

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT ĐÀO SƠN TÂY



TÀI LIỆU HỌC TẬP MÔN TOÁN 11
NĂM HỌC 2023 - 2024

Họ và tên:

Lớp:

Tài liệu lưu hành nội bộ

Mục lục

Chương 6. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT	1
Bài 1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA	1
(A) KIẾN THỨC CẦN NHỚ	1
(B) BÀI TẬP MẪU	2
(C) BÀI TẬP	3
Bài 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT	4
(A) KIẾN THỨC CẦN NHỚ	4
(B) BÀI TẬP MẪU	5
(C) BÀI TẬP	7
Bài 3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT	8
(A) KIẾN THỨC CẦN NHỚ	8
(B) VÍ DỤ	9
(C) BÀI TẬP	9
Bài 4. Phương trình, bất phương trình mũ, lôgarit	11
(A) Kiến thức cần nhớ	11
(B) Bài tập mẫu	12
(C) Bài tập	14
Bài 5. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI	15
(A) TRẮC NGHIỆM	15
(B) TỰ LUẬN	16
Chương 7. ĐẠO HÀM	18
Bài 1. ĐẠO HÀM	18
(A) KIẾN THỨC CẦN NHỚ	18
(B) VÍ DỤ	19
(C) BÀI TẬP	20
Bài 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	21

(A)	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	21
(B)	VÍ DỤ.....	22
(C)	BÀI TẬP.....	23
Bài 3.	ÔN TẬP CHƯƠNG VII	24
(A)	TRẮC NGHIỆM.....	24
(B)	TỰ LUẬN.....	24
Chương 8.	QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN	26
Bài 1.	HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	26
(A)	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	26
(B)	BÀI TẬP MẪU.....	26
(C)	BÀI TẬP.....	26
Bài 2.	ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG	27
(A)	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	27
(B)	Bài tập mẫu.....	28
(C)	Bài tập.....	31
Bài 3.	HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC	32
(A)	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	32
(B)	VÍ DỤ.....	35
(C)	BÀI TẬP.....	38
Bài 4.	Khoảng cách trong không gian	39
(A)	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	39
(B)	BÀI TẬP MẪU.....	40
(C)	BÀI TẬP.....	43
Bài 5.	GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN	44
(A)	Kiến thức cần nhớ.....	44
(B)	Bài tập mẫu.....	45
Bài 6.	Bài tập cuối chương VIII	46
(A)	TRẮC NGHIỆM.....	46
(B)	Tự luận.....	48

Chương 9.	XÁC SUẤT	49
------------------	-----------------	-----------

Bài 1. BIẾN CỐ GIAO VÀ QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT	49
Ⓐ Kiến thức cần nhớ.....	49
Ⓑ Bài tập mẫu.....	50
Bài 2. BIẾN CỐ HỢP VÀ QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT	52
Ⓐ Kiến thức cần nhớ.....	52
Ⓑ Bài tập mẫu.....	52
Ⓒ Bài tập.....	53



Chương 6

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài 1

PHÉP TÍNH LŨY THỪA

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

☑ Lũy thừa với số mũ nguyên dương:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số}} \quad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*).$$

☑ Lũy thừa với số mũ nguyên âm, số mũ 0:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^0 = 1 \quad (n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}, a \neq 0).$$

2. Căn bậc n

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geq 2$.

☑ Số a là **căn bậc n** của số b nếu $a^n = b$.

☑ Sự tồn tại căn bậc n :

— Nếu n lẻ thì có duy nhất một căn bậc n của b , kí hiệu $\sqrt[n]{b}$.

— Nếu n chẵn thì:

+ $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b .

+ $b = 0$: có một căn bậc n của b là 0.

+ $b > 0$: có hai căn bậc n của b đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$ và giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

— Các tính chất:

$$+ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$+ \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

$$+ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$+ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$+ (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Ta có

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

4. Luỹ thừa với số mũ vô tỉ

Giả sử a là một số dương, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim r_n = \alpha$. Khi đó $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$.

5. Tính chất của phép tính lũy thừa

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

$$\textcircled{v} a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$$

$$\textcircled{v} (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$$

$$\textcircled{v} \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$

$$\textcircled{v} \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

$$\textcircled{v} (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$

B BÀI TẬP MẪU

❖ Ví dụ 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}$; b) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$; c) $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}}$;
d) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}$; e) $(\sqrt[5]{3})^6 + \sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}$.

💬 Lời giải.

- a) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27} = \sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3} = \sqrt[5]{3^5} = 3$;
b) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$;
c) $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{9}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{3^3} \cdot 3^2} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{3^5}} = \sqrt[5]{3} \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{3} \sqrt[5]{3^5} = \sqrt[3]{3} \sqrt[5]{3^5} = \sqrt[3]{3}$;
d) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3^4 \cdot 2} - \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2} + 3\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$;
e) $(\sqrt[5]{3})^6 + \sqrt[4]{\sqrt[5]{81}} = \sqrt[5]{3^6} + \sqrt[4]{\sqrt[5]{3^4}} = 3\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{3} = 4\sqrt[5]{3}$.

□

❖ Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $\frac{3^{\pi+1}}{3^{\pi-1}}$; b) $(4^{\sqrt{27}})^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$;
c) $3^{2+2\sqrt{3}} \cdot 3^{2-2\sqrt{3}}$; d) $\left(a^{\sqrt{3}} b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (a > 0, b > 0)$.

💬 Lời giải.

- a) $\frac{3^{\pi+1}}{3^{\pi-1}} = 3^{\pi+1-(\pi-1)} = 3^2 = 9$;
b) $(4^{\sqrt{27}})^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = (4^{3\sqrt{3}})^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$;
c) $3^{2+2\sqrt{3}} \cdot 3^{2-2\sqrt{3}} = 3^{2+2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}} = 3^4 = 81$;

$$d) \left(a^{\sqrt{3}} b^{-\frac{6}{\sqrt{3}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = a^{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} b^{-\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = ab^{-2} = \frac{a}{b^2}.$$

❖ **Ví dụ 3.** Biết rằng $4^x = 5$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{8^x - 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$.

💬 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \frac{8^x - 8^{-x}}{2^x - 2^{-x}} &= \frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{(2^x - 2^{-x})(2^{2x} + 2^x 2^{-x} + 2^{-2x})}{2^x - 2^{-x}} = 2^{2x} + 2^x 2^{-x} + 2^{-2x} \\ &= 4^x + 1 + 4^{-x} = 4^x + 1 + \frac{1}{4^x} = 5 + 1 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}. \end{aligned}$$

❖ **Ví dụ 4.** Biết rằng $5^x = 10^y = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$.

💬 **Lời giải.**

Ta có $5^x = 2 \Rightarrow 5 = 2^{\frac{1}{x}}$; $10^y = 2 \Rightarrow 10 = 2^{\frac{1}{y}}$.
 Từ đó, $2^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = 2^{\frac{1}{x}} : 2^{\frac{1}{y}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -1$.

C BÀI TẬP

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5}} \right)^0$;

c) $\left(-\frac{1}{3} \right)^{-4}$;

e) $2^{-8} \cdot 2^5$;

b) $\left(\frac{2}{5} \right)^{-2}$;

d) $(-55)^0$;

f) $\frac{3^4}{(3^{-2})^{-3}}$.

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{0,001}$;

c) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$;

e) $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}$;

b) $\sqrt[5]{-32}$;

d) $-\sqrt[6]{100^3}$;

f) $\sqrt[5]{(2-\sqrt{5})^5}$.

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$;

c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}$;

e) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$;

b) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$;

d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

f) $(-\sqrt[6]{4})^3$.

Bài 4. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sqrt[3]{135} - 5\sqrt[3]{5}$;

c) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{16}} + \sqrt[5]{64} + 2\sqrt[5]{2}$;

b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}} + 3\sqrt[3]{3}$;

d) $(\sqrt[4]{5})^5 - \sqrt{\sqrt[4]{25}}$.

