

- a) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .
 b) Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(-x) = 2\sin^2(-x) - 5 = 2\sin^2 x - 5$ nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.
 c) Ta có $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow -5 \leq 2\sin^2 x - 5 \leq -3$.
 Suy ra, giá trị lớn nhất của hàm số bằng -3 , đạt được khi $\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.
 d) Ta có $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow -5 \leq 2\sin^2 x - 5 \leq -3$.
 Suy ra, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -5

Chọn đáp án

a sai	b đúng	c đúng	d sai
-------	--------	--------	-------

 ☐

Câu 25. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức: $p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $p(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{75}$.
 b) Thời điểm $t = 0$, huyết áp của người này là 120 mmHg.
 c) Huyết áp tâm thu (huyết áp cao nhất) của người này là 135 mmHg.
 d) Huyết áp tâm trương (huyết áp thấp nhất) của người này là 105 mmHg.

Lời giải.

- a) Ghi nhớ: Hàm số $y = \cos at$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{a}$.
 Suy ra hàm số này tuần hoàn với chu kỳ $\frac{2\pi}{150\pi} = \frac{1}{75}$.
 b) Với $t = 0$, ta có $p = 120 + 15\cos 0 = 135$ mmHg.
 c) Vì $-1 \leq \cos 150\pi t \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \leq p(t) \leq 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên huyết áp tâm thu (huyết áp cao nhất) là 135 mmHg.
 d) Huyết áp tâm trương (huyết áp thấp nhất) của người này là 105 mmHg.

Chọn đáp án

a sai	b sai	c đúng	d đúng
-------	-------	--------	--------

 ☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30 vào ô kết quả.

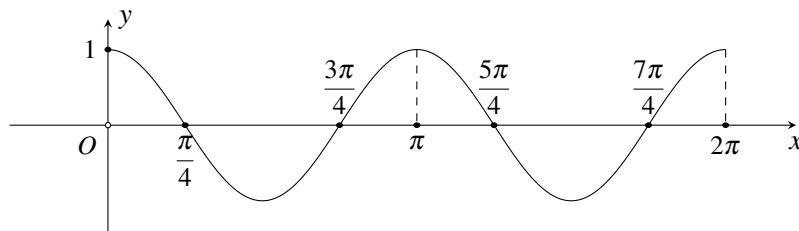
Câu 26. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{5} - \sqrt{3} \cos 2x$. (Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân)

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{3} \geq -\sqrt{3} \cos 2x \geq -\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{3} \geq \sqrt{5} - \sqrt{3} \cos 2x \geq \sqrt{5} - \sqrt{3}$.
Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{5} + \sqrt{3} \approx 3,97$.

Đáp án: **3,97** □

Câu 27. Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$ trên $[0; 2\pi]$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của $x \in [0; 2\pi]$ để $\cos 2x = 0$. Tính tổng tất cả các phần tử của T (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải.

Dựa vào đồ thị $T = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$. Suy ra, tổng các phần tử trong tập hợp T là

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} \approx 12,6.$$

Đáp án: **12,6** □

Câu 28. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một tòa chung cư cao 40(m) in trên mặt đất, độ dài bóng của tòa nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tìm độ dài bóng của tòa nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải.

Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có $t = 8 - 6 = 2$.

Vậy độ dài bóng của tòa nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là $S(2) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 2 \right) \right| = 40\sqrt{3}$ (m)

Đáp án: **169,3** □

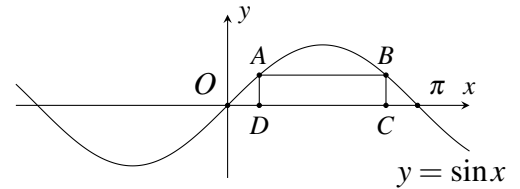
Câu 29. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90 \cos \left(\frac{\pi}{10} t \right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimet trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây. Tìm chiều cao của sóng (cm) (là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng).

Lời giải.

Ta có $-90 \leq 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right) \leq 90$, suy ra chiều cao của sóng là $90 - (-90) = 180$ (cm).

