

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT ĐÀO SƠN TÂY



TÀI LIỆU HỌC TẬP MÔN TOÁN 12
NĂM HỌC 2024 – 2025 (HỌC KÌ I)

Họ và tên:

Lớp:

Tài liệu lưu hành nội bộ

Mục lục

Chương 1.	ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	1
Bài 1.	TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	1
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	2
	1. Bài toán tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước	2
	2. Bài toán tìm m để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên khoảng cho trước	13
	3. Bài toán tìm m để hàm số có cực trị hoặc đạt cực trị tại điểm cho trước	25
Bài 2.	GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	33
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	33
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	34
	1. Bài toán tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathcal{D}$	34
	2. Bài toán max, min có chứa tham số m	46
	3. Bài toán vận dụng, thực tiễn có liên quan đến max min	50
Bài 3.	ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	60
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	60
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	61
	1. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số	61
	2. Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số	66
	3. Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số	70
Bài 4.	KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	76
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	76
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	77
	1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba	77
	2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$	83
	3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$	89
	4. Sự tương giao của hai đồ thị	94
Bài 5.	ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN	99

A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	99
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	100
	1. Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng.....	100
	2. Bài toán tối ưu hoá đơn giản.....	103
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	106
Chương 2.	VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	110
Bài 1.	VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN	110
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	110
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	112
	1. Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc tơ, độ dài véc tơ.....	112
	2. Xác định góc và tích vô hướng của hai véc tơ.....	123
Bài 2.	TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN	132
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	132
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	133
	1. Tọa độ điểm, tọa độ vec tơ.....	133
	2. Tọa độ hóa một số hình không gian.....	139
Bài 3.	BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ	145
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	145
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	146
	1. Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng.....	146
	2. Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng.....	154
Chương 3.	CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	165
Bài 1.	KHOẢNG BIẾN THIÊN, KHOẢNG TƯ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	165
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	165
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	166
	1. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm.....	166
	2. Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.....	169
Bài 2.	PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM	178
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	178
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	179

1. Tính trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm.....	179
2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.....	182

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

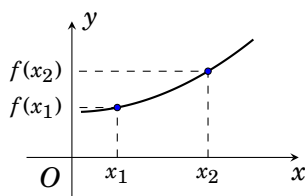
1 Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng).

Ghi nhớ 1

Hàm số đồng biến trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

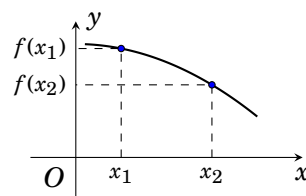


Trên K , đồ thị là một "đường đi lên" khi xét từ trái sang phải.

Ghi nhớ 2

Hàm số nghịch biến trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Trên K , đồ thị là một "đường đi xuống" khi xét từ trái sang phải.

Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

- Nếu $y' \geq 0$, $\forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- Nếu $y' \leq 0$, $\forall x \in (a; b)$ và dấu bằng chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

2 Cực trị của hàm số

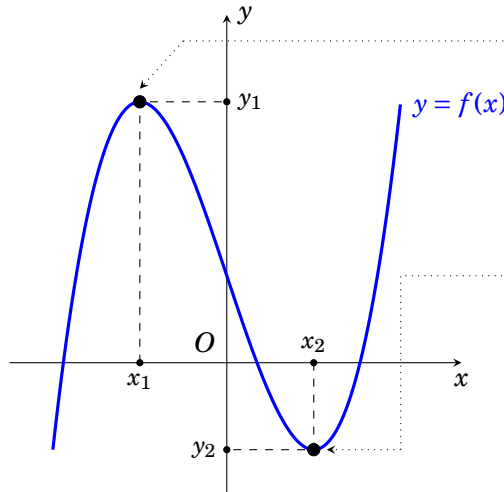
Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

Định lý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Các tên gọi:



$(x_1; y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số;

- x_1 là điểm cực đại của hàm số;
- y_1 là giá trị cực đại của hàm số.

$(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số;

- x_2 là điểm cực tiểu của hàm số;
- y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Bài toán tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = f(x)$.
- ② Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ thuộc $\mathcal{D}$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần, xét dấu y' và lập bảng biến thiên. Từ đây, nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị.

Ghi nhớ cách xét dấu:

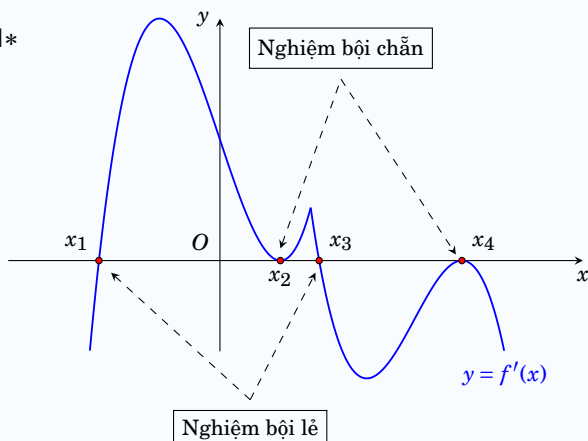
✓ Nếu

$$f'(x) = (x-a)(x-b)^2(x-c)^{2n}(x-d)^{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

thì phương trình $f'(x) = 0$ có

- $x = a$ là nghiệm đơn;
- $x = b$ là nghiệm kép;
- $x = c$ là nghiệm bội chẵn;
- $x = d$ là nghiệm bội lẻ.

✓ Khi xét dấu $f'(x)$ thì $f'(x)$ sẽ không đổi dấu khi qua nghiệm kép (nghiệm bội chẵn) và đổi dấu khi qua nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ).



BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ Bài 1. Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số sau

a) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$;

b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2;$

d) $y = -2x^4 + 4x^2$;

e) $y = x^4 + 4x^3 - 1$;

f) $y = -16x^4 + x - 1$.



Bài 2. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x+1};$

b) $y = \frac{3x+1}{x-1};$

c) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1};$

d) $y = x + \frac{4}{x};$

e) $y = \sqrt{x^2-2x};$

f) $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}.$

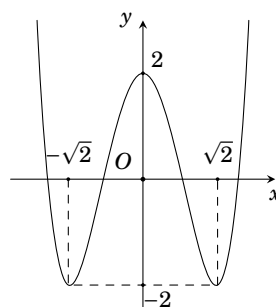
Hỏi thể tích $V(T)$, $0^{\circ}\text{C} \leq T \leq 30^{\circ}\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^{\circ}\text{C} \leq T \leq 30^{\circ}\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

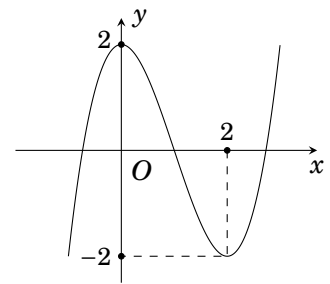
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

D. $(0; \sqrt{2})$.



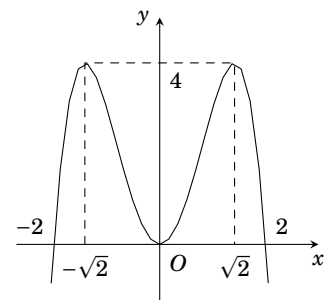
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 .
- C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.



Câu 3. Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = 2$.
- B. $x = 0$.
- C. $x = -2$.
- D. $x = 4$.



Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
- D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			3		0	$+\infty$
	$-\infty$					

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		-4		$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$		$-\infty$		4	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
- B. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2; -4)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x - 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- C. Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Gọi x_1 là điểm cực đại x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

- A. 2.
- B. 1.
- C. -1.
- D. 0.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ bằng

- A. $2\sqrt{5}$.
- B. $2\sqrt{2}$.
- C. 2.
- D. 4.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$.
- B. $(-1; +\infty)$.
- C. $(-3; 8)$.
- D. $(-\infty; -1)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.
 B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
 C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
 D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

Câu 13. Gọi $y_{\text{CD}}, y_{\text{CT}}$ lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Giá trị của biểu thức $y_{\text{CD}}^2 - 2y_{\text{CT}}^2$ bằng

- A. 8. B. 7. C. 9. D. 6.

Câu 14. Tìm điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = (x - 3)e^x$.

A. $x = 3$.

B. $x = 0$.

C. $x = 2$.

D. $x = 1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 15. Cho hàm số $y = x^2 + 4\ln(3 - x)$. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số đã cho.

A. $y_{\text{CD}} = 2$.

B. $y_{\text{CD}} = 4$.

C. $y_{\text{CD}} = 1 + 4\ln 2$.

D. $y_{\text{CD}} = 1$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến.

B. Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.

C. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

.....

.....

.....

.....

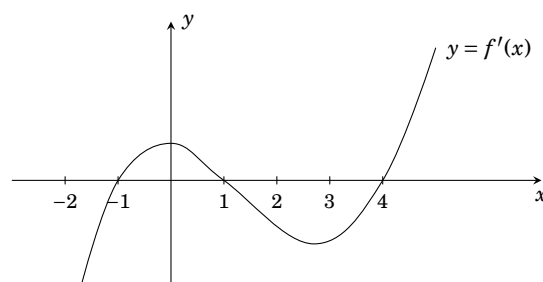
.....

.....

.....

Câu 18. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Biết $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- C. Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực tiểu.
- D. Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực đại.



.....

.....

.....

.....

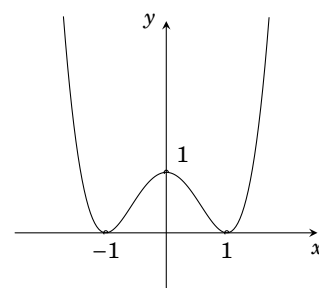
.....

.....

.....

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó nhận xét nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ không có cực trị.
- B. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực tiểu.
- C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một cực đại.
- D. Hàm số $f(x)$ có 3 cực trị.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
 d) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		+	0	-	

Câu 21. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là hai điểm cực trị của (C) .

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
 b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
 c) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $2x + y - 4 = 0$.
 d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ.

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

Câu 23. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

 Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

① Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}.$$

② Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}.$$

Trường hợp hệ số a có chứa tham số, ta kiểm tra thêm trường hợp $a = 0$.

 Xét hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có $y' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$, với $ad-cb \neq 0$ và $c \neq 0$.

① Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' > 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad - cb > 0.$$

② Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \neq -\frac{d}{c} \Leftrightarrow ad - cb < 0.$$

 Xét hàm phân thức $y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ có $y' = \frac{adx^2+2aex+be-dc}{(dx+e)^2}$, với $ad \neq 0$.

① Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \geq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}.$$

② Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d} \Leftrightarrow adx^2 + 2aex + be - dc \leq 0, \forall x \neq -\frac{e}{d}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

 **Bài 1.** Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = x^3 + mx^2 + 2mx + 2$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

b) $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m+1)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 5)$.

d) $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- $y = \frac{mx+2}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.
- $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định
- $y = \frac{mx-8}{x-2m}$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.
- $y = \frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

Bài 3. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = \frac{2x^2 + 3x + m + 1}{x + 1}$ đồng biến trên các khoảng xác định.

b) $y = \frac{x^2 + (m + 1)x - 1}{2 - x}$ (m là tham số) nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 17. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{x+m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $m > -2$.

B. $m < -2$.

C. $m \leq -2$.

D. $m \geq -2$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x+1-m}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \end{cases}$.

B. $-1 < m < 2$.

C. $-1 \leq m \leq 2$.

D. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

A. $[2; +\infty)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; 2]$.

D. $(-\infty; 2)$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \frac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

A. $-2 < m < 2$.

B. $-2 < m < -1$.

C. $-2 \leq m < -1$.

D. $-2 < m \leq -1$.

Câu 6. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+10}{2x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ là

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 9.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + (m^2 + 3)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

D. 0.

Câu 8. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

D. 6.

Câu 9. Cho hàm số $y = (m - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - 2x + 5$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

D. 6.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

A. $-1 < m < \frac{1}{3}$.

B. $m < -1$.

C. $m > \frac{1}{3}$.

D. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m + 1)x^2 + 6m(m + 1)x + 2019$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 2020.

B. 2018.

C. 2021.

D. 2019.

D. $[0; +\infty)$.

D. $m \geq 0$.

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{x^2 - 8x}{x + m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $(-8; 0)$.

B. $(0; 8)$.

C. $[0; 8]$.

D. $[-8; 0]$.

Câu 15. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x + 1 + \frac{m}{x - 2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

A. $(-\infty; 0)$.

B. $[0; 1)$.

C. $[0; +\infty) \setminus \{1\}$.

D. $(-\infty; 0]$.

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = 2^{x^3 - x^2 + mx + 1}$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. $m \leq -8$.

B. $m > -8$.

C. $m \geq -1$.

D. $m < -1$.

D. 4.

d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-\frac{3}{4} \leq m < 0$.

Câu 19. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2+2m)x - 3$, với m là tham số.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -m$ và $x_2 = -m - 2$.
- c) Không tồn tại giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \geq -1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Cho hàm số $y = \frac{x+5}{x+m}$, với m là tham số.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m \geq 5$.
- c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $m < 5$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -8)$ khi và chỉ khi $(5; 8)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



 Tìm m để hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước ($f(x)$ có đạo hàm tại x_0):

- ① Giải điều kiện $y'(x_0) = 0$, tìm m .
- ② Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được và chọn giá trị m nào thỏa yêu cầu.

 Biện luận cực trị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ với $\Delta_{y'} = b^2 - 3ac$

- ① $\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$: Hàm số có hai điểm cực trị
- ② $\Delta_{y'} \leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$: Hàm số không có cực trị.

CHÚ Ý

 Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$ thì $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$.

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
- $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

 Các công thức tính toán thường gặp:

- Độ dài $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$
- Khoảng cách từ M đến Δ : $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, với $\Delta: Ax + By + C = 0$.
- Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \text{hoành} \cdot \text{hoành} + \text{tung} \cdot \text{tung} = 0$.
- Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$, với $\overrightarrow{AB} = (a_1; b_1)$, $\overrightarrow{AC} = (a_2; b_2)$.

 Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = -\frac{2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

 **Bài 1.** Tìm m để hàm số

a) $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

b) $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x$ đạt cực đại tại $x_0 = 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

≡ Bài 2. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số (đồ thị hàm số)

- a) $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m + 2024$ có hai điểm cực trị.
- b) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 2019$ không có cực trị.
- c) $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx + 2019$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -8$.
- d) $y = -x^3 - 3mx^2 + m - 2$ với m là tham số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = 2$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (1-3m)x + 2$ có cực đại và cực tiểu.

- A. $m \leq -5; m \geq 0$. B. $m < -5; m > 0$. C. $-5 < m < 0$. D. $-5 \leq m \leq 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 2$ có cực đại và cực tiểu.

- A. $m > -3$. B. $m \geq 3$. C. $m \geq -3$. D. $m > 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

- A. 2. B. 4. C. 0. D. Vô số.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Giả sử hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}mx$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 0$. Giá trị của m là

A. $m = \frac{4}{3}$.

B. $m = -3$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 12x + m + 2$ có hai cực trị và hai điểm cực trị này nằm về hai phía trục hoành?

A. $m = -2$.

B. $-18 < m < 14$.

C. $\forall m \in \mathbb{R}$.

D. $m \neq 1$.

Câu 8. Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - (m^2 - 4)x + 1$ có hai điểm cực trị nằm ở hai phía của trục Oy là

A. $(-\infty; 2)$.

B. $\mathbb{R} \setminus [-2; 2]$.

C. $(-2; 2)$.

D. $(2; +\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3$. Tìm m để hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 2$.

Câu 10. Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

A. $m = 3$.

B. $m = -3$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Câu 11. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 3$.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = -7$.

D. $m = 5$.

Câu 12. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) có điểm cực tiểu $A(2; -2)$. Khi đó $a + b$ bằng

A. -4 .

B. 4 .

C. 2 .

D. -2 .

Câu 13. Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tích $m_1 \cdot m_2$ bằng

A. 12 .

B. 6 .

C. -15 .

D. -20 .

D. -2.

d) Hàm số có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CP} < x_{CT}$ khi $0 < m < 2$.

Câu 16. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ với m là tham số.

- a) Hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi m .
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ khi $m = 2$.
- c) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng $2\sqrt{5}$.
- d) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn thuộc đường thẳng cố định với hệ số góc $k = -3$.

Câu 17. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$, với m là tham số.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{m\}$.
- b) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ khi $m = \frac{1}{2}$.
- d) Khi đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị có phương trình là $y = 2x - 2m$.

§2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

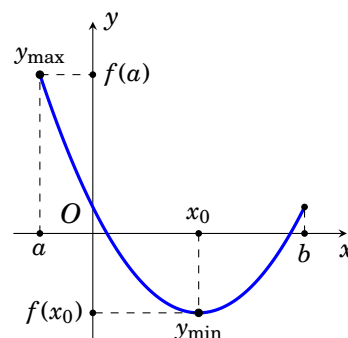
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Ta có

- ① M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$

Kí hiệu $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M$

- ② n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$

Kí hiệu $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n$



CHÚ Ý

- ① Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào, thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.
- ② Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathcal{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$. Từ bảng biến thiên, ta kết luận:

- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
- Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

- ③ Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a; b)$), thì ta có thể giải như sau:

- Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;
- Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
- Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (*)
- Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \quad n = \min_{[a; b]} f(x)$$

- ④ Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min.

- Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm a, b :

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

- Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm a, b, c :

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

- Bất đẳng thức Cô-si cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Bài toán tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathcal{D}$

⚙ Phương pháp giải:

- ① Tính y' . Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in \mathcal{D}$ và tìm các điểm $x_j \in \mathcal{D}$ mà tại đó y' không xác định.
- ② Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\mathcal{D}$.
- ③ Từ bảng biến thiên, kết luận:
 - Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

⚙ **Lưu ý:** Nếu $\mathcal{D}$ là đoạn $[a; b]$ và hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì ta có thể làm như sau:

- ① Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;
- ② Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
- ③ Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (★)
- ④ Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (★) thì

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \quad n = \min_{[a; b]} f(x)$$



✔ Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$.

✔ Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ **Bài 1.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra.

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-3; 1]$. | b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3; 2]$. |
| c) $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$ | d) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$. |
| e) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$; | f) $f(x) = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$. |
| g) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$. | h) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ trên miền xác định. |

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

b) $y = e^{x^3 - 3x + 3}$ trên đoạn $[0; 2]$

c) $y = e^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2; 2]$

d) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^5]$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $f(x) = \frac{5\sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

b) $y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x$ trên miền xác định.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau.

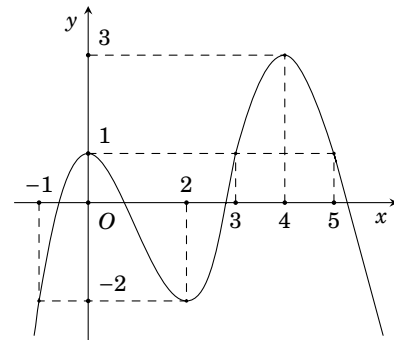
Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $M = f(0)$. B. $M = f(-1)$.
C. $M = f(3)$. D. $M = f(2)$.

x	-1	0	2	3
y'	+	0	-	0
y	0	5	1	4

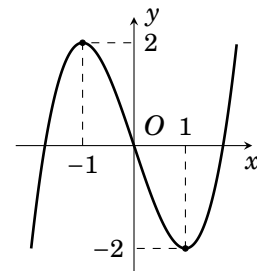
Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 5]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A. 5. B. 6. C. 3. D. 1.