Bài 5. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $8^{-\frac{2}{3}}$;

d) $1000^{-\frac{5}{3}}$;

f) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

b) $32^{-\frac{2}{5}}$;

e) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$;

c) $81^{1,25}$;

Bài 6. Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$):

a) $\sqrt[4]{2^{-3}}$;

c) $(\sqrt[5]{3})^4$;

e) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} : (\sqrt[6]{a})^5$;

b) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$;

d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$;

f) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$.

Bài 7. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $15^{\frac{2}{5}}$;

c) $5,7^{2,4}$;

b) $20^{-\frac{1}{2}}$;

d) $0,45^{-2,38}$.

Bài 8. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $2^{\sqrt{3}+1} : 2^{\sqrt{3}-1}$;

c) $\left[(\sqrt{7})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{8}}$;

e) $3^{3+\sqrt{2}} \cdot 3^{-1+\sqrt{2}} \cdot 9^{1-\sqrt{2}}$

b) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$;

d) $a^{2\sqrt{5}+1} : a^{2\sqrt{5}-2}$

f) $\left(a^{-\sqrt{3}}b^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Bài 9. Cho $a > 0, b > 0$. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}}\right)$;

b) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$.

Bài 10. Biết rằng $5^{2x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}}$.**Bài 11.** Biết rằng $3^\alpha + 3^{-\alpha} = 3$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $3^{\frac{\alpha}{2}} + 3^{\frac{-\alpha}{2}}$;

b) $3^{2\alpha} + 3^{-2\alpha}$.

Bài 12. Biết rằng $4^x = 25^y = 10$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.**Bài 13.** Cường độ ánh sáng tại độ sâu h (m) dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 m gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 6 m?

Bài 2

PHÉP TÍNH LÔGARIT



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm lôgarit

Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Chú ý - Từ định nghĩa, ta có

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a a^b = b; \quad a^{\log_a b} = b.$$

- $\log_{10} b$ được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$; $\log_e b$ được viết là $\ln b$.

2. Tính chất

Với $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$, ta có

- ☑ $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ (lôgarit của một tích).
- ☑ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ (lôgarit của một thương).
- ☑ $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) (lôgarit của một lũy thừa).

Chú ý: Đặc biệt, ta có

- ☑ $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$.
- ☑ $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Công thức đổi cơ số

Cho các số dương $a, b, N, a \neq 1, b \neq 1$, ta có $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$.

Đặc biệt, ta có

- ☑ $\log_a N = \frac{1}{\log_N a} (N \neq 1)$;
- ☑ $\log_{a^\alpha} N = \frac{1}{\alpha} \log_a N (\alpha \neq 0)$.

B BÀI TẬP MẪU

✧ **Ví dụ 1.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_3 9^{\frac{1}{5}}$;

b) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$;

c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}}$;

💬 **Lời giải.**

a) $\log_3 9^{\frac{1}{5}} = \log_3 3^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$;

b) $\log \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \log 10^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$;

$$c) \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{3}} = (5^{-2})^{\log_5 \frac{1}{3}} = 5^{-2\log_5 \frac{1}{3}} = (5^{\log_5 \frac{1}{3}})^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9.$$

□

❖ Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_3 45 + \log_3 \frac{1}{5}$;

b) $\log_4 48 - \log_4 3$;

c) $\log_2 \frac{16}{3} + 2\log_2 \sqrt{6}$;

d) $\frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7}$.

💬 Lời giải.

a) $\log_3 45 + \log_3 \frac{1}{5} = \log_3 \left(45 \cdot \frac{1}{5}\right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$;

b) $\log_4 48 - \log_4 3 = \log_4 \frac{48}{3} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$;

c) $\log_2 \frac{16}{3} + 2\log_2 \sqrt{6} = \log_2 \frac{16}{3} + \log_2 6 = \log_2 \left(\frac{16}{3} \cdot 6\right) = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$;

d)

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7} &= \frac{1}{3}(\log_3 9 - \log_3 7) + \log_3 7^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3}(\log_3 9 - \log_3 7) + \log_3 7^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\log_3 3^2 - \frac{1}{3}\log_3 7 + \frac{1}{3}\log_3 7 = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

□

❖ Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_9 \frac{1}{27}$;

b) $\log_8 9 \cdot \log_{27} \frac{1}{16}$;

c) $\log_4 27 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8$.

💬 Lời giải.

a) $\log_9 \frac{1}{27} = \frac{\log_3 \frac{1}{27}}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^{-3}}{\log_3 3^2} = -\frac{3}{2}$;

b)

$$\begin{aligned} \log_8 9 \cdot \log_{27} \frac{1}{16} &= \frac{\log_2 9}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 \frac{1}{16}}{\log_2 27} = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2^3} \cdot \frac{\log_2 2^{-4}}{\log_2 3^3} \\ &= \frac{2\log_2 3}{3\log_2 2} \cdot \frac{-4\log_2 2}{3\log_2 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-4}{3} = -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \log_4 27 \cdot \log_3 5 \cdot \log_{25} 8 &= \frac{\log_2 27}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 25} \\ &= \frac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 5^2} \\ &= \frac{3\log_2 3}{2\log_2 2} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{3\log_2 2}{2\log_2 5} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

□

❖ Ví dụ 4. Biết rằng $2\log 2 = a, \log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

a) $\log 18$;

b) $\log_2 12$;

c) $\log 75$.

💬 Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\log 2 = \frac{a}{2}$.

a) $\log 18 = \log (2 \cdot 3^2) = \log 2 + 2\log 3 = \frac{a}{2} + 2b$;

b) $\log_2 12 = \frac{\log 12}{\log 2} = \frac{\log (2^2 \cdot 3)}{\log 2} = \frac{2\log 2 + \log 3}{\log 2} = \frac{a + b}{\frac{a}{2}} = \frac{2(a + b)}{a}$;

c) Ta có $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \frac{a}{2}$.

Suy ra $\log 75 = \log (3 \cdot 5^2) = \log 3 + 2\log 5 = b + 2\left(1 - \frac{a}{2}\right) = 2 - a + b$.

□

C BÀI TẬP

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30$;

b) $\log_5 75 - \log_5 3$;

c) $\log_3 \frac{5}{9} - 2\log_3 \sqrt{5}$;

d) $4\log_{12} 2 + 2\log_{12} 3$;

e) $2\log_5 2 - \log_5 4\sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$;

f) $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2\log_3 \sqrt[4]{27}$.

Bài 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_8 \frac{1}{32}$;

b) $\log_5 3 \cdot \log_3 5$;

c) $2^{\frac{1}{\log_5 2}}$;

d) $\log_{27} 25 \cdot \log_5 81$.

Bài 3. Tính:

a) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$;

b) $\log_2 \frac{1}{25} \cdot \log_3 \frac{1}{32} \cdot \log_5 \frac{1}{27}$.

Bài 4. Sử dụng máy tính cầm tay, tính (làm tròn đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $\log_7 21$;

b) $\log 2,25$;

c) $\ln \sqrt{14}$;

d) $\log_{0,5} 3 + \log_5 0,3$.

Bài 5. Đặt $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Hãy biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

a) $\log_2 45$;

b) $\log_2 \frac{\sqrt{15}}{6}$;

c) $\log_3 20$.

Bài 6. Đặt $\log x = a, \log y = b, \log z = c, (x, y, z > 0)$. Biểu thị các biểu thức sau theo a, b, c .

a) $\log(xyz)$;

b) $\log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}}$

c) $\log_z (xy^2), (z \neq 1)$.

Bài 7. Đặt $\log_2 3 = a, \log_3 15 = b$. Biểu thị $\log_{30} 18$ theo a và b .



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số mũ

☑ Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là **hàm số mũ** cơ số a .

☑ Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) có

- Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị là $T = (0; +\infty)$.
- Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:

+ Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và

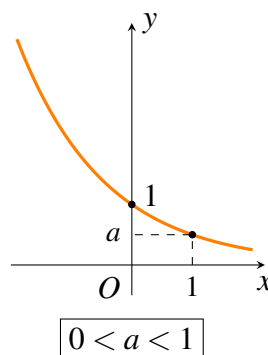
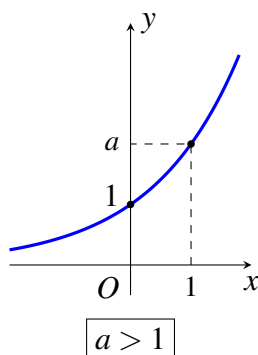
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0.$$

+ Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty.$$

— Đồ thị:

- + Cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$, đi qua điểm $(1; a)$.
- + Nằm phía trên trục hoành.