Đáp án: **180** □

Câu 30. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC .

**Lời giải.**

Theo hình vẽ thì $OD = CK \Rightarrow 2OD = \pi - CD = \frac{\pi}{3} \Rightarrow OD = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_D = \frac{\pi}{6}$.

Tung độ điểm D là $y_D = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = AD = BC$.

Đáp án: **0,5** □

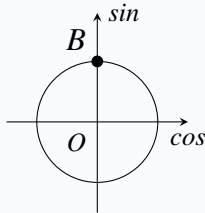
§4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



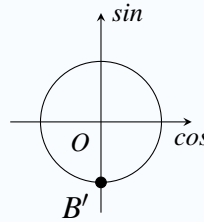
KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Phương trình $\sin x = a$.

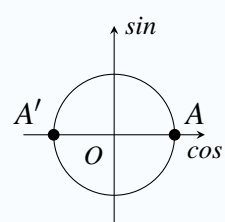
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

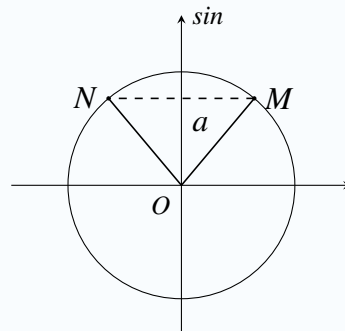
☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **sin** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

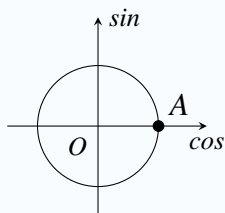
$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

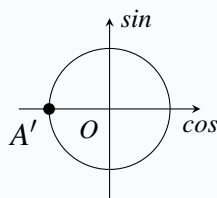
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2 Phương trình $\cos x = a$.

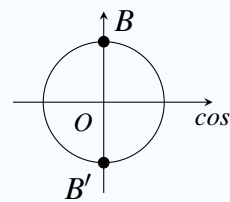
☑ Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$.



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$



$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

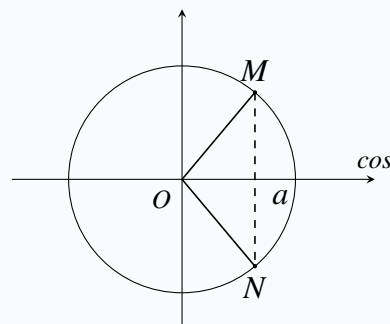
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **cos** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- ☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3 Phương trình $\tan x = a$.

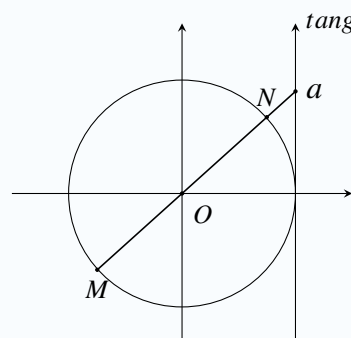
- ☑ Trường hợp $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



- ☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4 Phương trình $\cot x = a$.

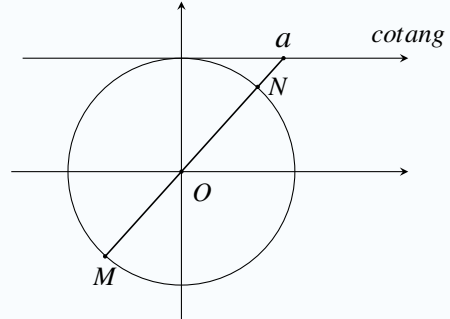
- ✓ Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** $\left[\frac{1}{a} \right]$ để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng. Riêng $a = 0$ thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



- ✓ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Giải các phương trình lượng giác cơ bản

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số a quy đổi về góc "đẹp" hay xấu;
- Chọn và ráp công thức nghiệm.