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$.
C. $m = 1$. D. $m = -1$.



Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-2; 3]$ như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+	
$f(x)$		0	1	-2	5	

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của biểu thức $M - m$ là

- A. 5. B. 7. C. -1. D. 3.

Câu 5. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-2; 3]$ lần lượt là

A. 17, -15.

B. 10, -26.

C. -15, 17.

D. 6, -26.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 6. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-4; 4]$. Tính tổng $M + m$.

A. 12.

B. 98.

C. 17.

D. 73.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. 33.

B. 37.

C. 12.

D. 1.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng

A. 57.

B. 56.

C. 54.

D. 55.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là

A. $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$.

B. $\min_{[0;3]} y = -3$.

C. $\min_{[0;3]} y = 1$.

D. $\min_{[0;3]} y = -1$.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$ là

A. 2.

B. $\frac{7}{5}$.

C. 3.

D. $\frac{11}{5}$.

Câu 11. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ bằng

A. 4.

B. -3.

C. $-\frac{7}{2}$.

D. $-\frac{13}{3}$.

Câu 12. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ là

A. $M = -2$.

B. $M = 2$.

C. $M = 4$.

D. $M = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

A. $M = 4$.

B. $M = \sqrt{7}$.

C. $M = 7$.

D. $M = 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

A. $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$.

B. $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$.

C. $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e$.

D. $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = \frac{1}{2} + \ln 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1 - x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tính $M - N$.

A. $M - N = 4\ln 2$.

B. $M - N = -1$.

C. $M - N = 4\ln 2 - 1$.

D. $M - N = 4\ln 3 - 4$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

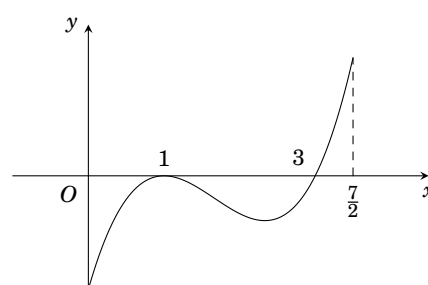
.....

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = e^{3x^2-2x^3} - f(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

- A. $e - f(1)$. B. $f(1)$. C. $f(0)$. D. $1 - f(0)$.

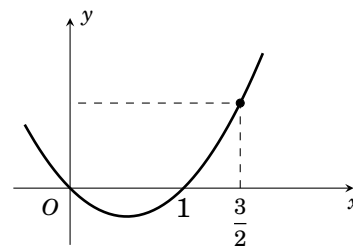
Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

- A. $x_0 = 3$. B. $x_0 = 2$. C. $x_0 = 1$. D. $x_0 = 0$.



Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = \frac{1}{2}$.
C. $x = 1$. D. $x = 0$.



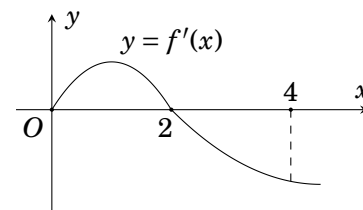
Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m , giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là

A. $m = f(4), M = f(1)$.

B. $m = f(4), M = f(2)$.

C. $m = f(1), M = f(2)$.

D. $m = f(0), M = f(2)$.



Câu 20. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 3\sin^2 x + 2$ lần lượt là M, m . Tổng $M + m$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 2019$ là

A. 2017.

B. 2020.

C. 2018.

D. 2019.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		3		4	
	$-\infty$							$-\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Cực đại của hàm số là 4.

c) $\max_{\mathbb{R}} y = 4$.

b) Cực tiểu của hàm số là 3.

d) $\min_{\mathbb{R}} y = 3$.

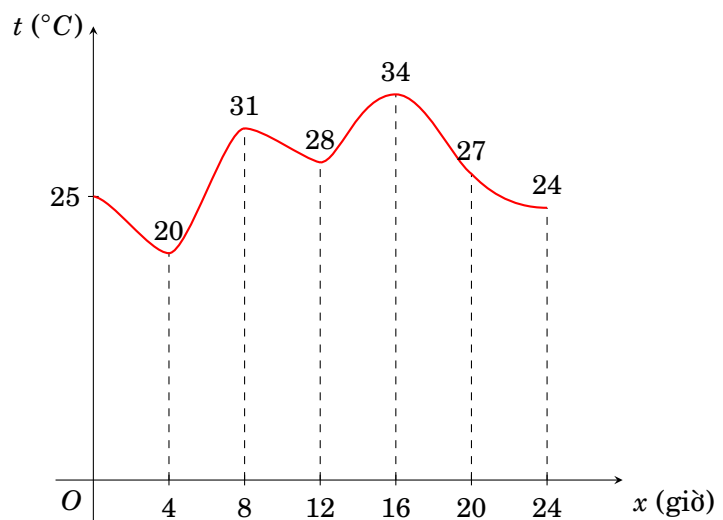
Câu 23. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C .

b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C .

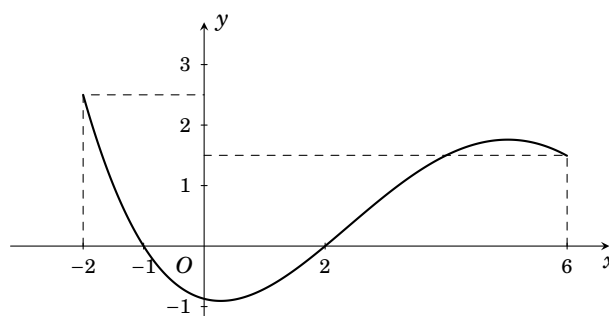
c) Thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.

d) Thời điểm có nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.



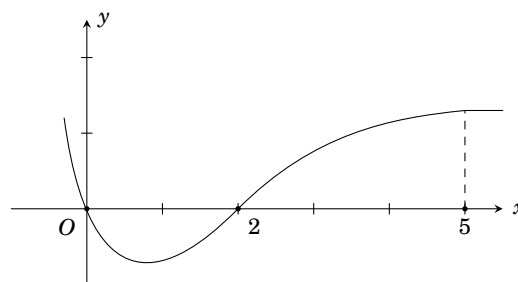
Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$.
b) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$.
c) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$.
d) $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max\{f(-1), f(6)\}$.



Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
c) $\min_{[0; 5]} f(x) = f(0)$ và $\max_{[0; 5]} f(x) = f(5)$.
d) $\min_{[0; 5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0; 5]} f(x) = f(5)$.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để

a) giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ trên $[-1; 1]$ bằng 0.

b) giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+5m}{x-3}$ trên $[1; 2]$ bằng 4.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ thỏa mãn $\min_{[0;5]} f(x) = 5$. Khi đó giá trị của m bằng

A. 10.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Câu 2. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2(m - 10)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng -5 .

A. $m = \frac{15}{2}$.

B. $m = -15$.

C. $m = 8$.

D. $m = -8$.

Câu 3. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$.

D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Câu 4. Hàm số $y = \frac{x - m}{x + 2}$ thỏa mãn $\min_{x \in [0; 3]} y + \max_{x \in [0; 3]} y = \frac{7}{6}$. Hỏi giá trị m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(2; +\infty)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(-1; 0)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 4$. B. $m \leq 0$. C. $0 < m \leq 2$. D. $2 < m \leq 4$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} f(x) = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $1 \leq m < 3$. B. $m < -1$. C. $3 < m \leq 4$. D. $m > 4$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Gọi S là tổng giá trị của m để hàm số $f(x) = \frac{x-m^2-m}{x+1}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[0;1]$ bằng -2 . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $S = -1$. B. $S = 1$. C. $S = -2$. D. $S = -3$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 - m^2x + 2$ với tham số $m > 0$. Biết $\min_{[-m;m]} f(x) = \frac{14}{27}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $m \in (-\infty; -3)$.

B. $m \in (3; +\infty)$.

C. $m \in (1; 3)$.

D. $m \in (-3; -1)$.

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + (m^2 - m + 1)x + m^3 - 4m^2 + m + 2025$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 2019?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 10. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S .

A. 0.

B. 6.

C. -5.

D. 3.

Bài toán chuyển động:

- Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc;
- Khi đó $s'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$.

Bài toán thực tế – tối ưu:

- Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$.
- Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện của hàm và suy ra kết quả.

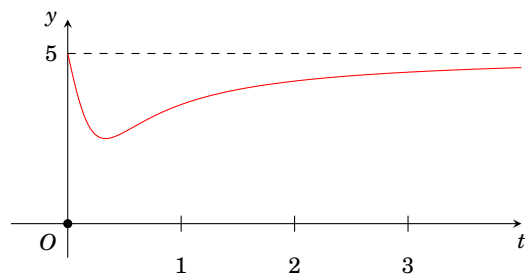
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 5. Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 24t^2 + 500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (s) đến $t = 5$ (s) chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?

Bài 6.

Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên)

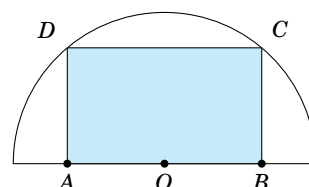
$$y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}.$$



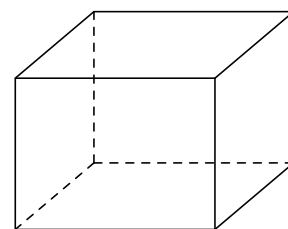
Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

Bài 7.

Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6$ cm nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.

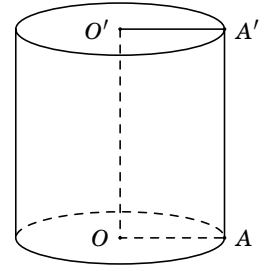
**Bài 8.**

Một người muốn xây một cái bể chứa nước, dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 dm^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu người đó biết xác định các kích thước của bể hợp lí thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi người đó trả chi phí thấp nhất để thuê nhân công xây dựng bể đó là bao nhiêu?



Bài 9.

Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

A. $t = 3 \text{ s.}$

B. $t = 4 \text{ s.}$

C. $t = 2 \text{ s.}$

D. $t = 6 \text{ s.}$

A. 13 m/s. **B.** 10 m/s. **C.** 9 m/s. **D.** 12 m/s.

A. 24 mg. **B.** 20 mg. **C.** 15 mg. **D.** 10 mg.

$$N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2} (con).$$

A. 1008 con. **B.** 1012 con. **C.** 1005 con. **D.** 1020 con.

Câu 5. Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 25 cm^2 .

B. $\frac{125}{4} \text{ cm}^2$.

C. $\frac{625}{4} \text{ cm}^2$.

D. 125 cm^2 .

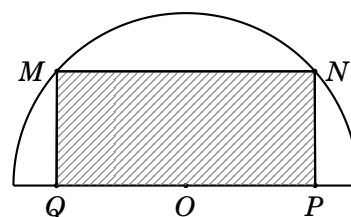
Câu 6. Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

A. $\frac{9}{2}$.

B. $6\sqrt{2}$.

C. 9.

D. $9\sqrt{2}$.



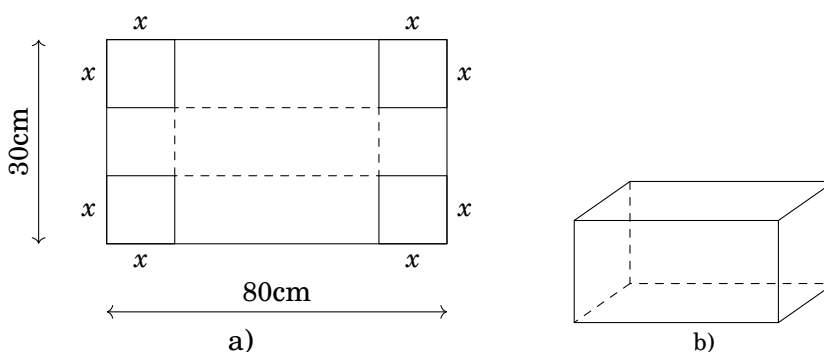
A. 3 m. **B.** 4 m. **C.** 5 m. **D.** 2 m.

A. $1,01\text{m}^3$. **B.** $1,17\text{m}^3$. **C.** $1,51\text{m}^3$. **D.** $1,40\text{m}^3$.

Câu 9. Người ta muốn xây một chiếc bể nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$. Biết đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 700.000 đồng/m^2 . Để chi phí thuê nhân công ít nhất thì chi phí thuê nhân công là

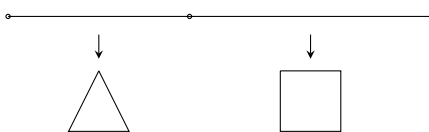
- A.** 120 triệu đồng. **B.** 105 triệu đồng. **C.** 115 triệu đồng. **D.** 110 triệu đồng.

Câu 10. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x (cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



- A.** $x = \frac{20}{3}$ cm. **B.** $x = \frac{20}{7}$ cm. **C.** $x = \frac{25}{3}$ cm. **D.** $x = \frac{25}{7}$ cm.

Câu 11. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



A. $\frac{12}{4 + \sqrt{3}}$ m.

B. $\frac{18\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ m.

C. $\frac{36\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ m.

D. $\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}$ m.

Câu 12. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

A. 30 triệu đồng.

B. 30,5 triệu đồng.

C. 29,5 triệu đồng.

D. 32 triệu đồng.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5.$$

Goi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$.

- a) Lượng xăng trong bình ban đầu là 1 lít.
b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.
c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$.
d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Câu 14. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100 m^3 sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm trong một ngày và $\bar{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

- a) $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \leq x \leq 100$.
b) Tổng chi phí khi sản xuất 100 m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng.
c) $\overline{C} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2$ với $0 < x \leq 100$.
d) $\overline{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn 3 chữ số thập phân).

Câu 15. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hàng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
- c) Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B là $-0,001x^3 + 15x - 100$.
- d) A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

§3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ



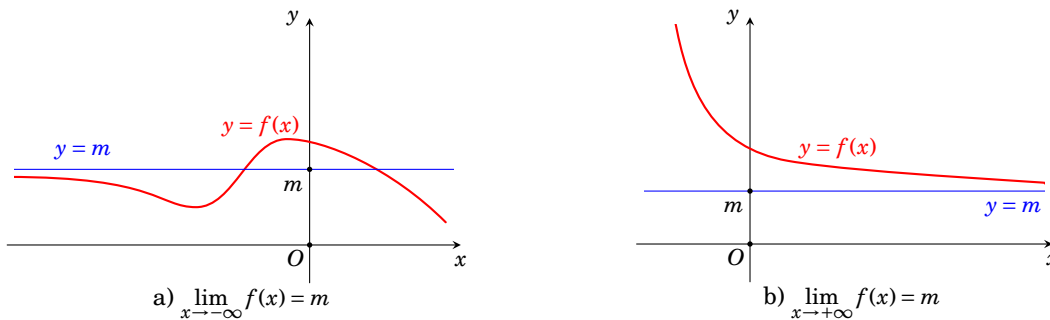
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường tiệm cận ngang (TCN):

Định nghĩa: Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới



Các bước tìm TCN:

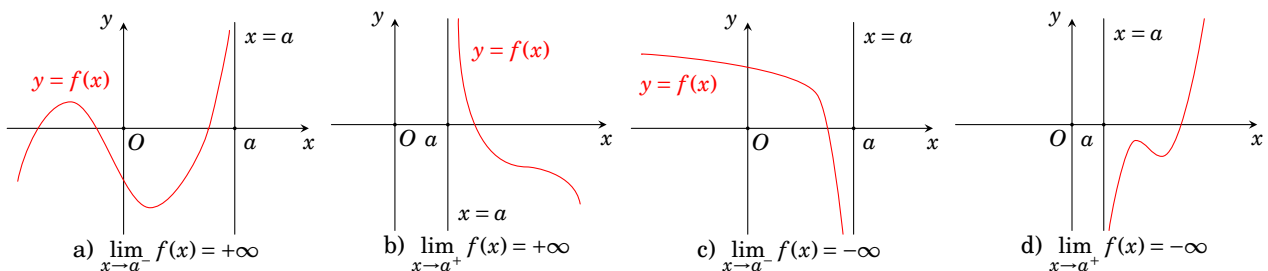
- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

2 Đường tiệm cận đứng (TCD)

Định nghĩa: Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới.



Các bước tìm TCD:

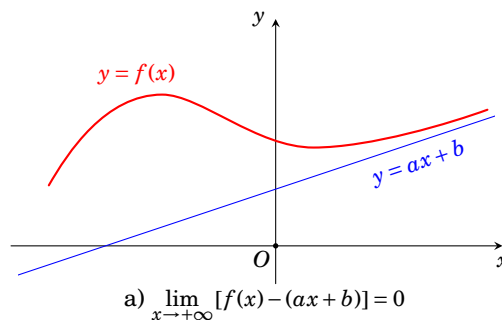
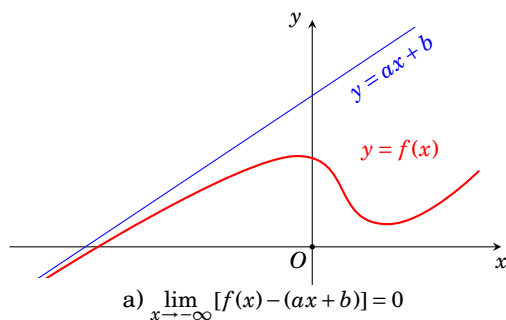
- Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

3 Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới:



Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

✓ **Các bước tìm tiệm cận đứng:**

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

✓ **Các bước tìm tiệm cận ngang:**

- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

✓ **Lưu ý:** Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+1}$;

b) $y = \frac{2x-3}{1-2x}$;

c) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$;

d) $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x+2}$ là

- A.** $y = 2$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -2$. **D.** $y = -2$.

Câu 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

A. $y = -2$.

B. $x = -2$.

C. $y = 2$.

D. $x = 1$.

Câu 3. Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{1-3x}{2+x}$.

B. $y = \frac{x^2+3x+2}{x-2}$.

C. $y = \frac{1+3x}{1+x}$.

D. $y = \frac{3x^2+2}{2-x}$.

Câu 4. Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?

A. $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$.

B. $y = \frac{1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2}{x+2}$.

D. $y = \frac{5x}{2-x}$.

Câu 5. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $y = 3$.

D. $y = -\frac{1}{2}$.

Câu 6. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

A. $x = -1$.

B. $y = 1; y = -5$.

C. $x = 1; x = -5$.

D. $x = \pm 5$.

Câu 7. Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .
B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C) .
C. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C) .
D. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C) .

Câu 10. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.



Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	+	
y	-2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1	$+\infty$ ↗ 1	$+\infty$ ↗ $-\infty$	-2 ↗ $-\infty$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

- A. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
D. Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		+ 0 -	
y	$+\infty$ ↘ -1	$+\infty$ ↗ 2	2 ↘ $-\infty$	$-\infty$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$-\infty$ ↗ 2	1 ↘ 0

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $f(-5) < f(4)$.
b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.
d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 2	$+\infty$ ↗ $+\infty$	

- a)** Hàm số không có cực trị.
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$.
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.
d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục toạ độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

Bài toán tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

① Nếu $\alpha = 0$ thì tiêm cân xiên chính là tiêm cân ngang.

② Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$, ta có thể chia đa thức, biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

BÀI TẬP TƯ LUÂN

≡ Bài 2. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4};$$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2};$

c) $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1}$ có phương trình là

- A.** $y = x + 1$. **B.** $y = 2x - 1$. **C.** $y = x - 1$. **D.** $y = 2x + 1$.

Câu 2. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$ có phương trình là

A. $y = 2x + 1$.

B. $y = x - 3$.

C. $y = x + 3$.

D. $y = 2x - 1$.

Câu 3. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

A. $y = 2x - 5$.

B. $y = x - 2$.

C. $y = x + 5$.

D. $y = x - 5$.

Câu 4. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$ là

A. $y = -2$.

B. $y = 1$.

C. $y = x + 2$.

D. $y = x$.

Câu 5. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

A. $y = x + 1$.

B. $y = -3x + 1$.

C. $y = x - 2$.

D. $y = x - 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. (5;3).

B. (-4;-5).

C. (6;-1).

D. (2;-10).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ là

A. (1;2).

B. (1;1).

C. (1;-1).

D. (1;0).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

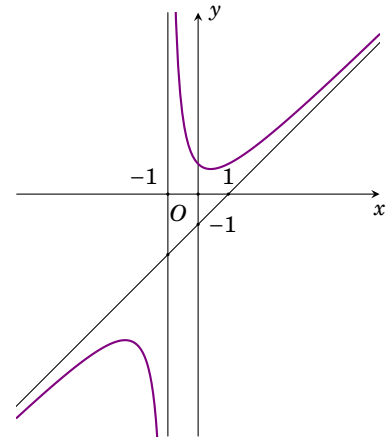
.....

.....

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

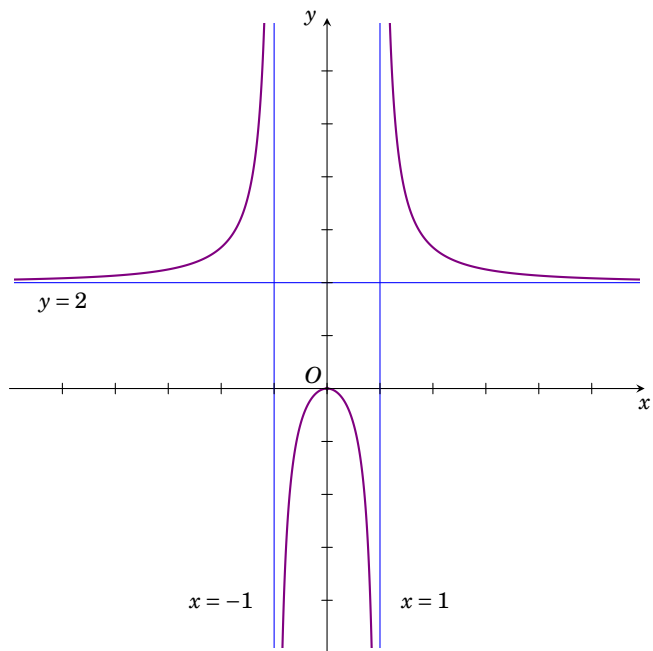
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ có đồ thị như hình bên.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số có hai điểm cực trị.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 0$.
- d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.



Câu 9. Cho đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- c) Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận đứng $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.
- d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y = 2$ và $y = 0$.



DT

3

Bài toán về đường tiệm cận có chứa tham số

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 3. Tìm tham số m để đồ thị hàm số

a) $y = \frac{3x - 1}{x - m}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 5$.

b) $y = \frac{(m + 1)x - 5m}{2x - m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Bài 4. Tìm m để đồ thị hàm số

a) $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

b) $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đường tiệm cận xiên.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{x-5}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;3)$.

A. $m = -3$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.

Câu 2. Tìm tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+3}{x-m}$ có tiệm cận đứng là đường $x = 1$, tiệm cận ngang là đường $y = 1$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.

Câu 3. Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m là

A. $m = \pm 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 2$.

D. $m = \pm 1$.

Câu 4. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-5x+m}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$.

B. $m \neq 0$.

C. $m \neq 2$.

D. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x^2-mx+4}$ có hai đường tiệm cận đứng?

A. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

B. $m \neq 5$.

C. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$.

D. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng.

A. $m = 0$ hoặc $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

D. $-2 < m < 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$, xác định a và b để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

A. $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+3n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính $m+n$.

A. $m+n = -\frac{1}{3}$

B. $m+n = \frac{1}{3}$

C. $m+n = \frac{2}{3}$

D. $m+n = 0$

Câu 10. Đồ thị hàm số $y = \frac{(4a-b)x^2+ax+1}{x^2+ax+b-12}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Tính giá trị của $a+b$.

A. $a+b = 10$

B. $a+b = 12$

C. $a+b = 18$

D. $a+b = 15$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$, với m là tham số.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m > 0$.
c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m \neq 0$.
d) Tập hợp tất cả giá trị của m để đồ thị có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{7}{2} \right\}$.

§4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ



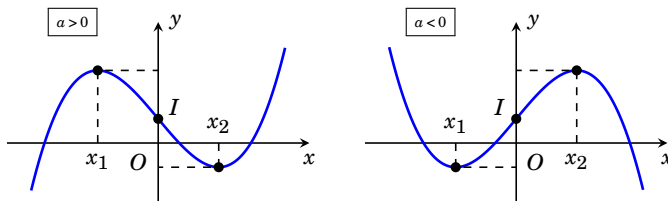
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$

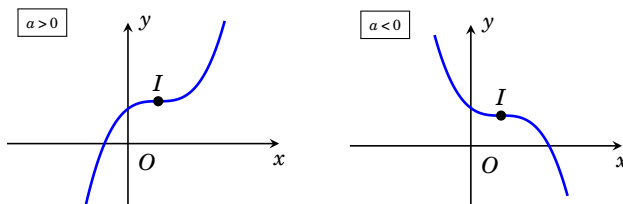
- ✓ **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- ✓ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm mà tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✓ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

2 Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

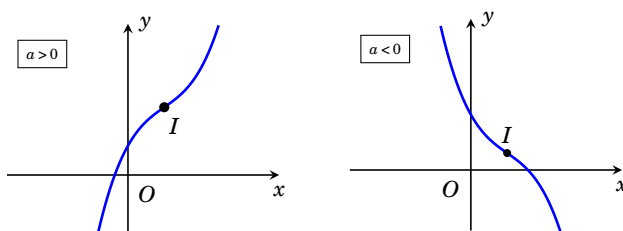
- ✓ **TH1.** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



- ✓ **TH2.** $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 . Khi đó, hàm số không có cực trị.



- ✓ **TH3.** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



GHI NHỚ

- ① Hàm số không có điểm cực trị

$$b^2 - 3ac \leq 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

- ② Hàm số có hai điểm cực trị

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$

- ③ Liên hệ tổng tích hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

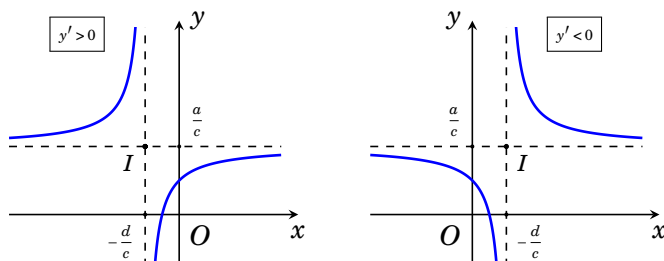
- ④ Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị, nó chính là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoành độ tâm đối xứng là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$. ⑤ Tiếp tuyến tại tâm đối xứng sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a > 0$ và lớn nhất nếu $a < 0$.

3 Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)

✓ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

✓ Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

✓ Hình dạng đồ thị:



GHI NHỚ

- ① Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.
- ② Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- ③ Giao với Ox : $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.
- ④ Giao với Oy : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$.

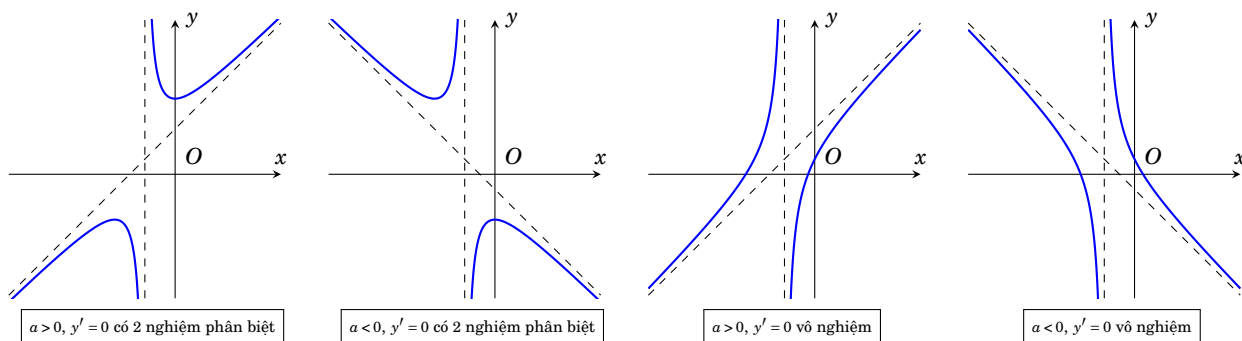
4 Hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

✓ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx+n)^2}$.

✓ Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.

✓ Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.

✓ Hình dạng đồ thị:



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc ba

Ta khảo sát theo sơ đồ đã nhắc đến ở phần lý thuyết.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ **Bài 1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$;

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 - 2x^2 + 5$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 5$.
C. $y = -x^3 - 3x + 5$. D. $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$

Câu 2. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 3x^2$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
C. $y = x^4 + 2x^2 + 1$. D. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		-	0	+
y	$+\infty$	1	5	$-\infty$

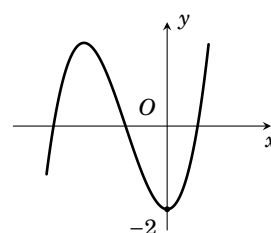
Câu 3. Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$. B. $y = x^3 - 3x + 4$.
C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. D. $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
y'		+	0	+
y	$-\infty$	2	$+\infty$	

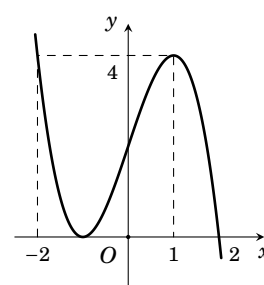
Câu 4. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + x^2 - 2$. B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
C. $y = x^3 - 3x + 2$. D. $y = x^2 - 3x - 2$.



Câu 5. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = x^3 + 3x - 2$. B. $y = x^3 - 3x + 2$.
C. $y = -x^3 + 3x + 2$. D. $y = -x^3 - 3x - 2$.



Câu 6. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây.

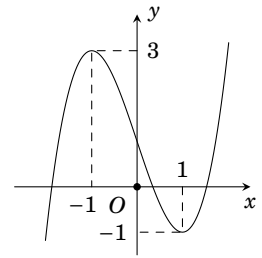
Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

B. $y = -x^2 - 3x - 1$.

C. $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.



Câu 7. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây.

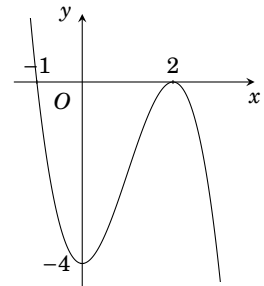
Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 3x^2 - 4$.

B. $y = -x^3 - 4$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.



Câu 8. Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi

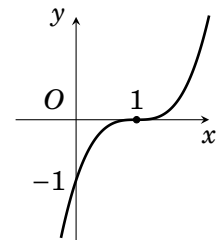
đó là hàm số nào?

A. $y = x^3 - 1$.

B. $y = (x+1)^3$.

C. $y = (x-1)^3$.

D. $y = x^3 + 1$.



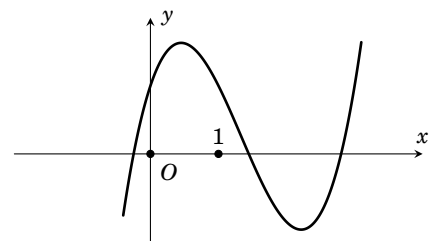
Câu 9. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



Câu 10. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

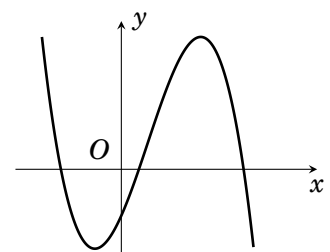
Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



Câu 11. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

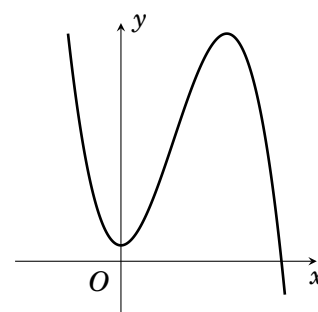
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



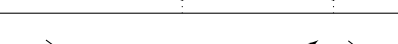
Câu 12. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên. Trong các hệ số a, b, c và d có bao nhiêu số âm?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0	$+$ 0	$-$
$f(x)$				

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

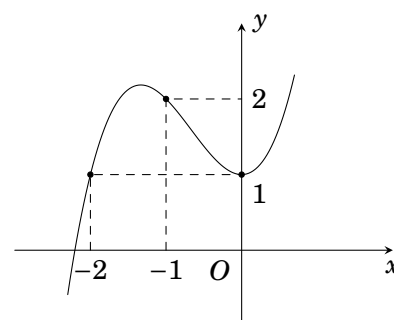
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

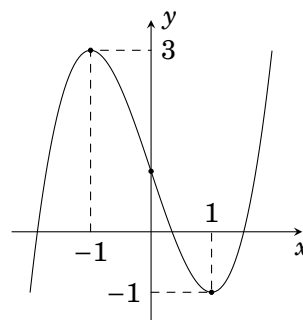
d) $2a + 3b + c = 9$.



Câu 14. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

Tính tổng $T =$.

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.
- Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.
- $a - b + c + d = -1$.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$.



Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

- Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.
- Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.
- Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		4		$-\infty$
		0			

DT**2****Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Ta khảo sát theo sơ đồ

✔ **Bước 1.** Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

✔ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

✔ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ **Bài 2.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x-1}{x+1};$

b) $y = \frac{2x+1}{x-1};$

c) $y = \frac{5+x}{2-x}.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

A. $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

B. $y = \frac{4x - 6}{x + 2}$.

C. $y = \frac{x+3}{2-x}$.

D. $y = \frac{x-2}{x+5}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$1 \searrow$ $-\infty$		$+\infty \searrow$ 1

Câu 2. Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

A. $y = \frac{x-1}{x-3}$.

B. $y = \frac{x-1}{-x-3}$.

C. $y = \frac{x+5}{-x+3}$.

D. $y = \frac{1}{x-3}$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	$-1 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow -1$

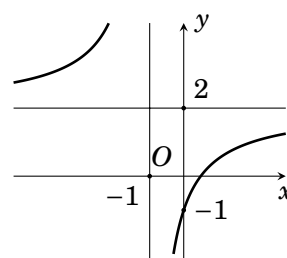
Câu 3. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{1-2x}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.



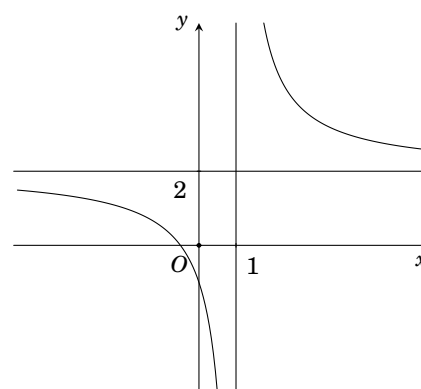
Câu 4. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

B. $y = x+2$.

C. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

D. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.



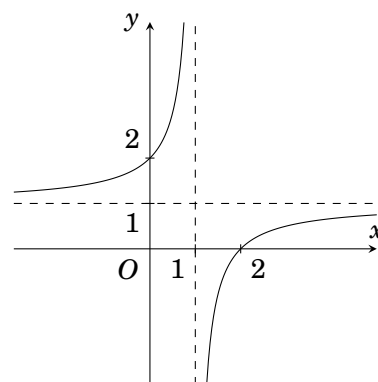
Câu 5. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x+2}{x-2}$.

C. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

D. $y = \frac{x+2}{x-1}$.



Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

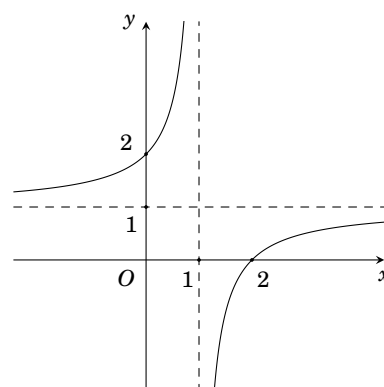
Giá trị của biểu thức $2a + b - 3c$ bằng

A. -3.

B. 4.

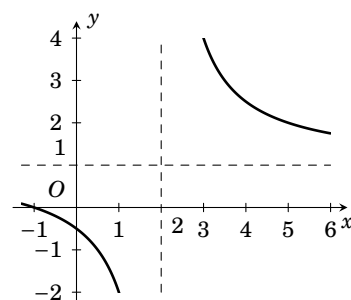
C. 7.

D. -5.



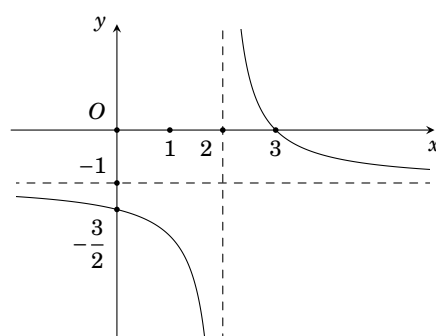
Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$

- A. $T = 2$. B. $T = 0$.
C. $T = -1$. D. $T = 3$.



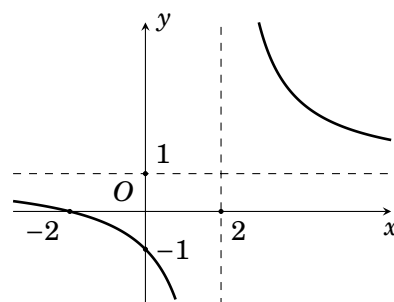
Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{cx+2}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

- A. -3. B. 5. C. -4. D. 3.



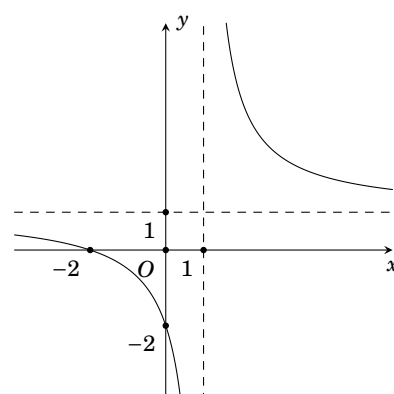
Câu 9. Hãy xác định a, b để hàm số $y = \frac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?