2. Hàm số lôgarit

☑ Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là **hàm số lôgarit** cơ số a .

☑ Hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) có

- Tập xác định là $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị là $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.
- Sự biến thiên:

+ Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và

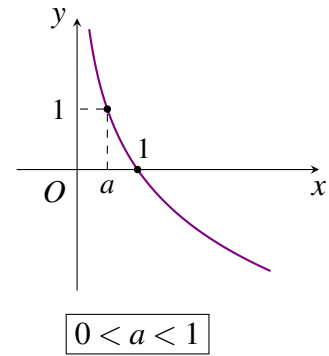
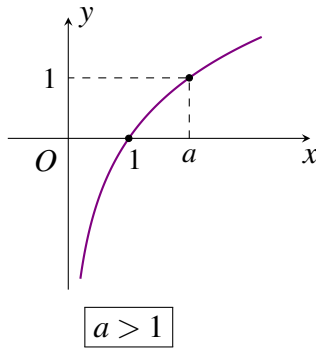
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty.$$

+ Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty.$$

— Đồ thị của hàm số

- + Cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$, đi qua điểm $(a; 1)$.
- + Nằm bên phải trục tung.



B VÍ DỤ

Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Bài 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{0,5} x$.

Bài 3. So sánh các cặp số sau

a) $0,75^{-0,1}$ và $0,75^{-0,2}$;

b) $\sqrt[3]{4}$ và $\sqrt[5]{8}$;

c) $\sqrt[4]{\frac{1}{27}}$ và $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$.

Bài 4. So sánh các cặp số sau

a) $\log_{0,2} \pi$ và $\log_{0,2} 3$;

b) $4\log_3 2$ và $3\log_3 \sqrt[3]{15}$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = f(x) = 2^x$ trên đoạn $[-2; 3]$;

b) $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

C BÀI TẬP

Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = (\sqrt{2})^x$.

Bài 2. Vẽ đồ thị hàm số $\log_{\frac{3}{2}} x$.

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \log_2 (x - 4)$.

b) $y = \log_{0,2} (x^2 + 2x + 1)$.

c) $y = \log_5 \frac{x}{x-1}$.

Bài 4. So sánh các cặp số sau

a) $1,04^{1,7}$ và $1,04^2$.

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ và $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

c) $1,2^{0,3}$ và $0,9^{1,8}$.

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4}$ và $3^{-0,2}$.

Bài 5. So sánh các cặp số sau

a) $\sqrt{3}$ và $\sqrt[5]{27}$.

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^4$ và $\left(\frac{1}{27}\right)^3$.

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$ và $\sqrt[5]{25}$.

d) $\sqrt[9]{0,7^{10}}$ và $\sqrt[10]{0,7^9}$.

Bài 6. So sánh các cặp số sau

a) $\log 4,9$ và $\log 5,2$.

b) $\log_{0,3} 0,7$ và $\log_{0,3} 0,8$.

c) $\log_{\pi} 3$ và $\log_3 \pi$.

Bài 7. So sánh các cặp số sau

a) $2\log_{0,6} 5$ và $3\log_{0,6}(2\sqrt[3]{3})$.

b) $6\log_5 2$ và $2\log_5 6$.

c) $\frac{1}{2}\log_2 121$ và $2\log_2 2\sqrt{3}$.

d) $2\log_3 7$ và $6\log_9 4$.

Bài 8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$ trên đoạn $[-1; 4]$.

b) $y = f(x) = \frac{1}{3^x}$ trên đoạn $[-2; 2]$

Bài 9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = f(x) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

b) $y = f(x) = \log_2(x+1)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 3\right]$.

Bài 10. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t$ (mg), trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$.

b) Biết rằng bệnh nhân đã uống 100 mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80 mg. Hãy xác định giá trị của D_0 và a .

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

A Kiến thức cần nhớ

1. Phương trình mũ cơ bản

$$a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1)$$

- ☑ Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- ☑ Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

⚠ Với $a > 0, a \neq 1$

a) $a^x = a^\alpha \Leftrightarrow x = \alpha$.

b) Tổng quát hơn, $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

2. Phương trình lôgarit cơ bản

$$\log_a x = b \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

⚠ Với $a > 0, a \neq 1$.

a) $\log_a u(x) = b \Leftrightarrow u(x) = a^b$

b) $\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases}$

Có thể thay $u(x) > 0$ bằng $v(x) > 0$ (chọn bất phương trình đơn giản hơn).

3. Bất phương trình mũ cơ bản

$$a^x > b \text{ hoặc } a^x \geq b \text{ hoặc } a^x < b \text{ hoặc } a^x \leq b \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Bảng tổng kết về nghiệm của các bất phương trình trên:

Phương trình	$b \leq 0$	$b > 0$	
		$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^x > b$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$x > \log_a b$	$x < \log_a b$
$a^x \geq b$	Vô nghiệm $x \leq \log_a b$	$x \geq \log_a b$	$x \leq \log_a b$
$a^x < b$		$x < \log_a b$	$x > \log_a b$
$a^x \leq b$		$x \leq \log_a b$	

⚠ ☑ Nếu $a > 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.

☑ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

4. Bất phương trình lôgarit cơ bản

$\log_a x > b$ hoặc $\log_a x \geq b$ hoặc $\log_a x < b$ hoặc $\log_a x \leq b$ ($a > 0, a \neq 1$).

Bảng tổng kết về nghiệm của các bất phương trình trên:

Bất phương trình	$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x > b$	$x > a^b$	$0 < x < a^b$
$\log_a x \geq b$	$x \geq a^b$	$0 < x \leq a^b$
$\log_a x < b$	$0 < x < a^b$	$x > a^b$
$\log_a x \leq b$	$0 < x \leq a^b$	$x \geq a^b$



☑ Nếu $a > 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} v(x) > 0 \\ u(x) > v(x) \end{cases}$.

☑ Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) < v(x) \end{cases}$.



Bài tập mẫu

🔗 Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $5^{x+2} = \sqrt[3]{25}$;

b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} = 32^{x+3}$.

💬 Lời giải.

a) Ta có

$$5^{x+2} = \sqrt[3]{25} \Leftrightarrow 5^{x+2} = 5^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x+2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{4}{3}$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1} &= 32^{x+3} \Leftrightarrow (2^{-3})^{2x-1} = (2^5)^{x+3} \\ &\Leftrightarrow 2^{-6x+3} = 2^{5x+15} \\ &\Leftrightarrow -6x+3 = 5x+15 \\ &\Leftrightarrow 11x = -12 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{12}{11}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{12}{11}$.

□

🔗 Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_{16}(3x-5) = \frac{1}{2}$;

b) $\log_3 x + \log_3(x+1) = \log_3(5x+12)$.

💬 Lời giải.

a) Ta có

$$\log_{16}(3x-5) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3x-5 = 16^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 3x-5 = 4 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

b) Điều kiện $x > 0$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\log_3[x(x+1)] &= \log_3(5x+12) \Leftrightarrow x^2+x=5x+12 \\ &\Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \\ &\Leftrightarrow x=-2 \text{ hoặc } x=6.\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 6$.

□

❖ Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \frac{1}{81}$

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{3x} < 25^{1-x}.$

💬 Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \frac{1}{81} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ &\Leftrightarrow 2x+1 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow 2x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x \leq \frac{3}{2}$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{3x} < 25^{1-x} &\Leftrightarrow \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{3x} < \left(5^2\right)^{1-x} \\ &\Leftrightarrow 5^{\frac{3x}{2}} < 5^{2-2x} \\ &\Leftrightarrow -\frac{3x}{2} < 2-2x \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} < 2 \\ &\Leftrightarrow x < 4.\end{aligned}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x < 4$.