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2 \sin \left(\frac{\pi}{5} - x \right) = 1$

c) $2 \sin (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) = 1$

e) $\sqrt{2} \cos 2x - 1 = 0$

f) $3 \cos x - 1 = 0.$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\sqrt{3} \tan \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 1$

c) $\tan (x - 45^\circ) - 1 = 0$

d) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

e) $\sqrt{3} \cot x - 1 = 0$

f) $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x.$

Bài 3. Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

a) $\sqrt{3} \tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi).$

b) $\sqrt{2} \sin (x - 1) = -1$ trên $\left(-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$

c) $2 \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 0$ trên $(-\pi, \pi).$

d) $\tan (3x + 2) - \sqrt{3} = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$

DT**2****Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng**

- Biến đổi về một trong các cấu trúc sau

① $\sin u = \sin v$

② $\cos u = \cos v$

③ $\tan u = \tan v$

④ $\cot u = \cot v$

- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác sau:

① $-\sin x = \sin(-x).$

② $-\cos x = \cos(\pi - x).$

③ $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

④ $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

≡ Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = \sin 2x$

b) $\sin 2x - \sin x = 0$

c) $\sin 5x + \sin x = 0$

d) $\cos 2x - \cos x = 0$

e) $\cos 8x + \cos x = 0$

f) $\cos 4x - \sin x = 0$

≡ Bài 5. (B.2013). Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ **Lời giải.**

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
 \sin 5x + 2\cos^2 x - 1 &= 0 \Leftrightarrow \sin 5x + \cos 2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos 2x = -\sin 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 5x + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} - 5x + k2\pi \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} - k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

DT**3****Vận dụng thực tiễn**

≡ Bài 6. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải.

- Ta có phương trình

$$\begin{aligned} 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12 &= 12 \\ \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) &= k\pi \Leftrightarrow t = 80 + 182k \end{aligned}$$

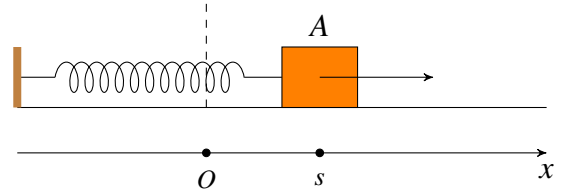
Với $k, t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$, ta tìm được $k = 0$ và $k = 1$ thỏa.

Suy ra thành phố A có 12 giờ ánh sáng vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 của năm.

- b) Thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất đồng nghĩa với $d(t)$ nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi $\sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] = -1$. Giải phương trình này, ta tìm được $t = 353$.
- c) Thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất đồng nghĩa với $d(t)$ lớn nhất. Điều này xảy ra khi $\sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] = 1$. Giải phương trình này, ta tìm được $t = 171$.

≡ Bài 7.

Trong Hình bên, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right)$.



Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?

Lời giải.

Theo yêu cầu bài toán

$$\begin{aligned} s = -5\sqrt{3} &\Leftrightarrow 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) = -5\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Giải phương trình này ta được $t = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

≡ Bài 8. Vận tốc v_1 (cm/s) của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc v_2 (cm/s) của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức

$$v_1(t) = -4 \cos \left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \text{ và } v_2(t) = 2 \sin \left(2t + \frac{\pi}{6} \right).$$

Xác định các thời điểm t mà tại đó

- a) vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 (cm/s);
- b) vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

Lời giải.

a) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 (cm/s) khi và chỉ khi

$$-4 \cos \left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5\pi}{8} + k3\pi \\ t = \frac{13\pi}{8} + k3\pi \end{cases}, k \in \mathbb{N}.$$

Vậy với $t = \frac{5\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$ hoặc $t = \frac{13\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$ thì vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 (cm/s).

b) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai khi và chỉ khi

$$-4\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-2t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2t\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2t + k2\pi \\ \frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} - 2t + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5\pi}{6} + k\frac{3\pi}{2} \\ t = -\frac{11\pi}{32} + k\frac{3\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $t > 0$ nên nhận $t = \frac{19\pi}{16} + k\frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$ và $t = \frac{13\pi}{32} + k\frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{N}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP TỰ LUYỆN CHO CÁC DẠNG TOÁN

1 Giải phương trình: $3 - \sqrt{3}\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ với $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{12} < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-1; 0\}$.