- A. $a = 1; b = -2$. B. $a = b = 2$.
C. $a = -1; b = -2$. D. $a = b = -2$.



Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

- A. $a < 0, b < 0$. B. $0 < b < a$.
C. $b < 0 < a$. D. $a < b < 0$.



Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{ax+4}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau. Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	3	$+\infty$	3

.....

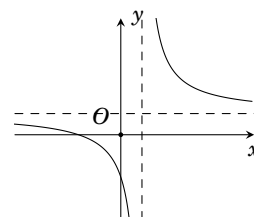
.....

.....

.....

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b < 0, c < 0, d < 0$. B. $b > 0, c < 0, d < 0$.
C. $b < 0, c > 0, d < 0$. D. $b > 0, c > 0, d < 0$.



.....

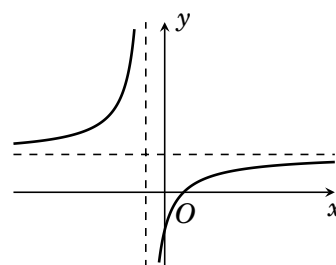
.....

.....

.....

Câu 13. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $ab > 0, bd < 0$. B. $ab < 0, ad > 0$.
C. $ab < 0, ad < 0$. D. $bd > 0, ad > 0$.



.....

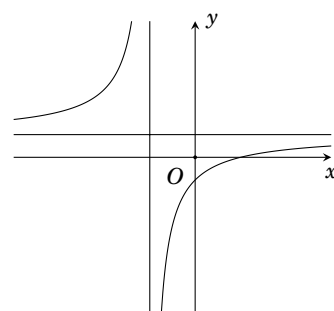
.....

.....

.....

Câu 14. Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $ac \neq 0, ad - cb \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $ad > 0$ và $ab < 0$. B. $bd < 0$ và $ab > 0$.
C. $ad < 0$ và $ab < 0$. D. $ad > 0$ và $bd > 0$.



.....

.....

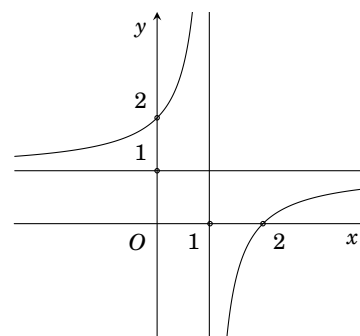
.....

.....

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.
- c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- d) $a - 3b - 2c = -3$.



.....

.....

.....

.....

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau.

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty, \frac{1}{2})$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$.
- c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.
- d) $\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $\frac{1}{2}$	

.....

.....

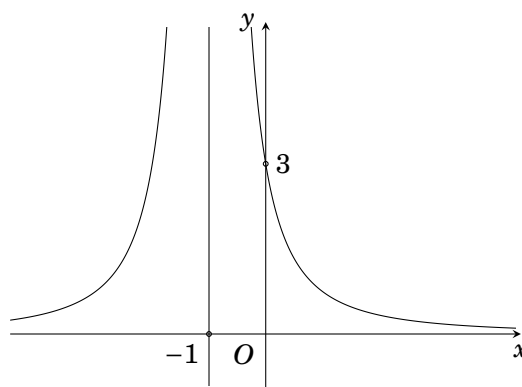
.....

.....



Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8.

- $f'(0) = 3$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.
- Giá trị của $f(2)$ bằng 4.

**DT****3**

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

✓ **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.

✓ **Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

- Tính đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c = 0$, tìm nghiệm.
- Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
- Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.

✓ **Bước 3.** Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1};$

b) $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1};$

c) $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}.$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

B. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$.

C. $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$.

D. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$.

x	$-\infty$	-10	-4	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$		0	
		$\searrow$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\searrow$
			24		$-\infty$	$-\infty$

Câu 2. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$. B. $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$.
 C. $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$. D. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$.

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
y'	-	0	+	+	0	-
y	$+\infty$		$+\infty$	-9		$-\infty$

Câu 3. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$. B. $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$.
 C. $y = \frac{x^2 - x + 2}{-x - 4}$. D. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

x	$-\infty$	-9	-4	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y			-20		$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$				0	

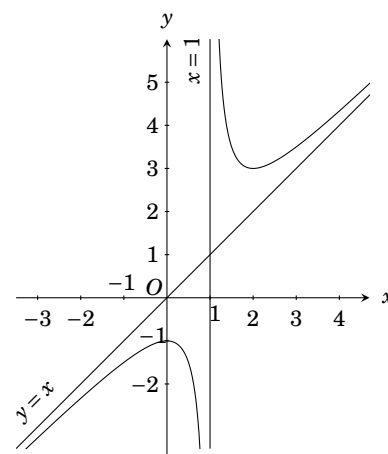
Câu 4. Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$. B. $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$.
 C. $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$. D. $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+	+	+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Câu 5. Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

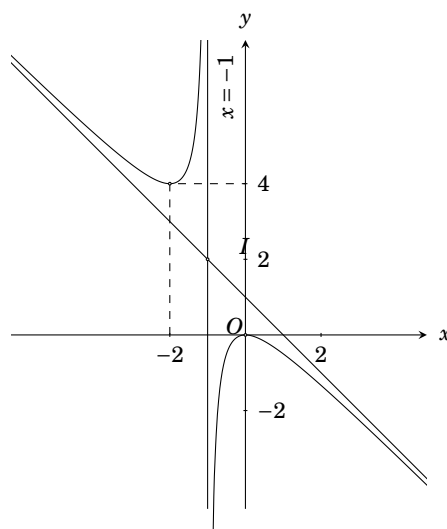
A. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. B. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
 C. $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{-x + 1}$. D. $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{-x + 1}$.



Câu 6. Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$.
C. $y = \frac{x^2 + 1x + 2}{x + 1}$.

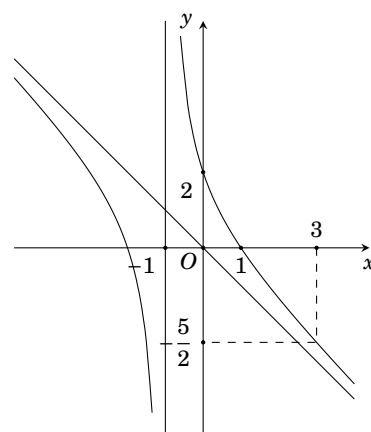
B. $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.
D. $y = \frac{-x^2}{x + 1}$.



Câu 7. Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$.
C. $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.

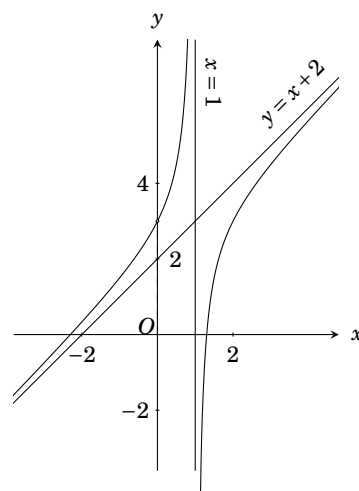
B. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$.
D. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$.



Câu 8. Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.
C. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{-x + 1}$.

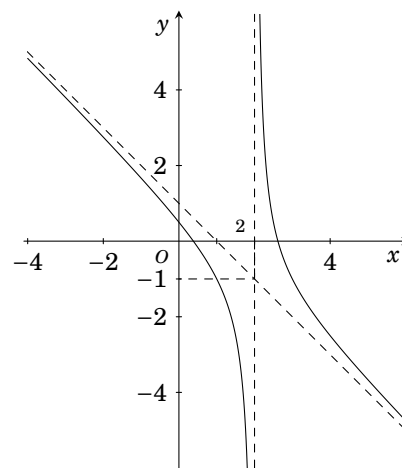
B. $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$.
D. $y = \frac{x^2 + 3}{-x + 1}$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như hình bên.

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- Điểm $I(2; 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.
- Hệ số a và m trái dấu.



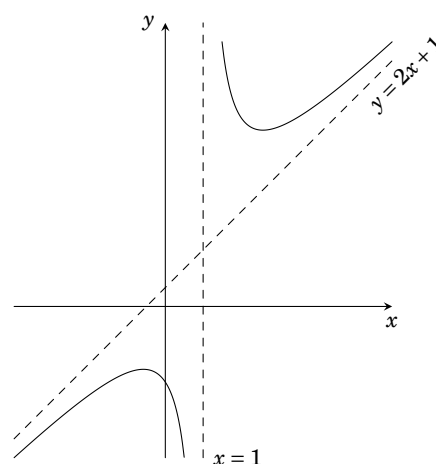
.....

.....

.....

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + n}$ có đồ thị như hình bên.

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Điểm $I(1; 2)$ là tâm đối xứng của đồ thị.
- $a + 2b = 4$.
- Đồ thị qua điểm $(2; 10)$ khi $c = 4$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

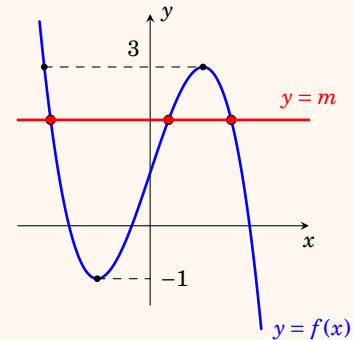
✓ **Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$:**

- ① Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$, tìm các nghiệm $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- ② Với x_0 vừa tìm, thay vào một trong hai hàm số ban đầu để tìm y_0 .
- ③ Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

✓ **Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình:**

- (a) Xét phương trình $f(x) = m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).
- (b) Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x) = m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
- Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo hướng "lên, xuống". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ **Bài 4.** Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ và $y = 1 - 2x$;

b) $y = \frac{x+8}{x-2}$ và $y = x + 2$.

Bài 5. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Bài 6. Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 2 - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

A. -3.

B. 2.

C. 0.

D. -1.

Câu 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 3. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .

A. $AB = 3$.

B. $AB = 2\sqrt{2}$.

C. $AB = 2$.

D. $AB = 1$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B . Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 5. Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm hoành độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $\frac{2}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 4.

Câu 6. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN .

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = -2$.

D. $x = 2$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d: y = x$ với đồ thị (C) . Tính độ dài đoạn AB .

A. $AB = \sqrt{2}$.

B. $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $AB = 1$.

D. $AB = 2$.

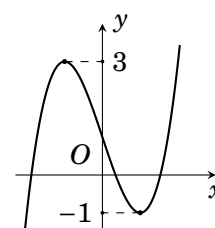
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.



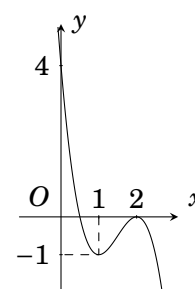
Câu 9. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($d \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.



Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành là

- A. 1. B. 0.
C. 2. D. 3.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $2|f(x)| = 7$ bằng

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 2.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2 nghiệm. B. 4 nghiệm.
C. 3 nghiệm. D. 1 nghiệm.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$	2 	$-\infty$	$+\infty$  3 	$+\infty$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

- A. 2. B. 3.
C. 6. D. 0.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- A. $-3 \leq m \leq 3$. B. $-2 \leq m \leq 4$.
C. $-2 < m < 4$. D. $-3 < m < 3$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 2. B. 6. C. 0. D. 4.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

§5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lí, hoá học, sinh học và kinh tế:

- Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2 Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- ✓ **Bước 1.** Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- ✓ **Bước 2.** Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở **Bước 1** theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- ✓ **Bước 3.** Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

- Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

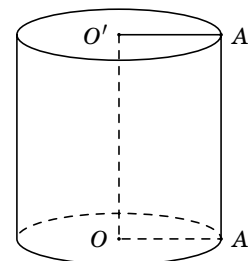


được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 K t}{a K t + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

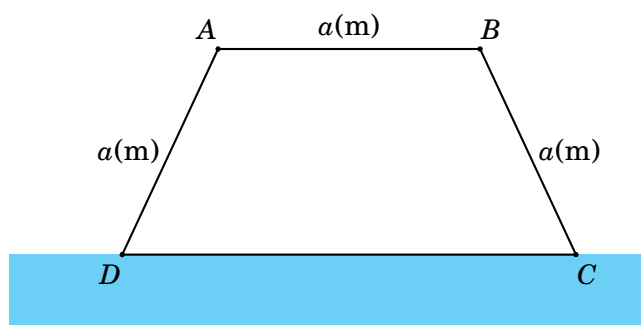
Bài 3. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Bài 4. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

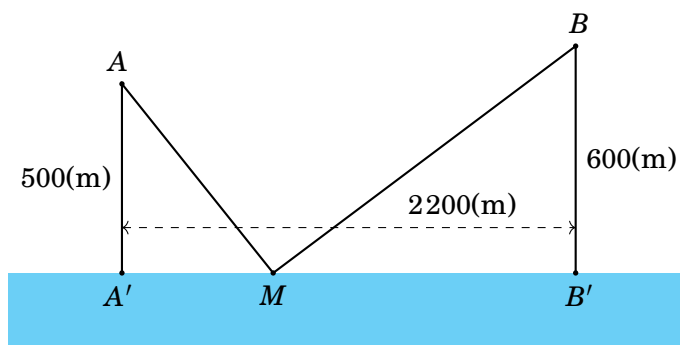
- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.



Bài 6. Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như *Hình 36* (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



Hình 36



Hình 37

(Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-1*, Cornelsen 2016).

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).
- Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $(0 \leq t \leq 50)$. Xác định hàm số $v(t)$.
- Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?
- Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?
- Tìm thời điểm t ($0 \leq t \leq 50$) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?



2. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100 - x} \text{ (triệu đồng)}, 0 \leq x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

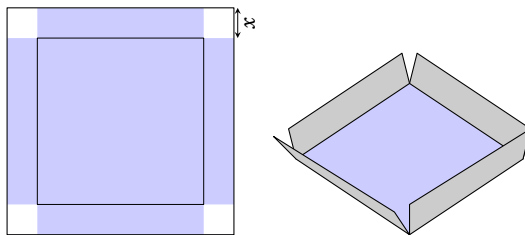
- a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

3. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

4. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình bên dưới).



Ban Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

- a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.
- b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.
Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

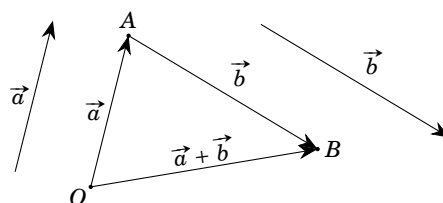


LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tổng của hai véc tơ

⚙ Định nghĩa:

Trong không gian, cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\vec{OB}$ là **tổng của hai véc tơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} + \vec{b}$. Phép lấy tổng của hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **phép cộng véc tơ**.



⚙ Các quy tắc cần nhớ:

- ① Quy tắc ba điểm: Với ba điểm A, B, C , ta có

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

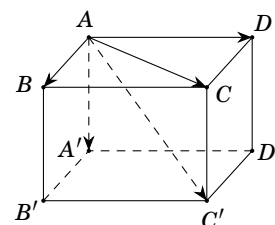
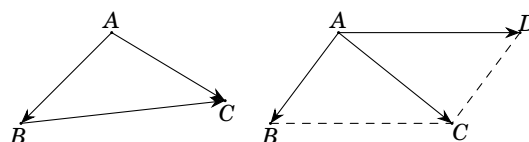
- ② Quy tắc hình bình hành: Cho $ABCD$ là hình bình hành, ta có

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$

- ③ Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$$

⚠ Hệ thức tương tự: $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$.



⚙ Tính chất:

- ① Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- ② Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- ③ Với mọi véc tơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- ④ Tổng của ba véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

2 Hiệu của hai véc tơ

⚙ Vectơ đối:

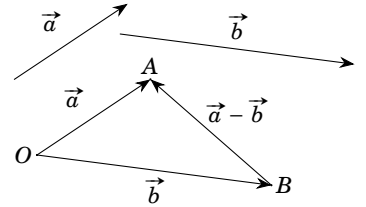
- ① Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$.
- ② Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ).
- ③ Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

⚙ **Định nghĩa hiệu của hai vectơ:** Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là **hiệu của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là **phép trừ vectơ**.

⚙ Các quy tắc cần nhớ:

- ① Với ba điểm A, B, C ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
- ② Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.



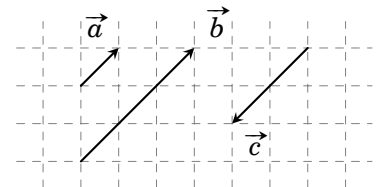
3 Tích của một số với một véc-tơ

⚙ **Định nghĩa:** Cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của một số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

⚠ $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ và $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

Ví dụ: Theo hình vẽ bên, thì $\vec{b} = 3\vec{a}$; $\vec{c} = -2\vec{a}$; $\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{b}$.



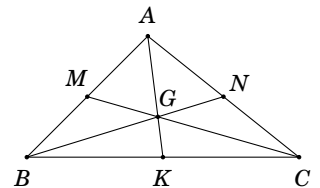
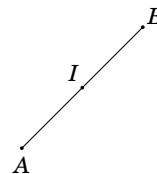
⚙ Hệ thức trung điểm, trọng tâm:

① I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì

- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;...

② G là trọng tâm của tam giác ABC thì

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
- $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GK}$;...



⚙ Nhận xét:

① Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k , ta luôn có

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
- $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ k = 0 \end{cases}$.

② Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

③ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

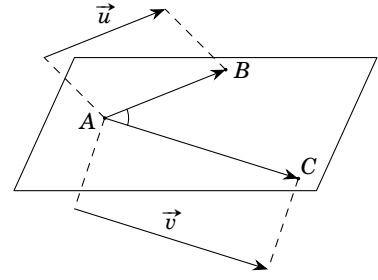
4 Tích vô hướng của hai véc-tơ

Góc giữa hai véc-tơ:

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai véc-tơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kỳ, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, ký hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

A $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$.

- Nếu $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$;
- Nếu $\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$;
- Nếu $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$ thì $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.



Định nghĩa tích vô hướng của hai véc-tơ: Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, ký hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

CHÚ Ý

- ① Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ② $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$. $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
- ③ Với hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- ④ Với hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Tính chất: Với ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

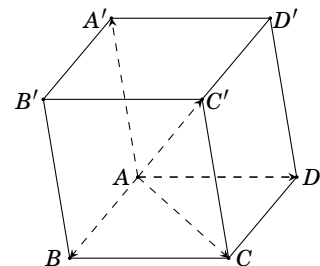
Xác định véc-tơ, chứng minh đẳng thức véc-tơ, độ dài véc-tơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy xác định các véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa

- cùng phương với $\overrightarrow{AB}$;
- cùng phương $\overrightarrow{AA'}$;
- bằng với $\overrightarrow{AD}$;
- bằng với $\overrightarrow{A'C}$;
- đối với $\overrightarrow{CD'}$;
- đối với $\overrightarrow{B'C}$.



Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và AC . Chứng minh rằng

- a) $\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{DM}$ đối nhau; b) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$; c) $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{SC}$.

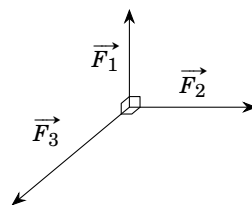
Bài 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm tam giác $AB'D'$.