□

❖ Ví dụ 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\sqrt{5}}(x^2-4) < 2;$

b) $\log_{0,5}(2x+1) \geq \log_{0,5}(3x-4).$

💬 Lời giải.

a) Điều kiện: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x < -2$ hoặc $x > 2$.

Do $\sqrt{5} > 1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 4 < (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3.$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là $-3 < x < -2$ hoặc $2 < x < 3$.

b) Do $0 < 0,5 < 1$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 2x+1 \leq 3x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

□

C Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $3^{2x+1} = \frac{1}{27}$;

b) $5^{2x} = 10$;

c) $3^x = 18$;

d) $0,2^{x-1} = \frac{1}{\sqrt{125}}$;

e) $5^{3x} = 25^{x-2}$;

f) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{32}\right)^{x-1}$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3(2x-1) = 3$;

b) $\log_{49} x = 0,25$;

c) $\log_2(3x+1) = \log_2(2x-4)$;

d) $\log_5(x-1) + \log_5(x-3) = \log_5(2x+10)$;

e) $\log x + \log(x-3) = 1$;

f) $\log_2(\log_{81} x) = -2$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $4^x < 2\sqrt{2}$;

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x-1} \geq \frac{1}{9}$;

c) $5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x < 40$;

d) $4^{2x} < 8^{x-1}$;

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^x$;

f) $0,25^{x-2} > 0,5^{x+1}$.

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_3(x+4) < 2$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 4$;

c) $\log_{0,25}(x-1) \leq -1$;

d) $\log_5(x^2 - 24x) \geq 2$;

e) $2\log_{\frac{1}{4}}(x+1) \geq \log_{\frac{1}{4}}(3x+7)$;

f) $2\log_3(x+1) \leq 1 + \log_3(x+7)$.

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$;

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 27 = 0$.

Bài 6. Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn $(\log_3 x - 2) \cdot (\log_3 x - 1) < 0$.

Bài 7. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = f(x) = \sqrt{4 - 2^x} + \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}$;

b) $y = f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x - 2)}$.

Bài 8. Cho hàm số $y = f(x) = \log_2 x$. Biết rằng $f(b) - f(a) = 5$ ($a, b > 0$), tìm giá trị của $\frac{b}{a}$.

Bài 9. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $125^a \cdot 25^b = 3$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = 3a + 2b$$

Bài 10. Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kỳ bán rã là $T = 703800000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng Uranium-235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

Bài 11. Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililit nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 9000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 6000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1000?

Bài 12. Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A?

Bài 5

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI



A TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Biết rằng $2^a = 9$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{a}{6}}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. 3.

Câu 2. Giá trị của biểu thức $2\log_5 10 + \log_5 0,25$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 3. Cho x và y là số dương. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2^{\log x + \log y} = 2^{\log x} + 2^{\log y}$.

B. $2^{\log(x+y)} = 2^{\log x} \cdot 2^{\log y}$.

C. $2^{\log(xy)} = 2^{\log x} \cdot 2^{\log y}$.

D. $2^{\log x \cdot \log y} = 2^{\log x} + 2^{\log y}$.

Câu 4. Biết rằng $x = \log_3 6 + \log_9 4$. Giá trị của biểu thức 3^x bằng

A. 6.

B. 12.

C. 24.

D. 48.

Câu 5. Giá trị của biểu thức $(\log_2 25)(\log_5 8)$ bằng

A. 4.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 6.

D. $\frac{1}{6}$.

Câu 6. Đặt $\log 3 = a$, $\log 5 = b$. Khi đó $\log_{15} 50$ bằng

- A. $\frac{1+2b}{a+b}$. B. $\frac{a-b}{a+b}$. C. $\frac{1-b}{a+b}$. D. $\frac{1+b}{a+b}$.

Câu 7. Cho ba số $a = 4^{0,9}$, $b = 8^{0,5}$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1,6}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $c > a > b$. B. $c > b > a$. C. $a > b > c$. D. $a > c > b$.

Câu 8. Cho ba số $a = -\log \frac{1}{3}$, $b = \log \frac{1}{2}$ và $c = \frac{1}{2} \log_3 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < b < c$. B. $b < a < c$. C. $c < a < b$. D. $a < c < b$.

Câu 9. Cho $0 < a < 1$, $x = \log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt{3}$, $y = \frac{1}{2} \log_a 5$, $z = \log_a \sqrt{14} - \log_a \sqrt{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $x < y < z$. B. $y < x < z$. C. $z < x < y$. D. $z < y < x$.

Câu 10. Cho ba số $a = \log_{\frac{1}{2}} 3$, $b = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$, $c = 2^{\frac{1}{3}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < b < c$. B. $a < c < b$. C. $c < a < b$. D. $b < a < c$.

Câu 11. Giải phương trình $3^{4x} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

- A. $-\frac{1}{4}$. B. $-\frac{3}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{12\sqrt{3}}$.

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $0,3^{3x-1} > 0,09$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. D. $(0; 1)$.

Câu 13. Biết rằng $\log_3 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 x = \log_8 64$. Giá trị của x là

- A. $\frac{9}{2}$. B. 9. C. 27. D. 81.

Câu 14. Giải phương trình $\log_5 (4x+5) = 2 + \log_5 (x-4)$.

- A. 9. B. 15. C. 4. D. 5.

Câu 15. Giả sử α và β là hai nghiệm của phương trình $\log_2 x \log_2 3x = -\frac{1}{3}$. Khi đó, tích $\alpha\beta$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. 3. C. $\sqrt{3}$. D. $\log_2 3$.

B TỰ LUẬN

Bài 1. Tính giá trị của các biểu thức

a) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3^3}\right)^{\frac{1}{2}};$

b) $\log \sqrt{5} + \log \sqrt{2};$

c) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} + \log_5 \frac{9}{4} + \log_5 \frac{4}{9};$

d) $\log_2 7 \cdot \log_3 16 \cdot \log_9 3 \cdot \log_7 9.$

Bài 2. Biết rằng $x \log_5 4 = 1$. Tìm giá trị của biểu thức $4^x + 4^{-x}$.

Bài 3. Biết rằng $a = 10^x$, $b = 10^y$. Hãy biểu thị biểu thức $A = \log_{a^2} \sqrt[3]{b}$ theo x và y .

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $4^x = \sqrt{2\sqrt{2}};$

b) $9^{5x} = 27^{x-2};$

c) $\log_{81} x = \frac{1}{2};$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = \log_{\frac{1}{2}}(4x-1);$

e) $\log_5(x-2) + \log_5(x+2) = 1;$

f) $\log_x 8 = \frac{3}{4}.$

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $32^{2x} \geq 64^{x-2};$

b) $25 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+2x+2} > 4;$

c) $\log(11x+1) < 2;$

d) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(2x+1).$

Bài 6. Tính giá trị của biểu thức

$$A = \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{99}\right).$$

Bài 7. Cho α là số thoả mãn $3^\alpha - 3^{-\alpha} = 2$. Tìm giá trị của các biểu thức:

a) $3^\alpha + 3^{-\alpha};$

b) $9^\alpha - 9^{-\alpha}.$

Bài 8. Công thức $M = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ cho biết khối lượng của một chất phóng xạ sau thời gian t kể từ thời điểm nào đó (gọi là thời điểm ban đầu), M_0 là khối lượng ban đầu, T là chu kỳ bán rã của chất phóng xạ đó (cứ sau mỗi chu kỳ, khối lượng của chất phóng xạ giảm đi một nửa). Trong một phòng thí nghiệm, với khối lượng 200 g radon ban đầu, sau 16 ngày, chỉ còn lại 11 g. Chu kỳ bán rã của radon bằng bao nhiêu?

Bài 9. Công thức $\log x = 11,8 + 1,5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng x tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương 10^{-7} jun) với độ lớn M theo thang Richter của một trận động đất.

- a) Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp bao nhiêu lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter?
- b) Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng nào?

Chương 7

ĐẠO HÀM

Bài 1

ĐẠO HÀM

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

$$\text{Vậy } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số này có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a; b)$ thì ta nói nó có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, kí hiệu y' hoặc $f'(x)$.

☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$.

— Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của biến tại x_0 . Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Khi đó, $x = x_0 + \Delta x$ và

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

— Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ biểu thị tốc độ thay đổi trung bình của đại lượng y theo đại lượng x trong khoảng từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$; còn $f'(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi (tức thời) của đại lượng y theo đại lượng x tại điểm x_0 .

2. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .
- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

- Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T với đồ thị (C) của hàm số tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.
- Tiếp tuyến M_0T có phương trình là $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

B VÍ DỤ

❖ Ví dụ 1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ với $x > 0$.

b) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ với $x \neq 1$.

💬 Lời giải.

a) Với bất kì $x_0 > 0$, ta có

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + \sqrt{x} - (x_0^2 + \sqrt{x_0})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0) + \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(x + x_0 + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right) \\ &= 2x_0 + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

b) Với $x_0 \neq 1$, ta có

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x_0}{x_0-1}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x(x_0-1) - x_0(x-1)}{(x-1)(x_0-1)}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x + x_0}{(x-x_0)(x-1)(x_0-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{(x-1)(x_0-1)} \\ &= -\frac{1}{(x_0-1)^2}. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

□

❖ Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị là (H) .

a) Viết tiếp tuyến của (H) tại điểm $M \in (H)$ có $x_M = 2$.

b) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -x$.

c) Viết tiếp tuyến của (H) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(1; -1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

a) Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M có hệ số góc $f'(2) = -1$ là

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \\ \Leftrightarrow y - 2 &= -1(x - 2) \\ \Leftrightarrow y &= -x + 4. \end{aligned}$$

b) Gọi d_1 là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $M_0(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm của (H) và d_1 . Vì $d_1 \parallel d$ nên $f'(x_0) = -1$.

$$\text{Suy ra } -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 1 \text{ hoặc } x_0 - 1 = -1 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ hoặc } x_0 = 0.$$

☑ Với $x_0 = 2$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(2; 2)$ có hệ số góc $f'(2) = -1$ là

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2)(x - 2) \\ \Leftrightarrow y - 2 &= -1(x - 2) \\ \Leftrightarrow y &= -x + 4. \end{aligned}$$

☑ Với $x_0 = 0$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(0; 0)$ có hệ số góc $f'(0) = -1$ là

$$\begin{aligned} y - f(0) &= f'(0)(x - 0) \\ \Leftrightarrow y - 0 &= -1(x - 0) \\ \Leftrightarrow y &= -x \quad (\text{loại vì trùng với đường thẳng } d). \end{aligned}$$

Vậy tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng d là $d_1: y = -x + 4$.

c) Gọi a là tiếp tuyến cần tìm của (H) và $A(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm của H và a .

Phương trình tiếp tuyến a là

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

$$\text{Vì } a \text{ qua điểm } N(1; -1) \text{ nên } -1 - \frac{x_0}{x_0 - 1} = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}(1 - x_0)$$

$$\Leftrightarrow 2x_0(x_0 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ (nhận) hoặc } x_0 = 1 \text{ (loại).}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến $a: y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ hay $a: y = -x$.

□

❖ **Ví dụ 3.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 16t + 15$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$.

Lời giải.

Ta có $s'(t) = (-2t^2 + 16t + 15)' = (-2 \cdot 2t + 16) = -4t + 16$.

Vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$ là $s'(3) = -4 \cdot 3 + 16 = 4$ m/s.

□



BÀI TẬP

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = \sqrt[3]{x}$. Chứng minh rằng $y'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ($x \neq 0$).

Bài 2. Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol (P) .

a) Tại điểm $(-1; 1)$.

b) Tại giao điểm của (P) với đường thẳng $y = -3x + 2$.

Bài 3. Xét tính liên tục, sự tồn tại đạo hàm và tính đạo hàm (nếu có) của các hàm số sau đây trên $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1}{x+1} & \text{khi } x > 2. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} + 1 & \text{khi } x > 1. \end{cases}$$

Bài 4. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến đó

a) song song với đường thẳng $y = -x + 2$.

b) vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{4}x - 4$.

c) đi qua điểm $A(0; 1)$.

Bài 5. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 4$.

Bài 2

CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n, n \in \mathbb{N}^*$

Hàm số $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Nhận xét

a) Cho số thực α . Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là hàm số lũy thừa (với tập xác định $(0; +\infty)$). Công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ còn đúng khi n là số thực, tức là với số thực α bất kì

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0).$$

Với $\alpha = \frac{1}{2}$, ta nhận được công thức đã biết:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

b) Ở bài học trước, dùng định nghĩa ta tìm được các công thức tính đạo hàm:

$$\textcircled{v} (C)' = 0 \text{ (} C \text{ là hằng số);}$$

$$\textcircled{v} \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \text{ (} x \neq 0 \text{).}$$

3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

$$\textcircled{v} (\sin x)' = \cos x;$$

$$\textcircled{v} (\cos x)' = -\sin x;$$

$$\textcircled{v} (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ (} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{);}$$

$$\textcircled{v} (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \text{ (} x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{).}$$

4. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

Ta có công thức đạo hàm của các hàm số mũ và hàm số lôgarit sau:

$$\textcircled{v} (e^x)' = e^x;$$

$$\textcircled{v} (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ (} x > 0 \text{);}$$

$$\textcircled{v} (a^x)' = a^x \cdot \ln a \text{ (} a > 0, a \neq 1 \text{);}$$

$$\textcircled{v} (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \text{ (} x > 0, a > 0, a \neq 1 \text{).}$$

5. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

Cho hai hàm số $u(x)$, $v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc tập xác định. Ta có

$$\textcircled{v} (u + v)' = u' + v';$$

$$\textcircled{v} (u - v)' = u' - v';$$

$$\textcircled{v} (u \cdot v)' = u'v + v'u \quad (1);$$

$$\textcircled{v} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \text{ (với } v = v(x) \neq 0 \text{)} \quad (2).$$

Chú ý

a) Với $u = C$ (C là hằng số), công thức (1) trở thành $(C \cdot v)' = C \cdot v'$.

b) Với $u = 1$, công thức (2) trở thành $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$).

6. Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

7. Đạo hàm cấp hai

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi $x \in (a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$.

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.



VÍ DỤ

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \text{ với } x > 0;$$

$$\text{b) } y = (1 + x - 2x^2) \left(2 - x^2 + \frac{x^3}{3}\right).$$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (\sin x + 2 \cos x)(\sin x - 2 \cos x + 1)$ b) $y = \frac{\tan x + 1}{\cot x + 2}.$

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2^x + 1}{2^x - 1};$ b) $y = (3 \ln x + 2)(2 \log_2 x - 5).$

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2 + \sin 3x};$ b) $y = \ln^2(3x + 2);$
c) $y = \frac{1}{e^{3x} - 1};$ d) $y = \tan(\cot x).$

Bài 5. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

a) $y = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$ b) $y = \cos^2 x$

Bài 6. Một chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Bài 7. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

BÀI TẬP

Bài 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = -\frac{3x^2}{2} + \frac{2}{x} + \frac{x^3}{3}$ d) $y = \frac{1 - 2x}{x + 1}$ g) $y = x \ln^2 x$
b) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9)$ e) $y = xe^{2x+1}$ h) $y = \log_2(x^2 + 1)$
c) $y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x + 1}$ f) $y = (2x + 3)3^{2x+1}$

Bài 9. Cho hàm số $f(x) = 3x^3 - 4\sqrt{x}$. Tính $f(4)$, $f'(4)$, $f(a^2)$, $f'(a^2)$ (a là hằng số khác 0).

Bài 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (1 + x^2)^{20};$ b) $y = \frac{2 + x}{\sqrt{1 - x}}.$

Bài 11. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{x}{\sin x - \cos x};$ c) $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x;$
b) $y = \frac{\sin x}{x};$ d) $y = \cos(2 \sin x).$

Bài 12. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

a) $y = x \sin 2x;$ b) $y = \cos^2 x;$
c) $y = x^4 - 3x^3 + x^2 - 1.$

Bài 13. Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình $s = 100 + 2t - t^2$ trong đó thời gian được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

- a) Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng 0?
b) Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ s.