- Với $k = -1$ thì $x = \frac{-\pi}{6}$;

- Với $k = 0$ thì $x = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $x = \frac{-\pi}{6}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- 2 Giải phương trình: $\tan(x + 30^\circ) + 1 = 0$ với $-90^\circ < x < 360^\circ$.

Lời giải.

Ta có: $\tan(x + 30^\circ) + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan(x + 30^\circ) = -1 = \tan(-45^\circ) \Leftrightarrow x = -75^\circ + k180^\circ$.

Do $-90^\circ < x < 360^\circ$ nên tập nghiệm của phương trình là $S = \{-75^\circ, 105^\circ, 285^\circ\}$.

- 3 Giải các phương trình sau:

- a) $\cos 3x = \sin 2x$ b) $\cos 3x - 2\cos \frac{\pi}{4} = 0$ c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
 d) $\cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$ e) $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ f) $2\cos(2x - 60^\circ) - 1 = 0$
 g) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0$ h) $\cos\left(\frac{x}{3} - 30^\circ\right) = 1$ i) $\sin^2 2x = \frac{1}{4}$

Lời giải.

$$\text{a) } \cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{b) } \cos 3x - 2\cos \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \sqrt{2} \text{ (Phương trình vô nghiệm)}$$

$$\text{c) } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{d) } \cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x + 30^\circ = -60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k180^\circ \\ x = -45^\circ + k180^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{e) } 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{f) } 2\cos(2x - 60^\circ) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(2x - 60^\circ) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 60^\circ = 120^\circ + k360^\circ \\ 2x - 60^\circ = -120^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + k180^\circ \\ x = -30^\circ + k180^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{g) } \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -2 \text{ (Phương trình vô nghiệm)}$$

$$\text{h) } \cos\left(\frac{x}{3} - 30^\circ\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3} - 30^\circ = k360^\circ \Leftrightarrow x = 90^\circ + k1080^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{i) } \sin^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4 Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \sqrt{3}$.

b) $\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

c) $\tan(x + 48^\circ) = \tan 25^\circ$.

d) $\tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{7}$.

Lời giải.

a) $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) $\tan(x + 48^\circ) = \tan 25^\circ \Leftrightarrow x + 48^\circ = 25^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 25^\circ - 48^\circ + k108^\circ \Leftrightarrow x = -23^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-23^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\tan\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{7} \Leftrightarrow x + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} - \frac{3\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{17\pi}{28} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -\frac{17\pi}{28} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5 Giải phương trình

a) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

b) $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\sqrt{3} + \tan x} = 0$.

Lời giải.

a) Điều kiện $\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} - x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{6} - m\pi \end{cases}, m \in \mathbb{Z}$.

PT $\Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp với điều kiện ta suy ra phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Điều kiện xác định $\begin{cases} \tan x \neq -\sqrt{3} \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Khi đó, phương trình tương đương với $\sin 2x + 2\cos x - (\sin x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow (2\sin x \cos x + 2\cos x) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \text{ (loại, do } \cos x \neq 0) \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Thử lại với điều kiện, ta loại nghiệm $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$, do không thỏa $\tan x \neq -\sqrt{3}$.

Vậy, nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

- 6** Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.

Lời giải.

Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó

$g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường.

Áp dụng công thức này:

- Cho $y = 0$ ta được $\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

- Quả đạn tiếp đất khi $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Ta có $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \leq \frac{v_0^2}{g}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin 2\alpha = 1$.

Giải phương trình $\sin 2\alpha = 1$, ta được $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hay $\alpha = 45^\circ$.

Vậy quả đạn pháo sẽ bay xa nhất khi góc bắn bằng 45° .

- 7** Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn đến hàng phần trăm.

Lời giải.

a) Tại thời điểm $t = 2$. Ta có: $h(2) = 0,8 \cdot \cos(0,5 \cdot 2) + 4 = 4,43 \text{ m}$.

b) Tàu không thể di chuyển ra vào cảng khi

$$h(t) < 3,6 \Leftrightarrow \cos 0,5t < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < 0,5t < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} < t < \frac{8\pi}{3}.$$

Với điều kiện $t \in [0; 12]$, ta chọn được thời gian tàu có thể di chuyển ra vào cảng là

$$0 \leq t \leq \frac{4\pi}{3} \text{ hoặc } \frac{8\pi}{3} \leq t \leq 12.$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\sin x = \frac{1}{2}$.