- a) Tìm vectơ: $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$. b) Chứng minh: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
c) Chứng minh: $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'D}$. d) Chứng minh: $\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{C'B'} - \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{BD'}$.
e) Chứng minh: $\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}$. f) Tính độ dài véc tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{AA'}$.

≡ BÀI 4.

Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc nhau và có độ lớn lần lượt là 2N, 3N, 4N.

- a) Tính độ lớn hợp lực của $\vec{F}_2, \vec{F}_3$.
- b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

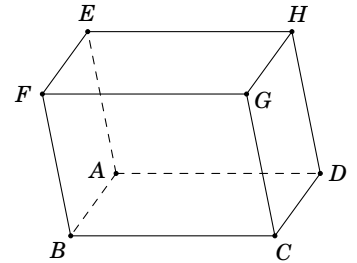
Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Các véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là các véc-tơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$.

B. $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}$.

C. $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{FE}$.

D. $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{EF}$.



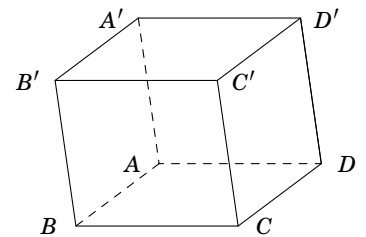
Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AD}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$.



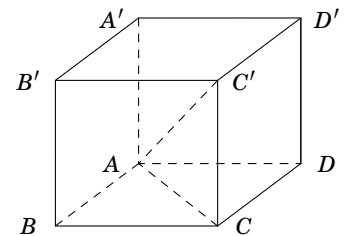
Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

B. $|\overrightarrow{AC'}| = a\sqrt{3}$.

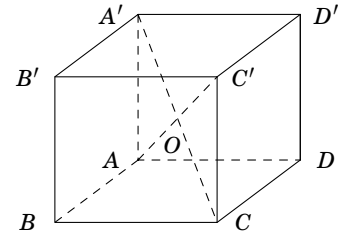
C. $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{D'B'} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$.



Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.
C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$. D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$.

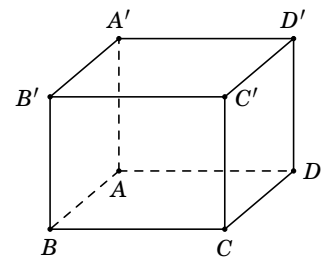


Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$ theo a .

- A. $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$. B. $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$. C. $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$. D. $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$.

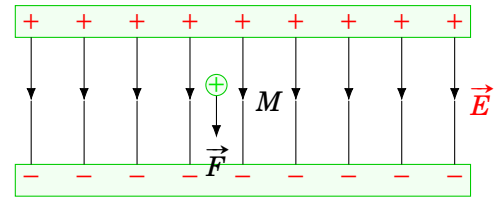
Câu 6. Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a .

- A. $a\sqrt{2}$. B. $(1 + \sqrt{3})a$.
C. $a\sqrt{6}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.



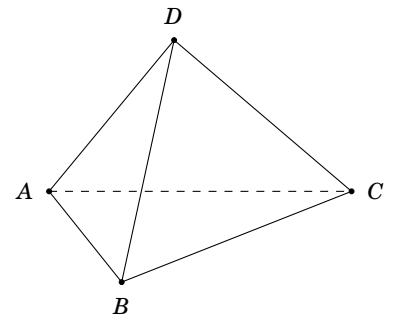
Câu 7. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ N/C.

- A. 10^{-3} N. B. 10^4 N.
C. 10^{-14} N. D. 10^{-4} N.



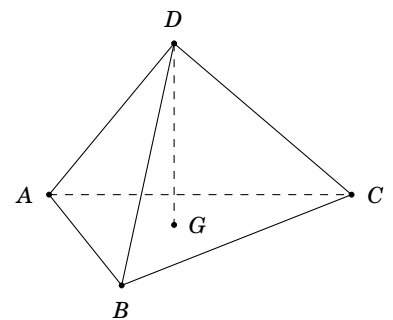
Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A. $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{CD} + \vec{BC}$. B. $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{BD} - \vec{BC}$.
C. $\vec{BC} + \vec{AB} = \vec{DA} - \vec{DC}$. D. $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{DB} - \vec{DC}$.



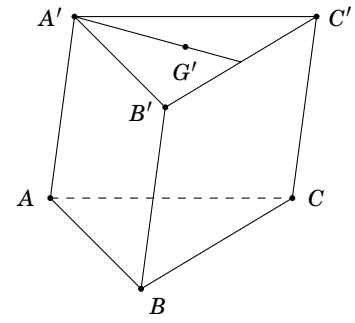
Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tìm k thỏa đẳng thức vectơ $\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC} = k \cdot \vec{DG}$.

- A. $k = 1$. B. $k = 3$.
C. $k = 2$. D. $k = 3$.



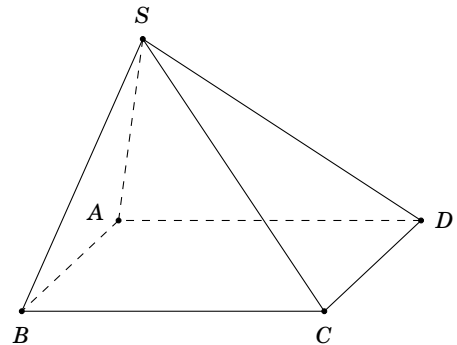
Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Véc-tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$.
 B. $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
 C. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$.
 D. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.



Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.
 B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
 C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.
 D. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.



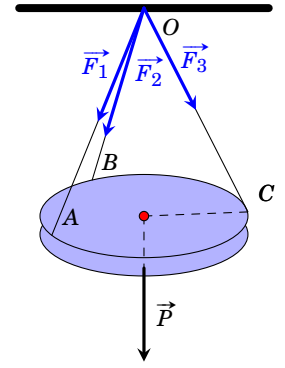
Câu 12. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$. Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

A. $14\sqrt{3} \text{ (N)}$.

B. $15\sqrt{3} \text{ (N)}$.

C. $17\sqrt{3} \text{ (N)}$.

D. $16\sqrt{3} \text{ (N)}$.



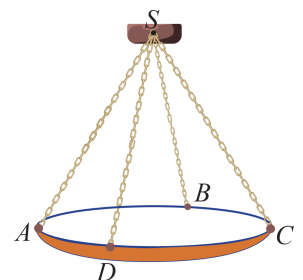
Câu 13. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

A. $\frac{15\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.

B. $\frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.

C. $\frac{25\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.

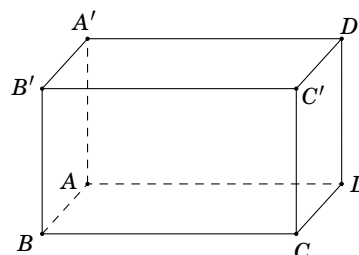
D. $\frac{30\sqrt{3}}{3} \text{ N}$.



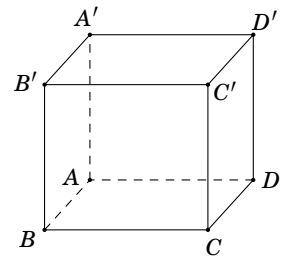
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$; $AA' = 2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

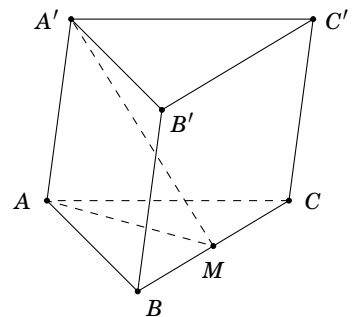
- a) $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{0}$. b) $\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{CB'} = \vec{0}$.
c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{5}$. d) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}| = 2\sqrt{2}a$.



d) $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}| = a.$

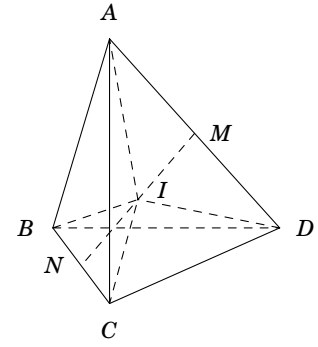


d) $\overrightarrow{A'M} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$



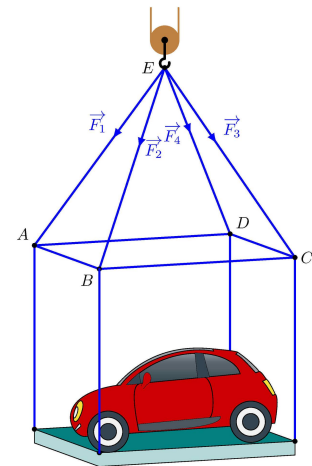
Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC , I là trung điểm MN . Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$. b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$. d) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.



Câu 18. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N.

- a) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_4$.
b) $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{F}_2 + \vec{F}_4$.
c) $|\vec{F}_1 + \vec{F}_3| = 8141 \text{ N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là 16282 N (làm tròn đến hàng đơn vị).



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5.

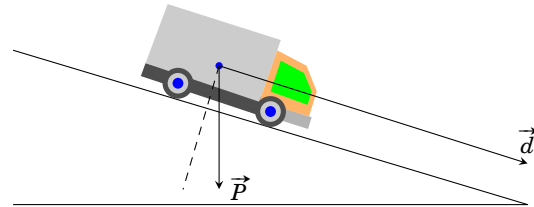
- Tìm góc giữa các cặp véc-tơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$.
- Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{BD}$;
- Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$.

Bài 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

- a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$. b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Bài 3.

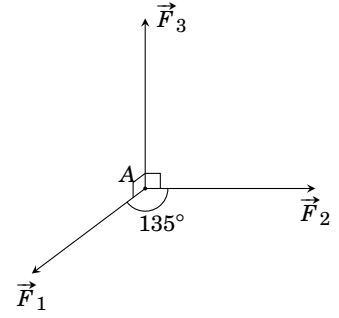
Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$.



Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m \vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Bài 4.

Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α) , chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

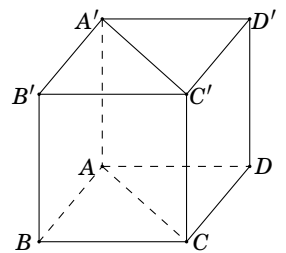
Câu 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $(\vec{A'C'}, \vec{AD}) = 45^\circ$.

B. $(\vec{A'C'}, \vec{B'B}) = 90^\circ$.

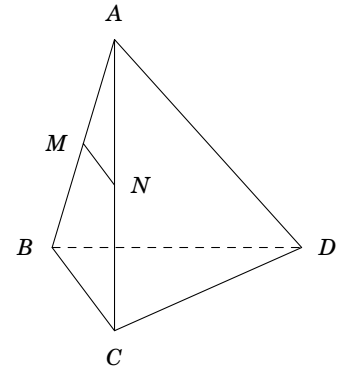
C. $(\vec{A'A}, \vec{CB'}) = 45^\circ$.

D. $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$.



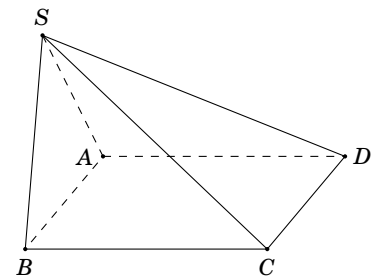
Câu 2. Cho tứ diện đều $ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC . Hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BD}$.

- A. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 150^\circ$. B. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 120^\circ$.
C. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 30^\circ$. D. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BD}) = 60^\circ$.



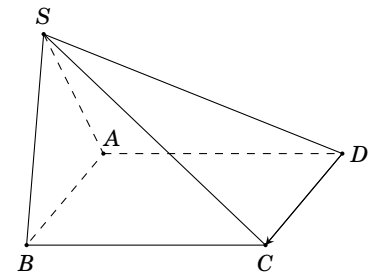
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.

- A. $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 120^\circ$. B. $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 60^\circ$.
C. $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 90^\circ$. D. $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 150^\circ$.



Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Tính $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$.

- A. $\frac{a^2}{4}$. B. $-\frac{a^2}{4}$.
C. $-\frac{a^2}{2}$. D. $\frac{a^2}{2}$.



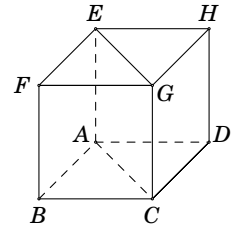
Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có các cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$.

A. $a^2\sqrt{2}$.

B. a^2 .

C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

D. $a^2\sqrt{3}$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

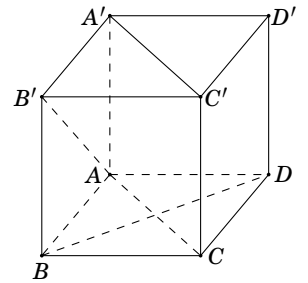
Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .
Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$.

A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-a^2$.

C. a^2 .

D. $-\frac{a^2}{2}$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

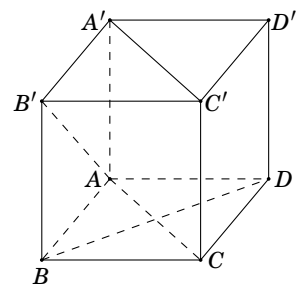
Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .
Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$.

A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-a^2$.

C. a^2 .

D. $-\frac{a^2}{2}$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

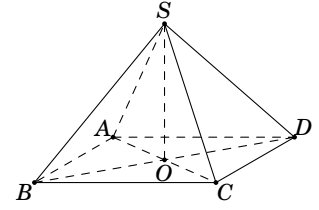
Câu 8. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a . Tính $\vec{AS} \cdot \vec{BC}$.

A. $-\frac{a^2}{4}$.

B. $\frac{a^2}{2}$.

C. $-\frac{a^2}{2}$.

D. $\frac{a^2}{4}$.



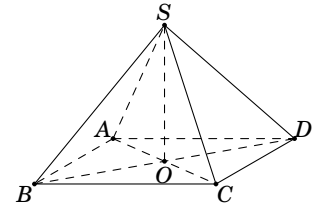
Câu 9. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a . Tính $\vec{AS} \cdot \vec{AC}$.

A. $-a^2$.

B. $\frac{a^2}{2}$.

C. $-\frac{a^2}{2}$.

D. a^2 .



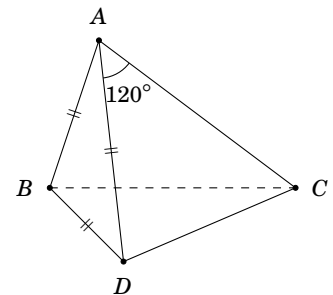
Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ biết $AB = AD = BD = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{CAD} = 120^\circ$. Tính $\vec{BC} \cdot \vec{AD}$.

A. $-\frac{3}{2}a^2$.

B. $\frac{3}{2}a^2$.

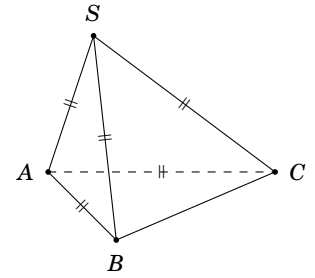
C. $\frac{1}{2}a^2$.

D. $-\frac{1}{2}a^2$.



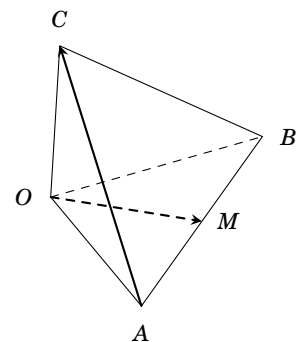
Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\vec{SC}$ và $\vec{AB}$.

- A. 60° . B. 90° .
C. 120° . D. 150° .



Câu 12. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai vectơ $\vec{OM}$ và $\vec{AC}$.

- A. 90° . B. 120° .
C. 60° . D. 30° .



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45° .

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 2 + \sqrt{2}.$

$$\mathbf{b)} \quad (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

d) $\left| \vec{a} - \sqrt{2} \vec{b} \right| = 0.$

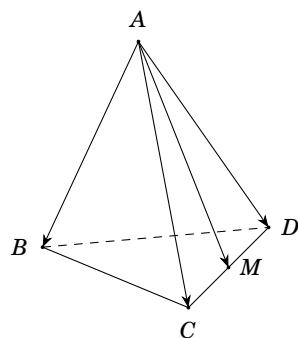
Câu 14. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}.$$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

d) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}.$



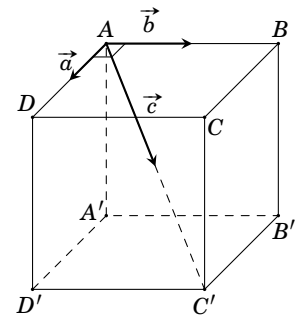
Câu 15. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N.

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

b) $|\vec{a} + \vec{b}| = 20$ (N).

c) $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{c}|$.

d) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 32,59$ (N) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



§2. TỌA ĐỘ CỦA VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

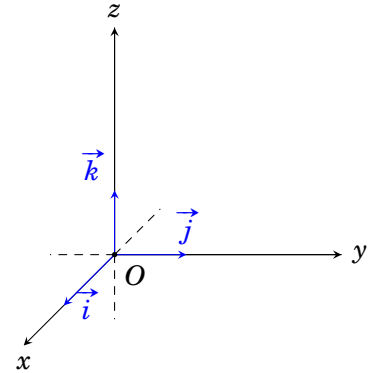


LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục. Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ lần lượt là các véc-tơ đơn vị trên các trục Ox , Oy , Oz .

- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$, hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$



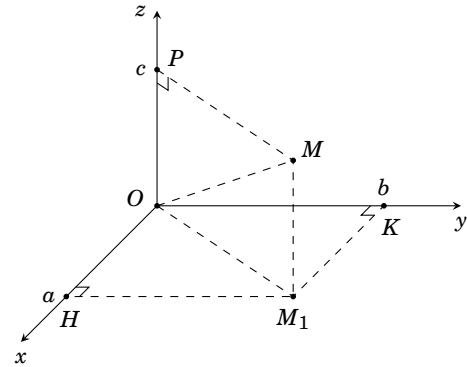
Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

2 Tọa độ của điểm

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M . Tọa độ điểm M được xác định như sau:

- Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm hoành độ a , tung độ b của điểm M_1 .
- Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục Oz , điểm P ứng với số c trên trục Oz . Số c là cao độ của điểm M .

Bộ số $(a; b; c)$ là tọa độ của điểm M trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a; b; c)$.