Bài 14. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^3 + 75t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ (s).

Bài 15. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = 200(x - 2)(17 - x)$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

Bài 3

ÔN TẬP CHƯƠNG VII

A TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -6)$ có hệ số góc bằng

- A. 18. B. -3. C. 7. D. 9.

Câu 2. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đạo hàm tại $x = -1$ bằng

- A. 0. B. 6. C. -6. D. -1.

Câu 3. Cho hai hàm số $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ và $g(x) = x^3 + x^2 - 2$. Bất phương trình $f''(x) - f'(x) + g'(x) - 8 \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $\left(1; \frac{10}{3}\right)$. B. $(-\infty; 1] \cup \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$.
C. $\left[1; \frac{10}{3}\right]$. D. $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

Câu 4. Hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ có đạo hàm là

- A. $y' = -\frac{1}{(3x+2)^2}$. B. $y' = -\frac{7}{(3x+2)^2}$. C. $y' = \frac{1}{(3x+2)^2}$. D. $y' = \frac{7}{(3x+2)^2}$.

Câu 5. Hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đạo hàm cấp hai tại $x = 1$ là

- A. $y''(1) = \frac{1}{4}$. B. $y''(1) = -\frac{1}{4}$. C. $y''(1) = \frac{1}{2}$. D. $y''(1) = -\frac{1}{2}$.

Câu 6. Hàm số $y = 3^{x^2+1}$ có đạo hàm là

- A. $(x^2 + 1) 3^{x^2}$. B. $(x^2 + 1) 3^{x^2+1} \ln 3$. C. $2x \cdot 3^{x^2+1} \ln 3$. D. 3^{x^2+1} .

Câu 7. Hàm số $y = \ln(\cos x)$ có đạo hàm là

- A. $\frac{1}{\cos x}$. B. $-\tan x$. C. $\tan x$. D. $\cot x$.

B TỰ LUẬN

Bài 1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{4x+1}$ tại $x = 2$;

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

b) $f(x) = x^4$ tại $x = -1$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x + 1$ có đồ thị (C) . Tìm tiếp tuyến với (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 3. Vị trí chuyển động của một vật trên đường thẳng được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 3t^3 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật đó khi $t = 1$.

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{x}(x^2 - \sqrt{x} + 1)$;

b) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 1}$;

c) $y = \frac{2x+3}{3x+2}$.

Bài 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x \sin x}{1 - \tan x}$;

c) $y = \sin^2 3x$;

b) $y = \cos \sqrt{x^2 - x + 1}$;

d) $y = \cos^2(\cos 3x)$.

Bài 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau biết rằng f và g là các hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

a) $y = f(x^3)$;

b) $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$.

Bài 7. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x^2 - mx - 5$. Tìm m để

a) $f'(x) = 0$ có nghiệm kép;

b) $f'(x) \geq 0$ với mọi x .

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$. Giải phương trình $f'(x) = -\frac{2}{3}$.

Bài 9. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau

a) $y = \frac{x-1}{x+2}$

b) $y = \sqrt{3x+2}$;

c) $y = xe^{2x}$.

Chương 8

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1

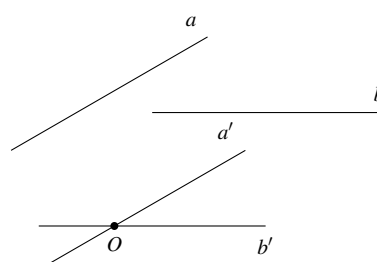
HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian, kí hiệu (a, b) là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b .

⚠ Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ 0° đến 90° .



2. Hai đường thẳng vuông góc

Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

B BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp BC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, SC . Tính góc giữa các cặp đường thẳng

a) IJ và BD ;

b) SD và BC .

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Cho biết $MN = a\sqrt{3}$, tính góc giữa AB và CD .

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SD . Chứng minh rằng $MN \perp SC$.

C BÀI TẬP

Bài 4. Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Tính góc giữa AB và DM .

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AC$, $SA \perp BC$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) SD và BC .

b) MN và SC .

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD, AC = BD, AD = BC$.

a) Chứng minh rằng đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với hai cạnh đó.

b) Chứng minh rằng hai đoạn nối các trung điểm của các cặp cạnh đối thì vuông góc với nhau

Bài 7. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N, I, J lần lượt là trung điểm của SA, SD, SC và BC . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau

a) IJ và DC ;

b) MN và IJ .

Bài 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Chứng minh hai đường thẳng OA và CD vuông góc với nhau.

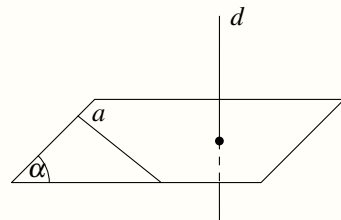
Bài 2 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa 2.1.

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong (α) , kí hiệu $d \perp (\alpha)$.



Định lý 2.1. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì $d \perp (\alpha)$.

Định lý 2.2.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

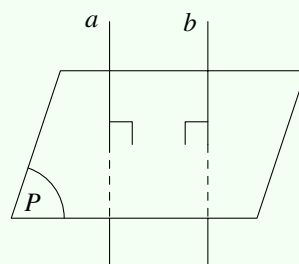
Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

2. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Định lý 2.3.

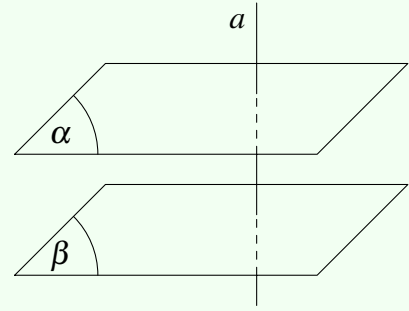
a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



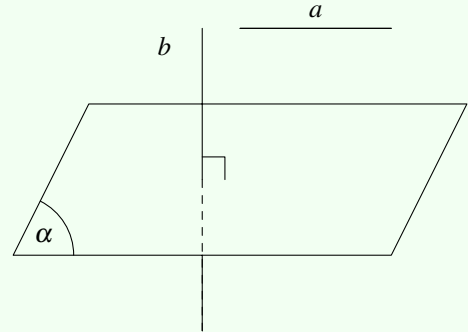
Định lý 2.4.

- a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
- b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Định lý 2.5.

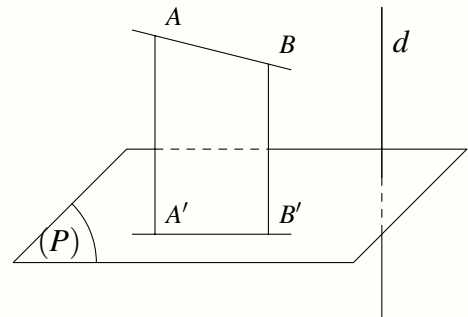
- a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .
- b) Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (α) (không chứa a) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì chúng song song với nhau.



3. Phép chiếu vuông góc

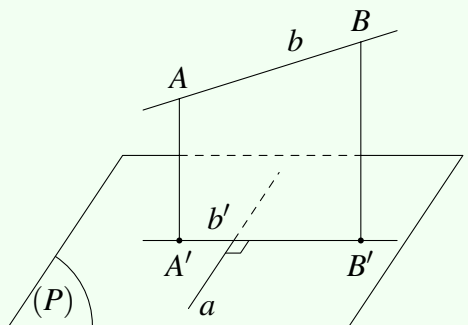
Định nghĩa 2.2.

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d vuông góc với (P) . Phép chiếu song song theo phương của d lên mặt phẳng (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên (P) .



Định lý 2.6 (Định lý ba đường vuông góc).

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .



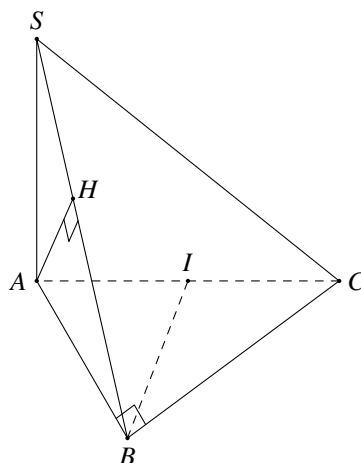
B Bài tập mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi I là trung điểm của AC . Kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$). Chứng minh rằng:

- a) SA vuông góc với các cạnh đáy;

- b) $BC \perp (SAB)$;
 c) $BI \perp (SAC)$, từ đó suy ra $BI \perp SC$;
 d) $AH \perp (SBC)$, từ đó suy ra $AH \perp SC$.

Lời giải.



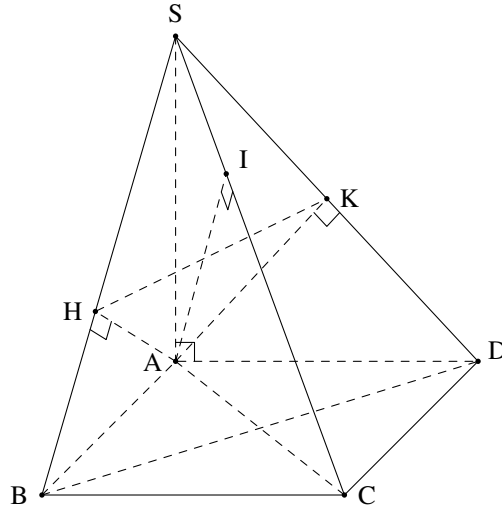
- a) Vì $SA \perp (ABC)$ và AB, BC, CA cùng nằm trong (ABC) nên $SA \perp AB, SA \perp BC, SA \perp CA$.
- b) Ta có $BC \perp AB$ (Vì $\triangle ABC$ vuông tại B) và $BC \perp SA$ (chứng minh trên), suy ra $BC \perp (SAB)$.
- c) Do $\triangle ABC$ vuông cân tại B và I là trung điểm của AC nên $BI \perp AC$. (1)
 Ta có $SA \perp (ABC)$ và $BI \subset (ABC)$, suy ra $SA \perp BI$. (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $BI \perp (SAC)$, suy ra $BI \perp SC$.
- d) Theo giả thiết ta có $AH \perp SB$. (3)
 Theo câu b) ta có $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$. (4)
 Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$.

□

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên các cạnh SB, SC và SD . Chứng minh rằng

- a) $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD), BD \perp (SAC)$.
 b) $SC \perp (AHK)$ và điểm I thuộc mặt phẳng (AHK) .
 c) $HK \perp (SAC)$ và $HK \perp AI$.

Lời giải.



- a) Ta có $BC \perp AB$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp BC$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $BC \perp (SAB)$.
Ta có $CD \perp AD$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp CD$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $CD \perp (SAD)$.
Ta có $BD \perp AC$ (vì $ABCD$ là hình vuông) và $SA \perp BD$ (vì $SA \perp (ABCD)$), suy ra $BD \perp (SAC)$.
- b) Ta có $BC \perp (SAB)$ và $AH \subset (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$.
Mặt khác $AH \perp SB$, suy ra $AH \perp (SBC)$, suy ra $AH \perp SC$. (1)
Tương tự ta có $AK \perp CD$ và $AK \perp SD$, suy ra $AK \perp (SCD)$, suy ra $AK \perp SC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHK)$.
Ta có $SC \perp (AHK)$ và $AI \perp SC$, suy ra $I \in (AHK)$.
- c) Xét $\triangle SAB$ và $\triangle SAD$, ta có:

$$\begin{cases} SA \text{ là cạnh chung;} \\ \widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90^\circ; \\ AB = AD. \end{cases}$$

Suy ra $\triangle SAB = \triangle SAD$ (c.g.c), suy ra $SB = SD, SH = SK$. Suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Vậy $HK \parallel BD$.

Theo câu a) ta có $BD \perp (SAC)$, suy ra $HK \perp (SAC)$.

Ta lại có $AI \subset (SAC)$, suy ra $HK \perp AI$.

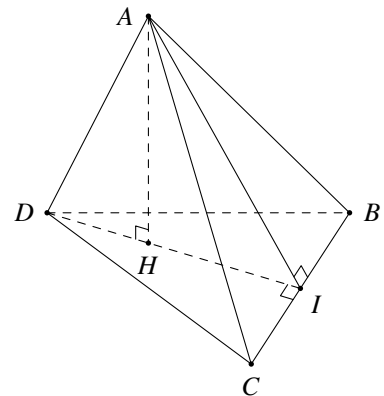
□

❖ **Ví dụ 3.** Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và BCD là các tam giác cân tại A và D . Gọi I là trung điểm của BC .

- a) Chứng minh rằng $BC \perp AD$.
- b) Kẻ AH là đường cao của tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

💬 **Lời giải.**

- a) Tam giác ABC cân tại A và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$. (1)
Tam giác DCB cân tại D và I là trung điểm của BC nên $DI \perp BC$. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AID)$, suy ra $BC \perp AD$.
- b) Ta có $AH \perp DI$ và $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (ADI)$, $AH \subset (ADI)$), suy ra $AH \perp (BCD)$.



◀ Ví dụ 4. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $SB = AB$ và $SB \perp (ABC)$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC, AB . Chứng minh rằng

- a) $AC \perp (SAB)$; b) $BH \perp (SAC)$; c) $KI \perp SA$; d) $AB \perp IH$.

🗨️ Lời giải.

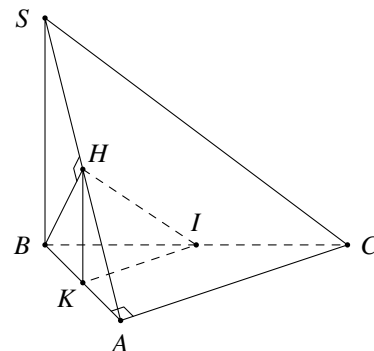
a) Ta có $AC \perp AB$ (vì $\triangle ABC$ vuông tại A) và $AC \perp SB$ (vì $SB \perp (ABC)$), suy ra $AC \perp (SAB)$.

b) Vì $SB = AB$ nên $\triangle SAB$ cân tại B . Mà H là trung điểm của SA , suy ra $BH \perp SA$. (1)

Ta cũng có $AC \perp (SAB)$ và $BH \subset (SAB)$, suy ra $AC \perp BH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$.

c) $\triangle ABC$ có K, I lần lượt là trung điểm của AB, BC nên KI là đường trung bình của $\triangle ABC$, suy ra $KI \parallel AC$. Ta lại có $AC \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp SA$.



d) $\triangle SAB$ có H, K lần lượt là trung điểm của SA, AB nên HK là đường trung bình của $\triangle SAB$, suy ra $HK \parallel SB$. Mặt khác $SB \perp AB$, suy ra $HK \perp AB$. (3)

Ta có $KI \perp (SAB)$, suy ra $KI \perp AB$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AB \perp (HIK)$, suy ra $AB \perp IH$.

C Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $a\sqrt{2}$. Biết rằng $SA = SB = SC = SD, SO = 2a\sqrt{2}$.

- a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
b) Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh A của tam giác SAC .

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD) . Chứng minh rằng H là trực tâm của $\triangle BCD$ và $AD \perp BC$.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Vẽ $AH \perp MD$ tại H .

- a) Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.
b) Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC . Chứng minh rằng $GK \perp (ABC)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, O là giao điểm của hai đường chéo, $SA = SC, SB = SD$.

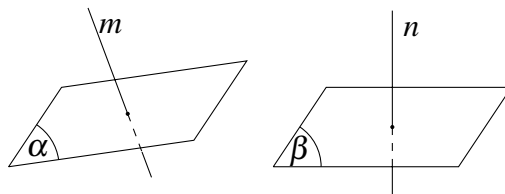
- a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BA, BC . Chứng minh rằng $IJ \perp (SBD)$.
c) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Góc giữa hai mặt phẳng

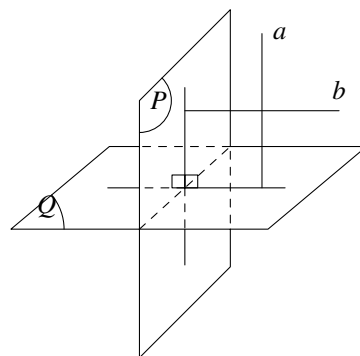
Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (α) và (β) , kí hiệu $((\alpha), (\beta))$.