B. $\tan x = \sqrt{3}$.

C. $\sin x = 3$.

D. $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Lời giải.

$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 4. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

A. $x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-7\pi}{6} + k2\pi$.

C. $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$.

D. $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Lời giải.

$2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

A. $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. C. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 6. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $\left\{x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\left\{x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = -1$ là

A. $-k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $\left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $\{90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 8. Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

$$2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 10. Phương trình $\sin x - \cos x = 1$ có một nghiệm là

A. $-\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$.

D. π .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin x - \cos x = 1 &\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x = \pi$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 11. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

A. $x = \pi + k2\pi$.

B. $x = k\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sin^4 x - \cos^4 x = 0 &\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0 \\ \Leftrightarrow -\cos 2x = 0 &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 12. Xét trên $(-\pi; \pi)$, phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

$$\sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi \text{ và } x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi.$$

Xét trên $(-\pi; \pi)$ thì ta được hai nghiệm là $x = \arcsin \frac{2}{3}$ và $x = \pi - \arcsin \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 13. Cho phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi n là số các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; 3\pi]$ thì giá trị của n là

A. $n = 8$.

B. $n = 5$.

C. $n = 6$.

D. $n = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét trên đoạn $[0; 3\pi]$ có tất cả 6 nghiệm là $x = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \right\}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 14. Tính tổng các nghiệm $x \in [0; 2018\pi]$ của phương trình $\sin 2x = 1$.

A. $S = \frac{4071315\pi}{2}$.

B. $S = \frac{4071315\pi}{4}$.

C. $S = \frac{8141621\pi}{2}$.

D. $S = \frac{8141621\pi}{4}$.

Lời giải.

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do } x \in [0; 2018\pi] \text{ nên } 0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2018\pi \Leftrightarrow -0,25 \leq k \leq 2017,75.$$

Các nghiệm của phương trình lượng giác lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu ứng với $k = 0$ và số hạng cuối ứng với $k = 2017$.

$$\text{Bấm máy: } \sum_{x=0}^{2017} \left(\frac{\pi}{4} + x\pi \right), \text{ ta được kết quả } \frac{4071315\pi}{2}.$$

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 15. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\cos x + \sin 2x = 0$

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin(-2x) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in (-\pi; \pi) \text{ nên ta có các nghiệm } -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{2}.$$

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 16. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- A. 16145. B. 20181. C. 20179. D. 16144.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin 5x - \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + m\pi & (m \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{6} + n\pi & (n \in \mathbb{Z}). \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x \in [-2018\pi; 2018\pi] \text{ nên } \begin{cases} -2018\pi \leq k\frac{\pi}{2} \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{5\pi}{6} + m\pi \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + n\pi \leq 2018\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4036 \leq k \leq 4036 \\ -\frac{12113}{6} \leq m \leq \frac{12103}{6} \\ -\frac{12109}{6} \leq n \leq \frac{12107}{6} \end{cases}. \text{ Do đó}$$

có 8073 giá trị k , 4036 giá trị m , 4036 giá trị n , suy ra số nghiệm cần tìm là 16145 nghiệm.

Chọn đáp án **A** $\square$

Câu 17. Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $[-2\pi; \frac{5\pi}{2}]$?

- A. 5. B. 6. C. 4. D. 7.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Với

$$-2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -2\pi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -\frac{9}{4} \leq k \leq \frac{9}{4}.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Có 5 giá trị thỏa yêu cầu, suy ra hai đồ thị cắt nhau tại 5 điểm.

Chọn đáp án **A** $\square$

Câu 18. Với giá trị của tham số m thì phương trình $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2m = 0$ vô nghiệm?

- A. $\begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có: $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2m = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2m$.

Để phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} 2m < -1 \\ 2m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 \pi x = m^2 - 9$ có nghiệm.