3 Tọa độ của vectơ

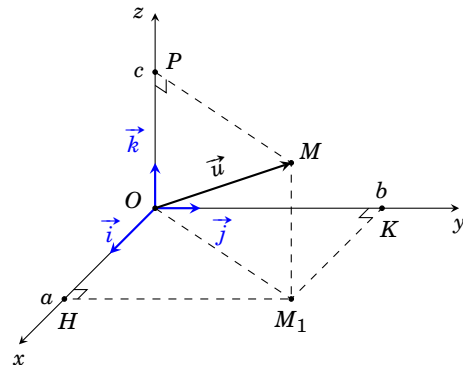
Trong không gian $Oxyz$:

- Tọa độ của điểm M cũng là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.
- Cho $\vec{u}$. Dựng điểm $M(a; b; c)$ thỏa $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ thì tọa độ của điểm M là tọa độ của $\vec{u}$. Theo hình vẽ thì

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

Suy ra

$$\vec{u} = (a; b; c) \Leftrightarrow \vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$



Tọa độ các véc tơ đơn vị lần lượt là: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tọa độ điểm, tọa độ véc tơ

Khi xác định tọa độ điểm, tọa độ véc tơ ta chú ý các kết quả sau:

- ① $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (a; b; c).$ ② $\vec{u}(u_1; u_2; u_3) = \vec{v}(v_1; v_2; v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$
- ③ $\overrightarrow{OM} = (a; b; c)$ thì $M(a; b; c).$ ④ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$
- ⑤ Chiếu điểm $M(a; b; c)$ lên mặt phẳng tọa độ (hoặc trục tọa độ) thì "thành phần bị khuyết" bằng 0. Chẳng hạn: $M(1; 2; 3)$ chiếu lên (Oxy) thì $z = 0$. Suy ra hình chiếu là $M_1(1; 2; 0).$ ⑥ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; -2; -1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$. Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2; 3; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; -2), B(4; 3; 1)$ và $C(-1; -2; 2)$.

- a) Tìm tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{AB}$.
- b) Tìm tọa độ của điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $A(4;6;-5)$, $B(5;7;-4)$, $C(5;6;-4)$, $D'(2;0;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{a}$ là

- A. $(2;-3;-5)$. B. $(2;3;-5)$. C. $(-2;3;5)$. D. $(2;3;5)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k} - \vec{j}$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{u}$ là

- A. $(3;-1;4)$. B. $(3;4;-1)$. C. $(4;-1;3)$. D. $(4;3;-1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz ?

- A. $M(1;0;0)$. B. $M(1;0;2)$. C. $M(1;2;0)$. D. $M(0;0;-2)$.

.....

.....

.....

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ điểm M là

- A. $M(0;2;1)$. B. $M(1;2;0)$. C. $M(2;0;1)$. D. $M(2;1;0)$.

.....

.....

.....

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{k}$. Tọa độ điểm A là

- A. $(1;0;-2)$. B. $(0;1;-2)$. C. $(0;-1;2)$. D. $(1;-2;0)$.

.....

.....

.....

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia Ox và $OA = 2$.

- A. $A(0;0;2)$. B. $A(2;2;0)$. C. $A(0;2;0)$. D. $A(2;0;0)$.

.....

.....

.....

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ của điểm A biết A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA = 3$.

- A. $A(0;3;0)$. B. $A(0;-3;0)$. C. $A(0;-9;0)$. D. $A(3;-3;0)$.

.....

.....

.....

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1;-2;6)$. B. $(3;0;-2)$. C. $(1;0;-6)$. D. $(1;2;-6)$.

.....

.....

.....

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-2)$, $B(3;-2;4)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(2;5;6)$. B. $(4;1;2)$. C. $(2;-5;6)$. D. $(-2;5;6)$.

.....

.....

.....

Câu 10. Cho hai điểm A, B thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 3)$ và $\overrightarrow{OB} = (5; 2; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = (2; -1; 3)$. B. $\overrightarrow{AB} = (3; 3; -4)$. C. $\overrightarrow{AB} = (7; 1; 2)$. D. $\overrightarrow{AB} = (3; -3; 4)$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm M và N biết $M(2; 1; -1)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; -3)$. Tọa độ N là

- A. $N(1; -3; -4)$. B. $N(1; 3; -4)$. C. $N(-1; 3; -4)$. D. $N(1; 3; 4)$.

Câu 12. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; -4; 5)$ trên mặt phẳng (Oxz) là điểm

- A. $M(3; 0; 0)$. B. $M(0; -4; 5)$. C. $M(0; 0; 5)$. D. $M(3; 0; 5)$.

Câu 13. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

- A. $M(0; 0; 3)$. B. $N(1; 2; 0)$. C. $Q(0; 2; 0)$. D. $P(1; 0; 0)$.

Câu 14. Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -3)$ lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(2; 0; 0)$. B. $(2; 1; 0)$. C. $(0; 1; -3)$. D. $(2; 0; -3)$.

Câu 15. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là

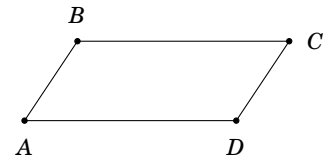
- A. $(0; 2; 1)$. B. $(0; 2; 0)$. C. $(3; 0; 0)$. D. $(0; 0; 1)$.

Câu 16. Hình chiếu của điểm $M(2; 3; -2)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A. $(2; 0; 0)$. B. $(0; 3; 0)$. C. $(0; 0; -2)$. D. $(2; 0; -2)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2;3;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(6;5;0)$. Tọa độ đỉnh D là

- A. $D(11;2;2)$. B. $D(1;8;2)$. C. $D(11;2;-2)$. D. $D(1;8;-2)$.



.....

.....

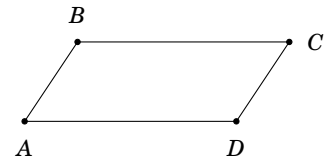
.....

.....

.....

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(4;2;9)$. B. $D(-2;4;-5)$. C. $D(6;2;-3)$. D. $(-4;-2;9)$.



.....

.....

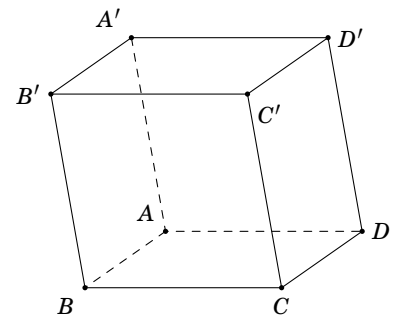
.....

.....

.....

Câu 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh C của hình hộp.

- A. $C(2;0;2)$. B. $C(2;0;2)$.
C. $C(2;0;2)$. D. $C(2;0;2)$.



.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- A. $A'(-1;-5;8)$. B. $A'(-1;-5;8)$. C. $A'(-1;-5;8)$. D. $A'(-1;-5;8)$.

.....

.....

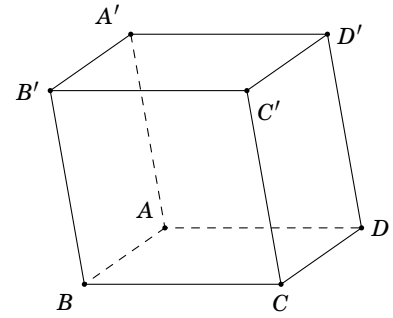
.....

.....

.....

Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ đỉnh D' của hình hộp.

- A. $D'(-1;-6;8)$. B. $D'(-1;-6;8)$.
C. $D'(-1;-6;8)$. D. $D'(-1;-6;8)$.



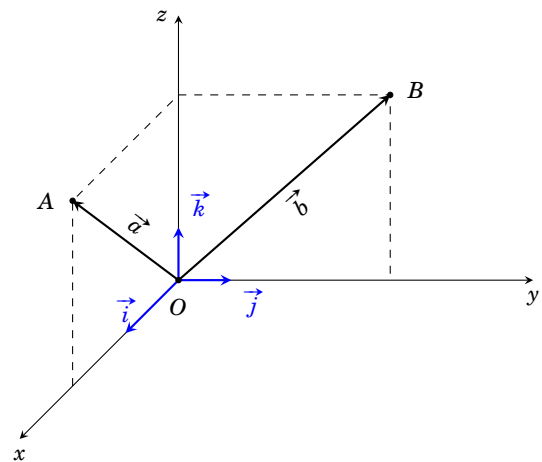
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k} - 4\vec{j}$ và $\vec{b} = (m - n; 4m - 6n; n^2 - 3m + 2)$, với m, n là tham số.

- a) Tọa độ $\vec{a} = (1; 3; -4)$. b) Dựng điểm A thỏa $\vec{OA} = \vec{a}$ thì $A(1; -4; 3)$.
c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b} = \vec{0}$. d) Nếu $\vec{a} = \vec{b}$ thì $m + n = 9$.

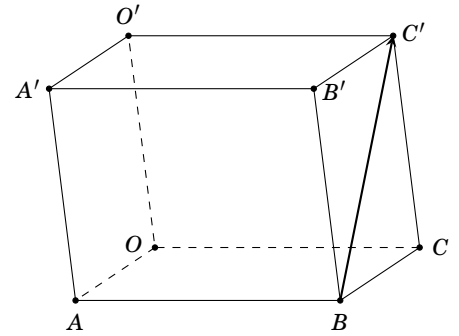
Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 2; 0)$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Dựng $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.

- a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{k}$.
b) Tọa độ $\vec{b} = (0; 2; 2)$.
c) Tọa độ $\vec{AB} = (-2; 2; 0)$.
d) Góc $\widehat{AOB} = 45^\circ$.



Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1)$, $B(0;3;0)$, $\overrightarrow{BC'} = (2;-6;6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

- Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$.
- Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$.
- Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB'} = (-2;3;-6)$.
- Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK} = (-1;2;-1)$.

**DT****2****Tọa độ hóa một số hình không gian**

① Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc nhau làm gốc tọa độ.

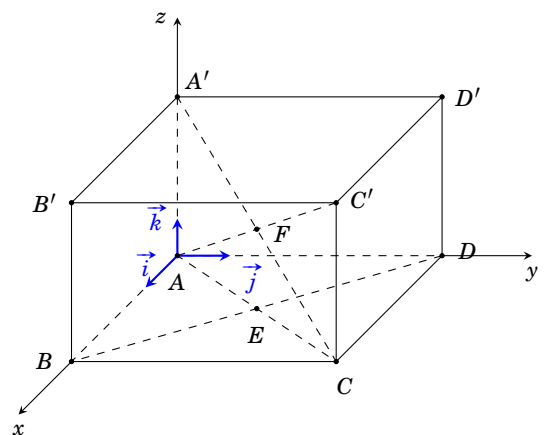
② Xây dựng tọa độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn.

③ Tọa độ các điểm đặc biệt:

- | | | |
|--|--|--|
| • $M \in Ox \Rightarrow M(x;0;0)$. | • $M \in Oy \Rightarrow M(0;y;0)$. | • $M \in Oz \Rightarrow M(0;0;z)$. |
| • $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$. | • $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z)$. | • $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0;y;z)$. |

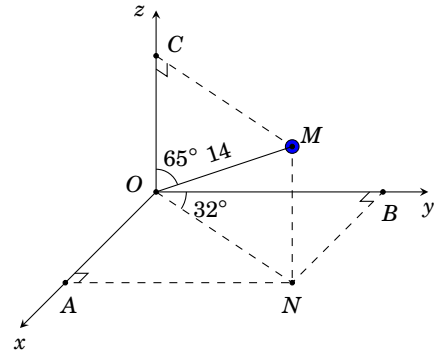
BÀI TẬP TỰ LUẬN**Bài 1.**

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = AA' = 2$, $AD = 4$. Gọi E là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, F là trung điểm AC' . Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với A), hãy xác định tọa độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và tọa độ hai điểm E, F .



Bài 2.

Một máy bay M đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình bên, cho biết M là vị trí của máy bay với $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Tính tọa độ điểm M .

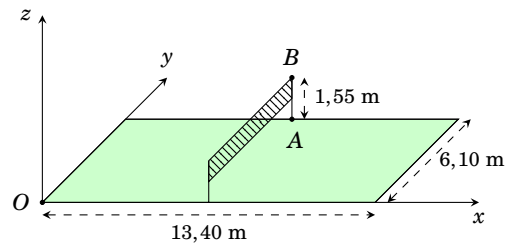


BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

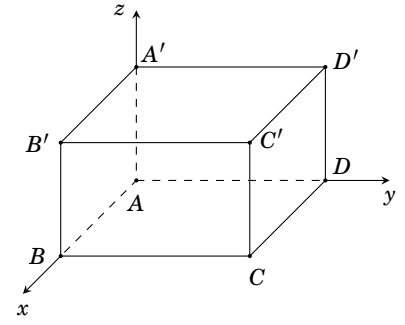
Câu 1. Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của B .

- A. $(6, 1; 6, 7; 1, 55)$. B. $(6, 7; 6, 1; 1, 55)$.
C. $(6, 1; 0; 1, 55)$. D. $(0; 6, 7; 1, 55)$.



Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm B' là

- A. $B(0;2;0)$. B. $B(2;2;2)$.
C. $B(2;2;0)$. D. $B(2;0;2)$.



.....

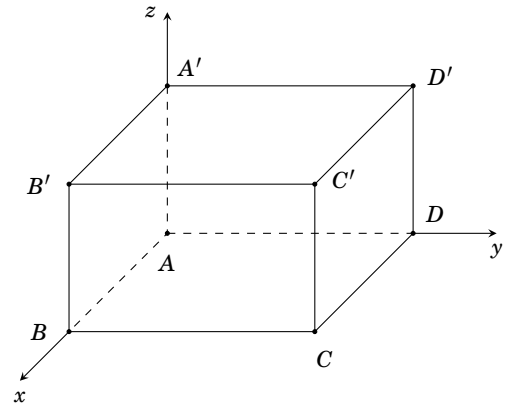
.....

.....

.....

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm C' là

- A. $C'(2;2;0)$. B. $C'(2;2;2)$.
C. $C'(2;0;2)$. D. $C'(2;0;2)$.



.....

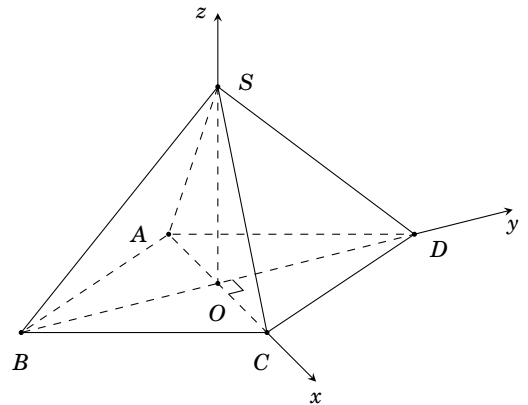
.....

.....

.....

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ $\vec{SC}$ là

- A. $\vec{SC} = (2a; 0; -2a)$. B. $\vec{SC} = (2a; -a; -2a)$.
C. $\vec{SC} = (a; 0; -2a)$. D. $\vec{SC} = (a; 0; 2a)$.



.....

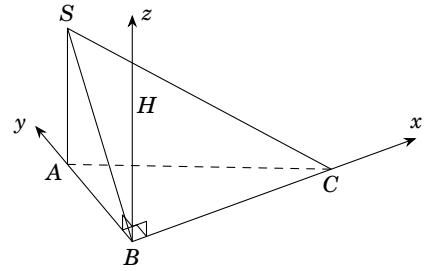
.....

.....

.....

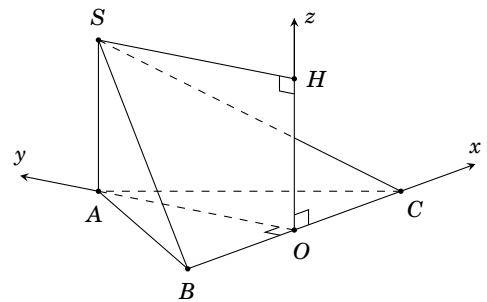
Câu 5. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với điểm B), tìm khẳng định **sai**.

- A. $A(0;2;0)$. B. $B(0;0;0)$.
C. $C(0;0;3)$. D. $S(-2;2;2)$.



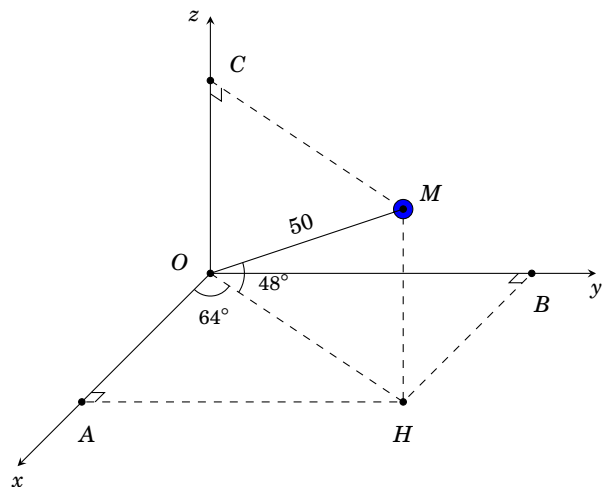
Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và $SA = 1$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy tìm toạ độ điểm S .

- A. $S(0;\sqrt{3};1)$. B. $S(0;\sqrt{3};1)$.
C. $S(0;\sqrt{3};1)$. D. $S(0;\sqrt{3};1)$.



Câu 7. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) . Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \vec{OH}) = 64^\circ$, $(\vec{OH}, \vec{OM}) = 48^\circ$. Tìm toạ độ của điểm M .

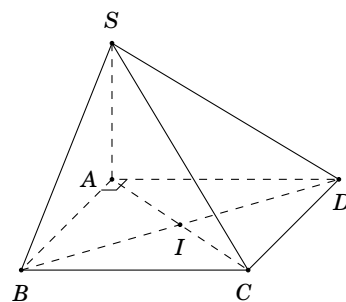
- A. $M(14,7;30,1;37,2)$. B. $M(14,7;30,1;37,2)$.
C. $M(14,7;30,1;37,2)$. D. $M(14,7;30,1;37,2)$.



PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

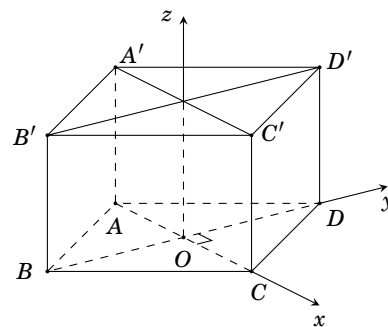
Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1$, $AD = 2$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A , các véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}$, $\vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a)** Tọa độ $D(0;2;0)$. **b)** Tọa độ $C(1;2;3)$.
c) Tọa độ $S(2;0;0)$. **d)** Tọa độ $I(1;1;0)$.

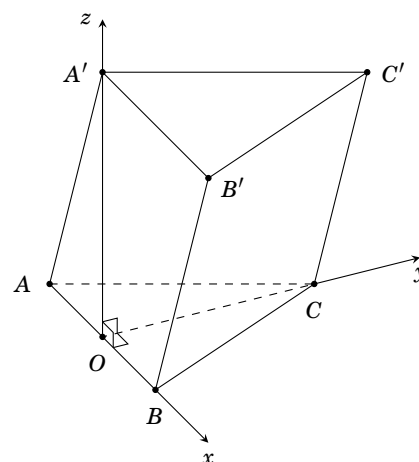


Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc toạ độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)** Tọa độ $A(-1;0;0)$. **b)** $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.
c) Tọa độ $D'(0;\sqrt{2};2)$. **d)** $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$.



a) Tọa độ điểm $A(-1; 0; 0)$.
b) Tọa độ điểm $C(0; \sqrt{3}; 0)$.
c) Tọa độ điểm $A'(0; -1; \sqrt{3})$.
d) Tọa độ điểm $C'(1; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.