A. 5.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Do $0 \leq \cos^2 \pi x \leq 1$ nên $0 \leq m^2 - 9 \leq 1$. Chọn được $m = \pm 3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 20. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.

B. $t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.

C. $t = \frac{8\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.

D. $t = \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

Giải phương trình này, ta được nghiệm $t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$

Chọn đáp án **B** ☐

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho phương trình $\cos 2x = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $x = 0$ là một nghiệm của phương trình.

b) Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

c) Phương trình có cùng tập nghiệm với phương trình $\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

d) Trên $(0; 2\pi)$, phương trình có đúng 2 nghiệm.

Lời giải.

a) Với $x = 0$, ta có $\cos 2x = \cos 2 \cdot 0 = \cos 0 = 1$. Suy ra $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $\cos 2x = 0$.

b) Xét $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

c) Xét $\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$. Vậy hai phương trình này có cùng tập nghiệm.

d) Ta có $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Với $x \in (0; 2\pi)$, suy ra $0 < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{7}{2}$.

Do $k \in \mathbb{Z}$, suy ra $k \in \{0; 1; 2; 3\}$. Mỗi giá trị k , ta tìm được 1 nghiệm, nên trên $(0; 2\pi)$ phương trình có đúng 4 nghiệm.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☒ c đúng ☐ d sai ☐

Câu 22. Cho phương trình $\sin x = \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $x = \frac{3\pi}{4}$ là một nghiệm của phương trình.
- b) Nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- c) Phương trình có cùng tập nghiệm với phương trình $\tan x = 1$.
- d) Trên $(0; 2\pi)$, phương trình có đúng 2 nghiệm.

Lời giải.

- a) Thay $x = \frac{3\pi}{4}$ vào phương trình không thỏa. Suy ra $x = \frac{3\pi}{4}$ không là một nghiệm của phương trình.
- b) $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
- c) $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Vậy hai phương trình có cùng tập nghiệm.
- d) Trên $(0; 2\pi)$, ta có đúng hai nghiệm $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$.

Chọn đáp án ☐ a sai ☐ b sai ☒ c đúng ☒ d đúng ☐

Câu 23. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right]$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ ($0 \leq t < 24$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Nhiệt độ ngoài trời cao nhất bằng 29°C .
- b) Nhiệt độ ngoài trời thấp nhất bằng 26°C .
- c) Nhiệt độ ngoài trời cao nhất vào thời điểm 12 giờ trưa.
- d) Nhiệt độ ngoài trời thấp nhất vào thời điểm 3 giờ sáng.

Lời giải.

- a) Do $-1 \leq \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right] \leq 1 \Rightarrow 26 \leq h(t) \leq 32$.
Suy ra, nhiệt độ ngoài trời cao nhất bằng 32°C .
- b) Do $-1 \leq \sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right] \leq 1 \Rightarrow 26 \leq h(t) \leq 32$.
Suy ra, nhiệt độ ngoài trời thấp nhất bằng 26°C .
- c) Nhiệt độ ngoài trời cao nhất khi $\sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right] = 1 \Rightarrow t = 15$. Vậy nhiệt độ ngoài trời cao nhất vào thời điểm 15 giờ.
- d) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 26° , xảy ra khi $\sin \left[\frac{\pi}{12}(t - 9) \right] = -1 \Rightarrow t = 3$. Suy ra nhiệt độ ngoài trời thấp nhất vào thời điểm 3 giờ sáng.

Chọn đáp án ☐ a sai ☒ b đúng ☐ c sai ☒ d đúng ☐

Câu 24. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một tòa chung cư cao 40 (m) in trên mặt đất, độ dài bóng của tòa nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $0 \leq S(t) \leq 1$.
- b) Độ dài bóng của tòa nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là 0 (m).
- c) Độ dài bóng của tòa nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $40\sqrt{3}$ (m).
- d) Có đúng 2 thời điểm trong ngày mà độ dài bóng của tòa nhà bằng chiều cao của tòa nhà.

Lời giải.

a) Do $0 \leq \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right| < +\infty$, suy ra $0 \leq S(t) < +\infty$

b) Tại thời điểm 12 giờ trưa ta có $t = 12 - 6 = 6$.