§3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Biểu thức tọa độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số k . Khi đó

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3);$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3);$$

$$\textcircled{3} \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

! Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại một số thực k sao cho
$$\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3. \end{cases}$$

2 Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai véc-tơ

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

CHÚ Ý

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0;$$

$$\textcircled{2} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ và } \vec{b} \neq \vec{0}).$$

3 Biểu thức tọa độ của tích có hướng hai véc-tơ

Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương. Khi đó véc-tơ

$$\vec{w} = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

vuông góc với cả hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

! $\textcircled{1}$ Véc-tơ $\vec{w}$ xác định như trên còn gọi là **tích có hướng** của hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{w} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

$$\textcircled{2} \quad \text{Quy ước} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \text{ thì}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{a} \text{ không cùng phương với } \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}.$$

4 Biểu thức tọa độ trung điểm đoạn thẳng, trọng tâm tam giác

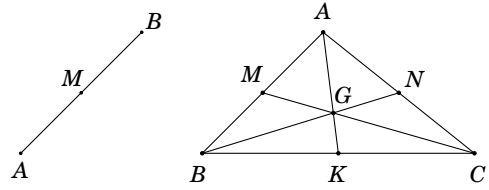
Trong không gian $Oxyz$, tọa độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

- ① Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

- ② Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tọa độ của các phép toán vec tơ, tọa độ điểm, độ dài đoạn thẳng

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho $\vec{a} = (-2; 3; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -1)$, $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Tính tọa độ của mỗi vectơ sau:

a) $3\vec{a}$;

b) $2\vec{a} - \vec{b}$;

c) $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$, $\vec{w} = 6\vec{i} + m\vec{j} - n\vec{k}$.

a) Chứng minh $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

b) Tìm giá trị của m và n để véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ cùng phương.

Bài 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(4; -2; 1)$.

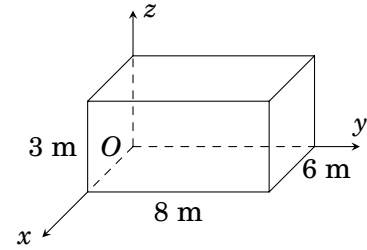
- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Xác định tọa độ trọng tâm tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng tọa độ (Oxz) .

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(5; -3; 0)$, $B(2; 1; -1)$, $C(4; 1; 2)$.

- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{AB} + \vec{AC} - 5\vec{BC}$.
- Tìm tọa độ điểm N sao cho $2\vec{NA} = -\vec{NB}$.

Bài 5.

Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (Hình minh họa bên). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Các câu hỏi sau đều xét trong không gian $Oxyz$.

Câu 1. Cho $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; -4; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} = 2\vec{b}$. B. $\vec{b} = 2\vec{a}$. C. $\vec{b} = -2\vec{a}$. D. $\vec{a} = -2\vec{b}$.

Câu 2. Cho hai véc-tơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$, $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- A. $\vec{a}(4; 1; -5)$. B. $\vec{a}(4; 1; -1)$. C. $\vec{a}(3; 1; -4)$. D. $\vec{a}(0; 1; -1)$.

Câu 3. Cho $\vec{a} = (1; -1; 3)$, $\vec{b} = (2; 0; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

- A. $\vec{u} = (-4; -2; 9)$. B. $\vec{u} = (4; 2; -9)$. C. $\vec{u} = (-4; -5; 9)$. D. $\vec{u} = (1; 3; -11)$.

Câu 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = (1; 1; 0)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{b}$ thỏa mãn biểu thức $\vec{b} - \vec{a} + 2\vec{c} = \vec{0}$.

- A. $\vec{b} = (-2; 1; -1)$. B. $\vec{b} = (-1; 2; -1)$. C. $\vec{b} = (5; 2; 1)$. D. $\vec{b} = (1; -2; 1)$.

Câu 5. Cho vectơ $\vec{a} = (1; -3; 4)$. Vectơ nào sau đây cùng phương với $\vec{a}$?

- A. $\vec{b} = (-2; -6; 8)$. B. $\vec{c} = (-2; 6; -8)$. C. $\vec{d} = (-2; 6; 8)$. D. $\vec{m} = (2; -6; -8)$.

Câu 6. Hai véc-tơ $\vec{a} = (m; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; n; 2)$ cùng phương khi

- A. $\begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{2}{3} \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{4}{3} \end{cases}$.

Câu 7. Cho hai điểm $A(2; 3; 1)$ và $B(3; 1; 5)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $AB = \sqrt{21}$. B. $AB = 2\sqrt{3}$. C. $AB = 2\sqrt{5}$. D. $AB = \sqrt{13}$.

Câu 8. Cho hai điểm $M(3; -2; 1)$ và $N(0; 1; -1)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

- A. $MN = \sqrt{17}$. B. $MN = 22$. C. $MN = \sqrt{22}$. D. $MN = \sqrt{19}$.

Câu 9. Cho hai điểm $A(-1; 1; 2)$ và $B(3; -5; 0)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

- A. $(1; -2; 1)$. B. $(4; -6; 2)$. C. $(2; -3; -1)$. D. $(2; -4; 2)$.

Câu 10. Cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(3;-1;2)$. Tọa độ điểm C sao cho B là trung điểm của đoạn AC là

- A. $C(5;-3;4)$. B. $C(4;-3;5)$. C. $C(-1;3;-2)$. D. $C(2;0;1)$.

Câu 11. Cho tam giác ABC với $A(0;-1;3)$, $B(2;1;1)$, $C(1;0;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- A. $(1;0;1)$. B. $(-1;0;1)$. C. $(0;1;1)$. D. $(1;1;0)$.

Câu 12. Cho $\vec{OA} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, điểm $B(3;-4;1)$ và $C(2;0;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

- A. $(1;-2;3)$. B. $(-1;2;-3)$. C. $(2;-2;1)$. D. $(-2;2;-1)$.

Câu 13. Cho tam giác ABC trọng tâm G . Biết $A(0;2;1)$, $B(1;-1;2)$, $G(1;1;1)$. Khi đó điểm C có tọa độ là

- A. $(2;2;4)$. B. $(-2;0;2)$. C. $(-2;-3;-2)$. D. $(2;2;0)$.

Câu 14. Cho bốn điểm $A(1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(-1;3;-4)$, $D(2;6;0)$ tạo thành một hình tứ diện. Gọi M , N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB , CD . Tìm tọa độ trung điểm G của đoạn MN .

- A. $G\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; 0\right)$. B. $G(2;4;0)$. C. $G(1;2;0)$. D. $G(4;8;0)$.

Câu 15. Cho hai điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là

A. $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

B. $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$.

D. $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$.

Câu 16. Cho các điểm $A(1;-1;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;1;3)$ và M là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó điểm M có tọa độ là

A. $(3;2;3)$.

B. $(3;-2;-3)$.

C. $(3;-2;3)$.

D. $(3;2;-3)$.

Câu 17. Cho tọa độ các điểm $A(-1;3)$, $B(2;-2)$ và $C(m;1)$. Tìm m để 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

A. $m = \frac{2}{5}$.

B. $m = \frac{1}{5}$.

C. $m = -\frac{1}{5}$.

D. $m = -\frac{1}{5}$.

Câu 18. Cho ba điểm $A(-1;1;2)$, $B(0;1;-1)$, $C(x+2;y;-2)$ thẳng hàng. Tổng $x+y$ bằng

A. $\frac{7}{3}$.

B. $-\frac{8}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 19. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm C .

A. $(0;-2;0)$.

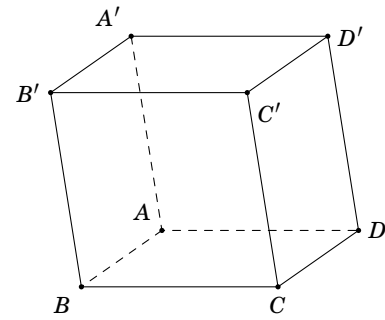
B. $(2;2;2)$.

C. $(2;0;2)$.

D. $(2;-2;2)$.

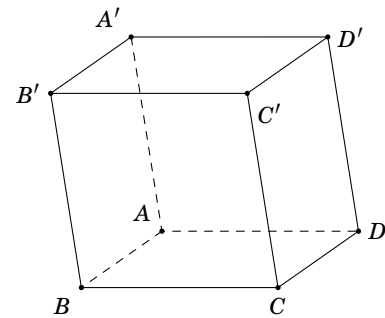
Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$, $a \neq 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AC' .

- A. $|a|$.
B. $2|a|$.
C. $3|a|$.
D. $\frac{3|a|}{2}$.



Câu 21. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;1)$, $B'(1;0;0)$, $C'(1;1;0)$. Tìm tọa độ của điểm D .

- A. $D(0;-1;1)$.
B. $D(0;1;1)$.
C. $D(0;1;0)$.
D. $D(1;1;1)$.



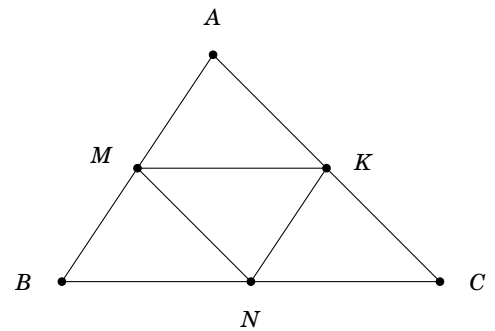
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 22. Cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-1)$.
b) $\overrightarrow{AC} = (-2;-1;1)$.
c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.
d) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

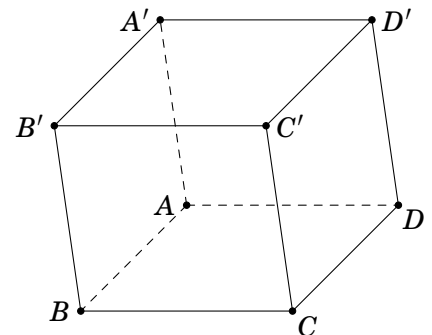
Câu 23. Cho ba điểm $A(3;3;-6)$, $B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và CA .

- Tọa độ $M(2;3;2)$.
- Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC = 2\sqrt{5}$.
- Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.
- Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



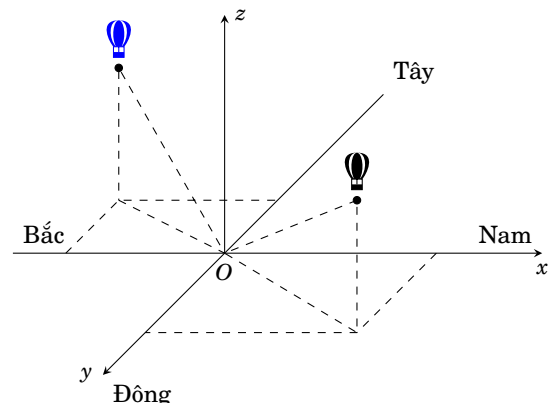
Câu 24. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;2;0)$, $D'(-1;3;5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A'$, $ADD'A'$.

- Tọa độ $D(0;2;0)$.
- Tọa độ $A'(-1;1;5)$.
- Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1;1;0)$.
- $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}| = \sqrt{29}$.



Câu 25. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2;1;0,5)$.
- Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5;-1;0,8)$.
- Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.
- Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

DT

2

Tích vô hướng, tích có hướng hai vec tơ và ứng dụng

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (3; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -1)$, $\vec{d} = (1; 7; -3)$.

- a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$. b) Tính $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$. c) Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (-4; 3; m)$.

- a) Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
b) Tìm m để vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

≡ Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;0;2)$, $B(0;4;3)$ và $C(-2;1;2)$.

- Chỉ ra tọa độ một véc tơ (khác $\vec{0}$) vuông góc với hai véc tơ $\vec{AB}$, $\vec{AC}$.
- Tính chu vi tam giác ABC .
- Tính $\cos \widehat{BAC}$.
- Tìm độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

≡ Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(0;1;-2)$; $B(3;0;0)$ và điểm C thuộc trục Oz . Biết ABC là tam giác cân tại C . Tìm tọa độ điểm C .

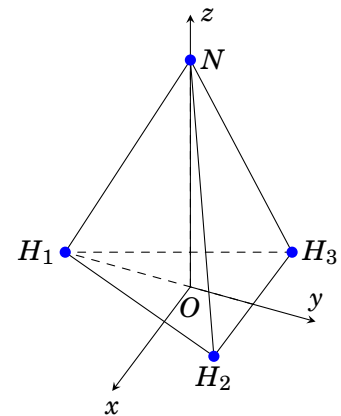
Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$, $P(1;m-1;2)$. Với những giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

Bài 6. Cho hai điểm $A(2,-1,1); B(3,-2,-1)$. Tìm điểm N trên trục Ox cách đều A và B .

Bài 7.

Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử amoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết H–N–H, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn $\overline{NH_1H_2}$), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° .

Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0;-2;0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (Hình bên).



- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.
- Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen.

A 3D coordinate system with axes x , y , and z . The origin is labeled O . A tree is positioned at the origin. Four force vectors, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, and $\vec{F}_4$, are shown acting on the tree. $\vec{F}_1$ points towards point A on the x -axis. $\vec{F}_2$ points towards point C on the y -axis. $\vec{F}_3$ points towards point B on the y -axis. $\vec{F}_4$ points towards point D on the x -axis. A point S is marked on the z -axis above the tree.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$ là

- A. 0. B. 6. C. 8. D. -6.

Câu 2. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ và $\vec{v} = (0; 1; -2)$ bằng

- A. -4. B. 0. C. 4. D. -2.

Câu 3. Cho các véc-tơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (2; 2; 1)$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

- A. -1. B. -2. C. 2. D. 1.

Câu 4. Một thiết bị thăm dò đáy biển được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.

- A. 480(J). B. 530(J). C. 510(J). D. 500(J).

Câu 5. Góc giữa hai véc-tơ $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ bằng

- A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .

Câu 6. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 1; 0)$ và $\vec{v} = (0; -1; 0)$. Góc hợp bởi hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng

A. 60° .

B. 45° .

C. 135° .

D. 120° .

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Cho hai véc-tơ $\vec{a}(-2; -3; 1)$ và $\vec{b}(1; 0; 1)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2\sqrt{7}}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3}{2\sqrt{7}}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Cho $\vec{a} = (3; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 2; -4)$. Giá trị của $|\vec{a} - \vec{b}|$ bằng

A. $5\sqrt{2}$.

B. 50.

C. $2\sqrt{5}$.

D. 3.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 9. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 0; 2)$ và $\vec{v} = (x; -2; 1)$. Biết rằng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4$. Khi đó $|\vec{v}|$ bằng

A. $\sqrt{21}$.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Tìm số thực a để véc-tơ $\vec{u} = (a; 0; 1)$ vuông góc với véc-tơ $\vec{v} = (2; -1; 4)$.

A. $a = -2$.

B. $a = -4$.

C. $a = 4$.

D. $a = 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Tìm x để hai véc-tơ $\vec{a} = (x; x-2; 2)$ và $\vec{b} = (x; 1; -2)$ vuông góc với nhau.

A. $x = 3$.

B. $x = 1$.

C. $\begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$.

Câu 12. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Véc-tơ nào dưới đây vuông góc với cả hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$?

A. $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$.

B. $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$.

C. $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$.

D. $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$.

Câu 13. Tích có hướng của hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (0; 4; -3)$ có tọa độ là

A. $(-6; 3; -4)$.

B. $(6; -3; 4)$.

C. $(6; 3; 4)$.

D. $(-6; -3; -4)$.

Câu 14. Cho $A(2; 1; 4), B(-2; 2; -6), C(6; 0; -1)$. Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

A. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 67$.

B. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -67$.

C. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 33$.

D. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 65$.

Câu 15. Cho $A(1; -2; 3), B(2; -4; 1), C(2; 0; 2)$, khi đó tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng

A. 4.

B. -1.

C. 7.

D. -5.

Câu 16. Cho tam giác ABC với $A(8;9;2)$, $B(3;5;1)$, $C(11;10;4)$. Số đo góc A của tam giác ABC là

- A. 60° . B. 150° . C. 30° . D. 120° .

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho điểm $A(3;-1;5)$, $B(m;2;7)$. Tìm tất cả các giá trị của m để độ dài đoạn $AB = 7$.

- A. $m = 3$ hoặc $m = -3$. B. $m = 9$ hoặc $m = -3$.
C. $m = -3$ hoặc $m = -9$. D. $m = 9$ hoặc $m = 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Cho ba điểm $A(3;2;8)$, $B(0;1;3)$ và $C(2;m;4)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B .

- A. $m = 4$. B. $m = -10$. C. $m = 25$. D. $m = -1$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = 0$. B. $m = -4$. C. $m = 2$. D. $m = -6$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Cho tam giác ABC có $A(7;3;3)$, $B(1;2;4)$, $C(2;3;5)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

- A. $H(3;4;6)$. B. $H(-3;4;7)$. C. $H(2;4;1)$. D. $H(2;-4;3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; 2)$. Gọi $M(0; 0; z)$ là điểm thuộc trục Oz sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $z \in (0; 1]$. B. $z \in (1; 2]$. C. $z \in (-1; 0]$. D. $z \in (-2; -1]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 22. Cho ba vec-tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$ và $\vec{c} = (1; 1; 1)$.

- a) $|\vec{a}| = 2$. b) $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. c) $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. d) $\vec{b} \perp \vec{c}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Cho hai vectơ $\vec{u} = (0; 2; 3)$ và $\vec{v} = (m - 1; 2m; 3)$.

- a) $|\vec{u}| = \sqrt{13}$. b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}$.
c) $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow m = 1$. d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

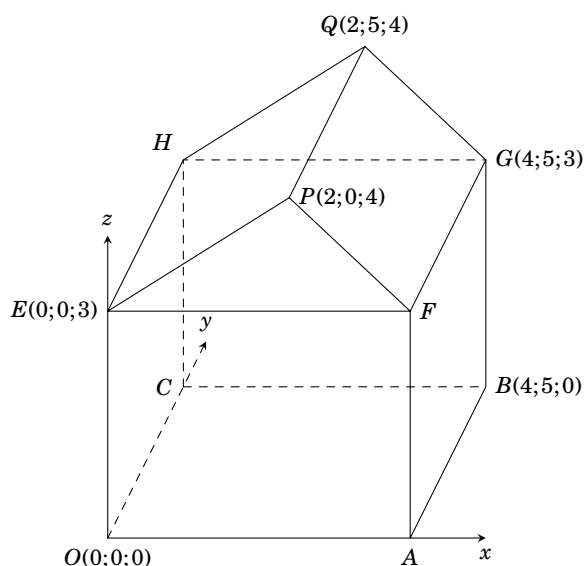
.....

Câu 24. Cho tam giác ABC có $A(1;2;0)$, $B(0;1;1)$, $C(2;1;0)$.

- a)** Tam giác ABC vuông tại A .
b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.
d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 25. Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

- Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.
- Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.
- Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).
- Chiều cao của ngôi nhà là 4.



CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

§1. KHOẢNG BIẾN THIÊN, KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Khoảng biến thiên

⚙ **Định nghĩa:** Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_1; u_2)$	$\dots$	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Nếu n_1 và n_k cùng khác 0 thì khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm được tính theo công thức

$$R = u_{k+1} - u_1$$

⚙ **Ý nghĩa:**

- ✓ Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
- ✓ Trong các đại lượng đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm, khoảng biến thiên là đại lượng dễ hiểu, dễ tính toán. Tuy nhiên, do khoảng biến thiên chỉ sử dụng hai giá trị u_1 và u_{m+1} của mẫu số liệu nên đại lượng đó dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

2 Khoảng tứ phân vị

⚙ **Định nghĩa:** Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Δ_Q , là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba Q_3 và tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu ghép nhóm đó, tức là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

Ý nghĩa:

- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).
- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.
- ✓ Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x > Q_3 + 1,5\Delta_Q$ hoặc $x < Q_1 - 1,5\Delta_Q$.
- ✓ Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

- ① Xác định u_1 là giá trị đầu mút trái của nhóm đầu tiên và u_{k+1} là giá trị đầu mút phải của nhóm cuối cùng có chứa dữ liệu (tần số khác 0).
- ② Khoảng biến thiên $R = u_{k+1} - u_1$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau:

55,4 62,6 54,2 56,8 58,8 59,4 60,7
58 59,5 63,6 61,8 52,3 63,4 57,9
49,7 45,1 56,2 63,2 46,1 49,6 59,1
55,3 55,8 45,5 46,8 54 49,2 52,6

- a) Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm 5 nhóm có độ dài bằng nhau với nhóm đầu tiên là $[45; 49)$.
- b) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và bảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm tương ứng.

Bài 2. Bảng sau thống kê thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày trong tháng 9/2022 của bác Bình và bác An.

Thời gian (phút)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)
Số ngày tập của bác Bình	5	12	8	3	2
Số ngày tập của bác An	0	25	5	0	0

- a) Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian tập thể dục buổi sáng mỗi ngày của bác Bình và bác An.
- b) Sử dụng khoảng biến thiên, hãy cho biết bác nào có thời gian tập phân tán hơn.

Bài 3. Thống kê thời gian sử dụng mạng xã hội trong ngày của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 12A, được kết quả như bảng sau:

Thời gian sử dụng (phút)	[0;10)	[10;30)	[30;60)	[60;90)
Số học sinh Tổ 1	2	4	3	1
Số học sinh Tổ 2	5	1	3	0

Tìm khoảng biến thiên cho thời gian sử dụng mạng xã hội của học sinh mỗi tổ và giải thích ý nghĩa.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khảo sát thời gian tập thể dục của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian	[0;20)	[20;40)	[40;60)	[60;80)	[80;100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 80. B. 60. C. 100. D. 12.

Câu 2. Mức thưởng tết (triệu đồng) cho các nhân viên của một công ty được thống kê trong bảng sau:

Mức thưởng tết	[5;10)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)
Số nhân viên	13	35	47	25	10

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 20. B. 25. C. 47. D. 23.

Câu 3. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Chiều cao của 40 học sinh nam ở một trường THPT

Lớp chiều cao (cm)	[160; 163,5)	[164; 167,5)	[168; 171,5)	[172; 175,5)	Cộng
Tần số	9	20	7	4	40

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 31. B. 15,5. C. 175,5. D. 12.

Câu 4. Thời gian truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5;12,5)	[12,5;15,5)	[15,5;18,5)	[18,5;21,5)	[21,5;24,5)
Số học sinh	0	12	15	24	26

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 26. B. 14. C. 20. D. 12.

Câu 5. Thời gian hoàn thành bài kiểm tra môn Toán của các bạn trong lớp 12C được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số học sinh	8	16	12	2

Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

- A. 24. B. 15. C. 2. D. 20.

2

Với mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[a_1; a_2)$	$\dots$	$[a_i; a_{i+1})$	$\dots$	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	$\dots$	m_i	$\dots$	m_k

① Tìm tứ phân vi Q_1 và Q_3 theo công thức:

$$Q_r = a_p + \frac{\frac{r \cdot n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó $[a_p; a_{p+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ r với $r = 1, 3; \quad n$ là cỡ mẫu.

② Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

≡ Bài 1. Bảng sau thống kê cân nặng của 50 quả xoài được lựa chọn ngẫu nhiên sau khi thu hoạch ở một nông trường.

Cân nặng (g)	[250;290)	[290;330)	[330;370)	[370;410)	[410;450)
Số quả xoài	3	13	18	11	5

Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.

Bài 2. Bảng sau đây cho biết chiều cao của các học sinh lớp 12A và 12B.

Chiều cao (cm)	[145;150)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh của lớp 12A	1	0	15	12	10	5
Số học sinh của lớp 12B	0	0	17	10	9	6

- a) Tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị cho các mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh lớp 12A, 12B.
- b) Để so sánh độ phân tán về chiều cao của học sinh hai lớp này ta nên dùng khoảng biến thiên hay khoảng tứ phân vị? Vì sao?

Bài 3. Hằng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

Thời gian(phút)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)	[30;33)
Số lần	22	38	27	8	4	1

- a) Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)
- b) Biết rằng trong 100 lần đi trên, chỉ có đúng một lần ông Thắng đi hết 32 phút. Thời gian của lần đi đó có phải là giá trị ngoại lệ không?

Bài 4.

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 42 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét). Tính khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười nếu cần).

⚠ Tần số tích lũy của nhóm thứ m chính bằng

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m$$

Trong đó, $n_1, n_2, \dots, n_m$ lần lượt là tần số của nhóm thứ 1, thứ 2, ..., thứ m .

Nhóm	Tần số	Tần số tích lũy
[40;45)	5	5
[45;50)	10	15
[50;55)	7	22
[55;60)	9	31
[60;65)	7	38
[65;70)	4	42
	$n = 42$	

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Khảo sát về cân nặng của các học sinh lớp 11D3 người ta được một mẫu dữ liệu ghép nhóm như sau

Cân nặng	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)
Số học sinh	2	10	16	8	2	2

Khoảng tứ phân vị của bảng số liệu ghép nhóm trên là

- A. 17. B. 14.5. C. 14. D. 17.5.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 2. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là

- A. $\frac{25}{7}$. B. $\frac{13}{7}$. C. $\frac{20}{7}$. D. $\frac{55}{7}$.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 3. Trung tâm ngoại ngữ thông kê bảng điểm môn Tiếng Anh của một khóa học trong bảng bên dưới

Điểm	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Học viên	10	30	55	42	9

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này là (làm tròn đến hàng phần trăm)

D. 3,92.

Câu 4. Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

Hãy xác định khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho (làm tròn đến hàng phần trăm).

D. 3,36.

Câu 5. Ở một phòng điều trị nội trú của bệnh viện, dữ liệu thống kê thời gian ngủ hằng đêm của một bệnh nhân trong suốt một tháng được tổng hợp bởi bảng dưới đây

Thời gian (phút)	Tần số	Tần số tích lũy
[180;240)	2	2
[240;300)	9	11
[300;360)	12	23
[360;420)	5	28
[420;480)	2	30

A. 75,53.

B. 84,83.

C. 80,83.

D. 72,53.

.....

.....

.....

.....

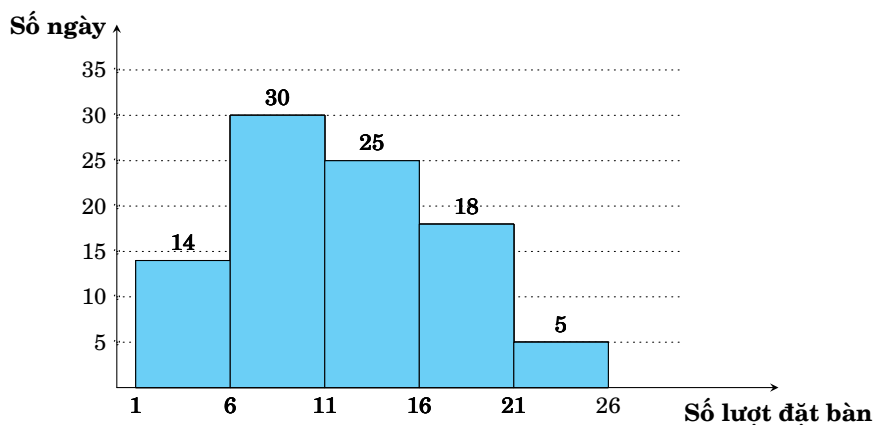
.....

.....

.....

.....

Câu 6. Biểu đồ dưới đây biểu diễn số lượt khách hàng đặt bàn qua hình thức trực tuyến mỗi ngày trong quý III năm 2022 của một nhà hàng. Cột thứ nhất biểu diễn số ngày có từ 1 đến dưới 6 lượt đặt bàn; cột thứ hai biểu diễn số ngày có từ 6 đến dưới 11 lượt đặt bàn;...



Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi biểu đồ trên.

A. 9,5.

B. 8,5.

C. 10,5.

D. 7,5.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 7. Kết quả đo chiều cao của 100 cây keo 3 năm tuổi tại một nông trường được cho ở bảng sau

Chiều cao (m)	[8,4;8,6)	[8,6;8,8)	[8,8;9,0)	[9,0;9,2)	[9,2;9,4)
Số cây	5	12	25	44	14

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu này là $R = 1$.
b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $Q_1 = 8$.
c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta Q = 0,286$.
d) Biết rằng trong 100 cây keo trên có 1 cây cao 8,4 m. Chiều cao của cây keo này là giá trị ngoại lệ.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8.

Bảng bên biểu diễn mẫu số liệu ghép nhóm thống kê mức lương của một công ty (đơn vị: triệu đồng).

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu này là $R = 25$.
b) Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là $Q_1 = 15$.
c) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $Q_3 = 27$.
d) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta Q = 12$.

Nhóm	Tần số
[10;15)	15
[15;20)	18
[20;25)	10
[25;30)	10
[30;35)	5
[35;40)	2
	$n = 60$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

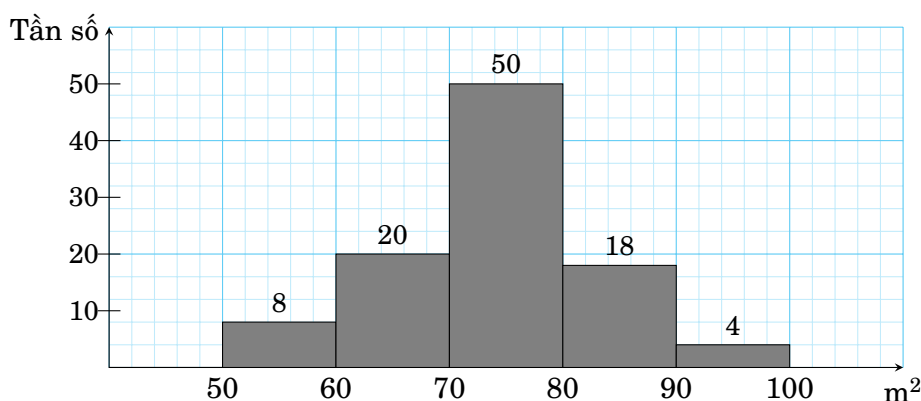
.....

.....

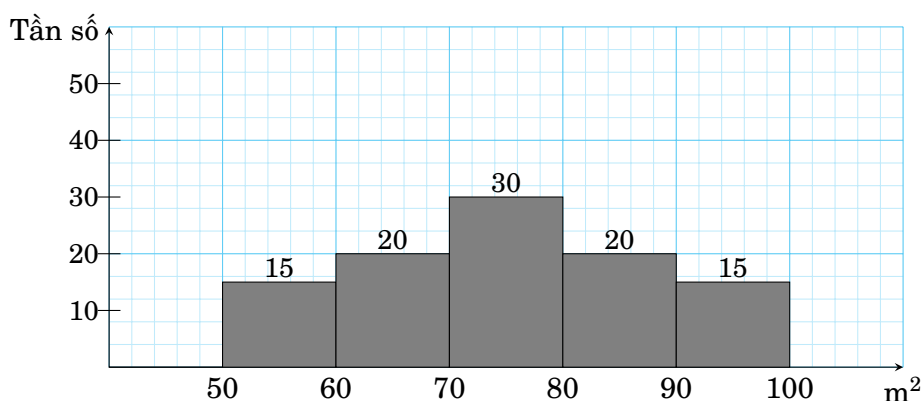
.....

.....

Câu 9. Điều tra một số hộ gia đình thu nhập ở mức trung bình sinh sống trên hai địa bàn A, B, người ta thấy diện tích nhà ở của họ đều nhỏ hơn 100 m^2 . Hai biểu đồ dưới biểu diễn kết quả thống kê.



Hình 3.3a. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn A



Hình 3.3b. Diện tích nhà ở của cư dân địa bàn B

- a) Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu này bằng nhau.
b) Khoảng tứ phân vị ghép nhóm diện tích căn hộ của địa phương A là 10,9.
c) Khoảng tứ phân vị ghép nhóm diện tích căn hộ của địa phương B là 8,5..
d) Số liệu về diện tích nhà ở của cư dân thuộc địa bàn A phân tán hơn địa bàn B.



Câu 10. Bảng tần số ghép nhóm dưới đây thể hiện kết quả điều tra về tuổi thọ trung bình của nam giới và nữ giới ở 50 quốc gia.

Giới tính Nhóm (Tuổi thọ)	Nam	Nữ
[50;55)	4	3
[55;60)	7	4
[60;65)	4	5
[65;70)	6	3
[70;75)	15	7
[75;80)	12	14
[80;85)	2	13
[85;90)	0	1

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu về độ tuổi trung bình của nam giới là 50.
b) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu về độ tuổi trung bình của nam giới là 14,75.
c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu về độ tuổi trung bình của nữ giới là 15.
d) Dựa vào khoảng tứ phân vị thì tuổi thọ trung bình của nam giới đều hơn tuổi thọ trung bình của nữ giới.

§2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

⚙ **Phương sai:** Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2 , được tính bởi công thức

$$S^2 = \frac{1}{n} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2],$$

trong đó: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ là cỡ mẫu; $\bar{x} = \frac{1}{n}(n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k)$ là số trung bình.

⚙ **Độ lệch chuẩn:** Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S , là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là $S = \sqrt{S^2}$.

⚙ **Ý nghĩa:**

- ✓ Phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai (độ lệch chuẩn) của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm xung quanh số trung bình của mẫu số liệu. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.
- ✓ Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

CHÚ Ý

(a) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau:

$$S^2 = \frac{1}{n} (n_1c_1^2 + n_2c_2^2 + \dots + n_kc_k^2) - \bar{x}^2.$$

(b) Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} [n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(c_k - \bar{x})^2].$$



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tính trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên được tính bằng công thức

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k)$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm cân nặng trung bình của học sinh lớp 11D cho trong bảng sau:

Cân nặng	$[40,5; 45,5)$	$[45,5; 50,5)$	$[50,5; 55,5)$	$[55,5; 60,5)$	$[60,5; 65,5)$	$[65,5; 70,5)$
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Bài 2. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	$[150; 155)$	$[155; 160)$	$[160; 165)$	$[165; 170)$	$[170; 175)$
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.
 b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mẫu số liệu với cỡ mẫu n được cho dưới bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	...	c_k
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

Số trung bình $\bar{x}$ của mẫu số liệu trên được tính bằng công thức nào sau đây

A. $\bar{x} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_k}{n}$.

B. $\bar{x} = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{n}$.

C. $\bar{x} = \frac{n_1 u_1 + n_2 u_2 + \dots + n_k u_k}{n}$.

D. $\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_k c_k}{n}$.

Câu 2. Khảo sát về cân nặng của các học sinh lớp 11D3 người ta được một mẫu dữ liệu ghép nhóm như sau:

Cân nặng	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)
Số học sinh	2	10	16	8	2	2

Số trung bình của mẫu số liệu trên là

A. 56.

B. 50.

C. 60.

D. 55.

Câu 3. Thống kê về thời lượng mỗi trận đấu bi-a trong vòng tứ kết giải đấu European Open người ta được mẫu số liệu ghép nhóm như sau

Thời gian	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số trận	3	12	15	24	2

Số trung bình của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào sau đây

A. 17.

B. 17,5.

C. 18.

D. 18,5.

Câu 4. Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng)

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.** $[7;9)$. **B.** $[9;11)$. **C.** $[11;13)$. **D.** $[13;15)$.

Câu 5. Trung tâm ngoại ngữ thống kê bảng điểm môn Tiếng Anh của một khóa học trong bảng bên dưới

Điểm	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Học viên	10	30	55	42	9

Số trung bình của mẫu số liệu thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A.** $[8; 10)$. **B.** $[4; 6)$. **C.** $[2; 4)$. **D.** $[6; 8)$.



DT

2

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

- ① Xác định cỡ của mẫu số liệu;
- ② Tính số trung bình của mẫu số liệu;
- ③ Áp dụng công thức tính phương sai và độ lệch chuẩn.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cân nặng của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau:

Cân nặng (kg)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)
Số quả mít	6	12	19	9	4

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên. (Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần trăm.)



111,6	134,9	130,3	134,2	140,9	109,3	154,4	156,3	116,1	96,7
105,2	80,8	80,8	110	109	139	145	161	126	114

- Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.
- Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[80;98)$ và độ dài mỗi nhóm bằng 18. Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hãy tính sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.



Bài 3. Thầy Tuấn thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp 11A và 11B ở bảng sau:

Điểm trung bình	[5;6)	[6;7)	[7;8)	[8;9)	[9;10)
Số học sinh lớp 11A	1	0	11	22	6
Số học sinh lớp 11B	0	6	8	14	12

- a) Nếu so sánh theo khoảng biến thiên thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?
- b) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh lớp nào có điểm trung bình ít phân tán hơn?

≡ Bài 4. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120;122)	[122;124)	[124;126)	[126;128)	[128;130)
Số ngày giao dịch của cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Số ngày giao dịch của cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn.

Theo quan điểm trên, hãy so sánh độ rủi ro của cổ phiếu A và cổ phiếu B.



Câu 4. Bạn Chi rất thích nhảy hiện đại. Thời gian tập nhảy mỗi ngày trong thời gian gần đây của bạn Chi được thống kê lại ở bảng sau

Thời gian (phút)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)	[40;45)
Số ngày	6	6	4	1	1

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 31,77.

B. 32.

C. 31.

D. 31,44.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 5. Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau

Quãng đường (km)	[2,7;3,0)	[3,0;3,3)	[3,3;3,6)	[3,6;3,9)	[3,9;4,2)
Số ngày	3	6	5	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. 3,41.

B. 11,62.

C. 0,017.

D. 0,36.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Câu 6. Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần tập luyện giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau

Thời gian giải rubik (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số ngày	4	6	8	4	3

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A.** 5,98. **B.** 6. **C.** 2,44. **D.** 2,5.

Câu 7. Để đánh giá chất lượng một loại pin điện thoại mới, người ta ghi lại thời gian nghe nhạc liên tục của điện thoại được sạc đầy pin cho đến khi hết pin cho kết quả sau

Thời gian (giờ)	[5;5,5)	[5,5;6)	[6;6,5)	[6,5;7)	[7;7,5)
Số chiếc điện thoại (tần số)	2	8	15	10	5

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến 4 chữ số thập phân).

- A.** 0,4252. **B.** 0,5314. **C.** 0,6214. **D.** 0,5268.