Vậy độ dài bóng của tòa nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là $S(6) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 6 \right) \right| = 0$ (m).

Tại thời điểm 12 giờ trưa, Mặt Trời chiếu thẳng đứng từ trên đầu xuống nên toàn bộ tòa nhà được chiếu xuống móng của tòa nhà.

c) Tại thời điểm 2 giờ chiều ta có $t = 14 - 6 = 8$.

Vậy độ dài bóng của tòa nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $S(8) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 8 \right) \right| = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ (m)

d) Độ dài bóng của tòa nhà bằng chiều cao của tòa nhà khi

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right| = 40 \Leftrightarrow \cot \frac{\pi}{12} t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k (k \in \mathbb{Z}).$$

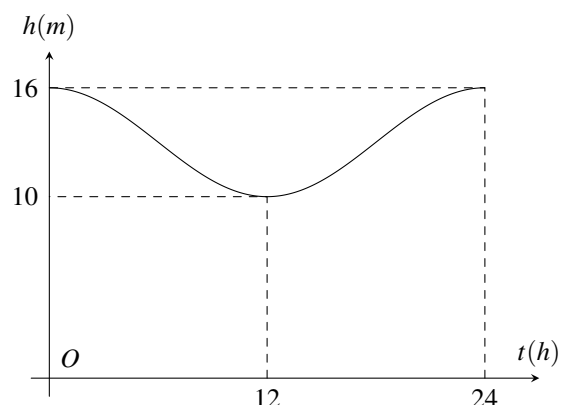
Từ đây, ta tìm được $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của tòa nhà dài bằng chiều cao tòa nhà.

Chọn đáp án

a sai	b đúng	c đúng	d đúng
-------	--------	--------	--------

 □

Câu 25. Mực nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở hình bên mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước h (m) theo thời gian t (h) ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức $h = m + a \cos \left(\frac{\pi}{12} t \right)$ với m, a là các số thực dương cho trước. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a) Lúc 12 giờ trưa thì mực nước thấp nhất.
- b) Lúc 12 giờ khuya thì mực nước cao nhất.
- c) Hàm số h được xác định bởi $h = 13 + 3 \cos \left(\frac{\pi}{12} t \right)$.
- d) Tại thời điểm 8 giờ sáng hoặc 4 giờ chiều thì chiều cao của mực nước là 11,5 m.

Lời giải.

a) Căn cứ vào đồ thị thì lúc 12 giờ trưa thì mực nước thấp nhất.

b) Căn cứ vào đồ thị thì lúc 0 giờ (tức 12 giờ khuya) thì mực nước cao nhất.

c) Ta có

$$\begin{cases} m + a \cdot \cos 0 = 16 \\ m + a \cdot \cos \pi = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + a = 16 \\ m - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ a = 3. \end{cases}$$

Suy ra $h = 13 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$.

d) Do chiều cao của mực nước là 11,5 nên

$$\begin{aligned} 13 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) &= 11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 + 24k \\ t = -8 + 24k \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có $t = 8$ giờ và $t = 16$ giờ.

Chọn đáp án ☐ a đúng ☐ b đúng ☐ c đúng ☐ d đúng ☐

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 26 đến câu 30 vào ô kết quả.

Câu 26. Tìm nghiệm của phương trình $\cot x = 2$ trên khoảng $(0; \pi)$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải.

Đáp án: ☐

Câu 27. Tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin 2x = -1$. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải.

Đáp án: ☐

Câu 28. Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$. Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

Lời giải.

Để cabin đạt độ cao 40 m thì

$$h(t) = 40 \Leftrightarrow 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right) = 10 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{25}{6} + 50k \\ t = \frac{25}{2} + 50k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Để thấy, giá trị $t > 0$ nhỏ nhất thoả mãn là $t = 12,5$ (giây).

Đáp án: **12,5**

Câu 29. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right).$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải.

Vật đi qua vị trí cân bằng khi và chỉ khi

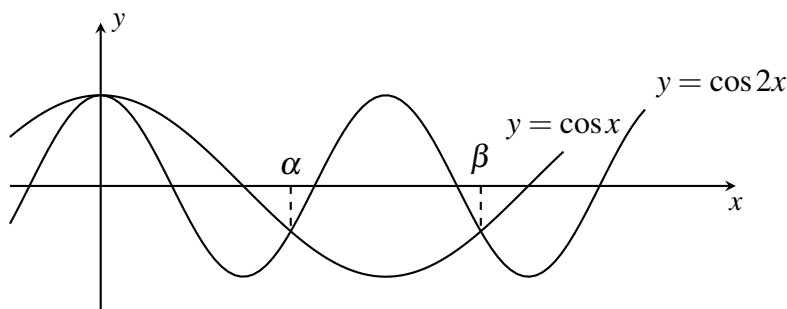
$$x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \leq t \leq 6$ nên $0 \leq \frac{2\pi}{15} + \frac{k\pi}{5} \leq 6 \Leftrightarrow -0,6 \leq k \leq 8,8$ mà $k \in \mathbb{Z}$. Do đó $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Vậy vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

Đáp án: **9**

Câu 30. Cho đồ thị hàm số $y = \cos 2x$ và đồ thị hàm số $y = \cos x$ cắt nhau tại hai giao điểm có hoành độ $x = \alpha$ và $x = \beta$ như hình bên dưới



Tính giá trị $\sin(\beta - \alpha)$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân).

Lời giải.

$$\text{Xét phương trình } \cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ và $\beta = \frac{4\pi}{3}$. Khi đó

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin \frac{2\pi}{3} \approx 0,87.$$

Đáp án: **0,87**

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 1

1. B	2. C	3. B	4. B	5. D	6. A	7. D	8. C	9. A	10. C
11. B	12. C	13. D	14. D	15. B	16. C	17. A	18. A	19. B	20. C
21. B	22. B	23. D	24. B	25. D					

Câu 26. a Đ b Đ c S d S

Câu 27. a S b S c Đ d S

Câu 28. a S b S c Đ d S

Câu 29. a Đ b Đ c Đ d Đ

Câu 30. a S b Đ c Đ d Đ

Câu 31. $-2,1$

Câu 32. $6,28$

Câu 33. 495

Câu 34. $6,57$

Câu 35. $7,5$



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 2

1. B	2. B	3. C	4. B	5. C	6. B	7. C	8. D	9. D	10. B
11. B	12. C	13. B	14. A	15. D	16. B	17. B	18. A	19. B	20. C

Câu 21. a Đ b Đ c Đ d Đ

Câu 22. a S b S c Đ d Đ

Câu 23. a S b S c S d S

Câu 24. a Đ b S c S d Đ

Câu 25. a Đ b Đ c S d S

Câu 26. 1

Câu 27. $0,41$

Câu 28. 1

Câu 29. $2,5$

Câu 30. 19



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 3

1. D	2. C	3. B	4. C	5. B	6. B	7. A	8. B	9. D	10. A
11. D	12. C	13. D	14. A	15. B	16. A	17. A	18. D	19. A	20. A

Câu 21. a Đ b S c S d S

Câu 22. a S b Đ c Đ d Đ

Câu 23. a Đ b S c S d Đ

Câu 24. a S b Đ c Đ d S

Câu 25. a S b S c Đ d Đ

Câu 26. $3,97$

Câu 27. $12,6$

Câu 28.
 $169,3$

Câu 29. 180

Câu 30. $0,5$



ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM BÀI 4

1. C	2. D	3. A	4. D	5. B	6. A	7. D	8. D	9. C	10. D
11. D	12. C	13. C	14. A	15. B	16. A	17. A	18. A	19. B	20. B

Câu 21. ☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d S

Câu 22. ☐ a S ☐ b S ☐ c Đ ☐ d Đ

Câu 23. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c S ☐ d Đ

Câu 24. ☐ a S ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ

Câu 25. ☐ a Đ ☐ b Đ ☐ c Đ ☐ d Đ

Câu 26. 0,46

Câu 27.
-0,8

Câu 28. 12,5

Câu 29. 9

Câu 30. 0,87