Ta có: $((\alpha), (\beta)) = (m, n)$ với $m \perp (\alpha), n \perp (\beta)$ (Hình 1).



2. Hai mặt phẳng vuông góc

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc được kí hiệu là $(P) \perp (Q)$.



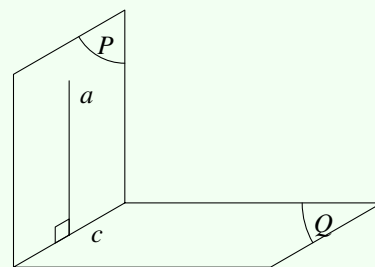
3. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Định lý 3.1. Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

4. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

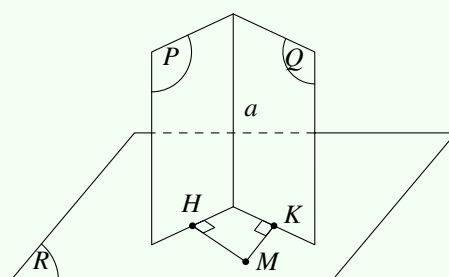
Định lý 3.2.

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



Định lý 3.3.

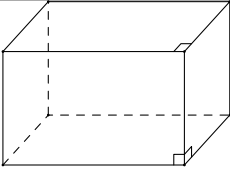
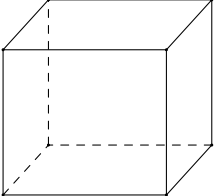
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



5. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

- ☑ **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- ☑ **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có mặt đáy là đa giác đều.
- ☑ **Hình hộp đứng** là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- ☑ **Hình hộp chữ nhật** là hình hộp đứng có mặt đáy là hình chữ nhật.
- ☑ **Hình lập phương** là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

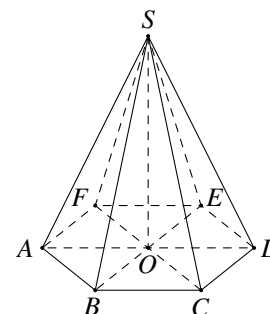
Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		☑ Cạnh bên vuông góc với hai đáy. ☑ Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		☑ Hai đáy là hai đa giác đều. ☑ Mặt bên là các hình chữ nhật. ☑ Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy.
Hình hộp đứng		☑ Bốn mặt bên là hình chữ nhật. ☑ Hai đáy là hình bình hành.

Hình hộp chữ nhật		☑ Sáu mặt bên là hình chữ nhật. ☑ Độ dài a, b, c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. ☑ Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Hình lập phương		☑ Sáu mặt là hình vuông. ☑ Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a $d = a\sqrt{3}$

6. Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

Hình chóp đều

Định nghĩa 3.1. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.



Chú ý

Hình chóp đều có

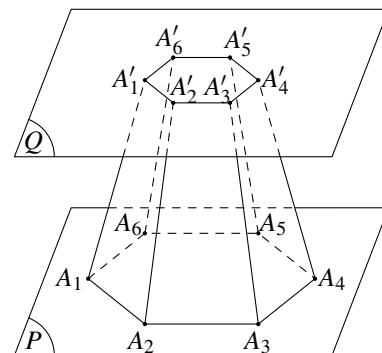
- ☑ Các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau.
- ☑ Đoạn thẳng nối từ đỉnh hình chóp đến tâm của mặt đáy thì vuông góc với mặt đáy và được gọi là đường cao của hình chóp.
- ☑ Độ dài đường cao gọi là chiều cao của hình chóp.

Hình chóp cắt đều

Định nghĩa 3.2. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cắt đều.

Trong hình chóp cắt đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6.A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5A'_6$, ta gọi:

- $A_1, A_2, \dots, A'_5, A'_6$: là các đỉnh.
- $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$: là đáy lớn.
- $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5A'_6$: là đáy nhỏ.
(hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song)



- Cạnh của hai đáy gọi là cạnh đáy. Các cặp cạnh đáy tương ứng song song từng đôi.
- Các hình thang cân $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_6A_1A'_1A'_6$: là các mặt bên.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cắt đều. Hình chóp cắt đều có các cạnh bên bằng nhau.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy gọi là đường cao. Độ dài đường cao gọi là chiều cao.

B VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

Lời giải.

Ta có: $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) và $BC \perp AB$ (giả thiết) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

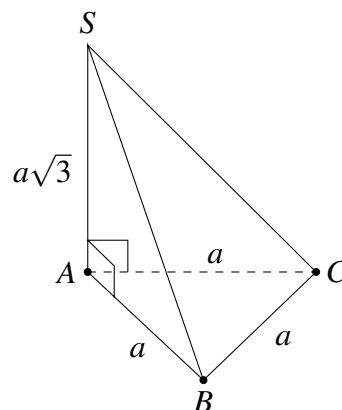
Ta lại có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \subset (ABC), AB \perp BC \\ SB \subset (SBC), SB \perp BC \text{ (chứng minh trên)} \end{cases}$

Từ (1), (2), (3) suy ra $((SBC), (ABC)) = (AB, SB)$.

Trong tam giác SAB vuông tại A ta có:

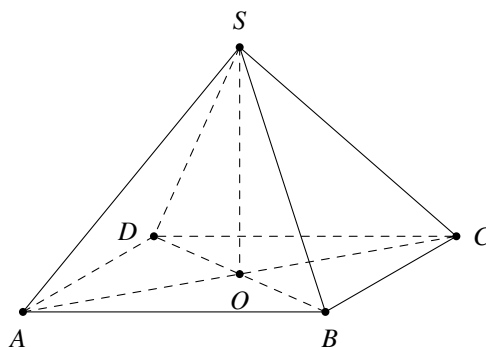
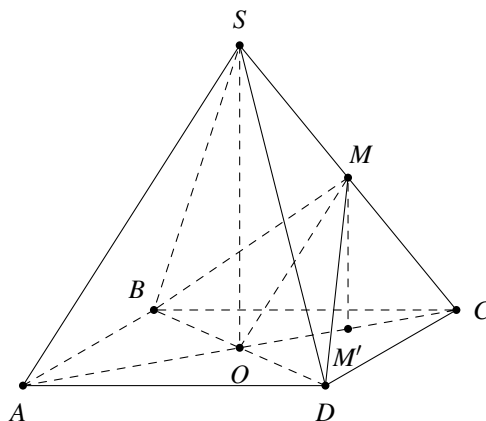
$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.



Ví dụ 2. Cho hình chóp đều $SABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SC . Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

Lời giải.



- a) Lăng trụ đứng lục giác đều có sáu mặt bên là hình chữ nhật bằng nhau với kích thước lần lượt là $a, 2a$ (Hình 11).
Vậy diện tích xung quanh của lăng trụ là

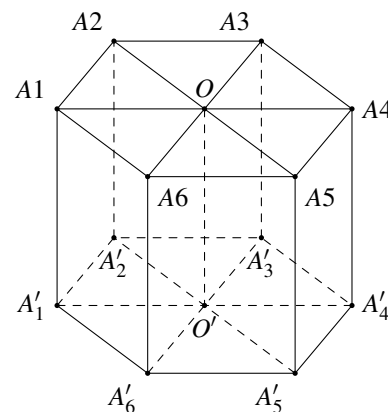
$$S_{xq} = 6 \cdot a \cdot 2a = 12a^2.$$

- b) Vì tam giác A_1A_2O đều nên $S_{\triangle A_1A_2O} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
Diện tích đáy $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ của lăng trụ là

$$S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 6 \cdot S_{\triangle A_1A_2O} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Diện tích toàn phần của lăng trụ là

$$S_{tp} = S_{xq} + 2 \cdot S_{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} = 12a^2 + 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = (12 + 3\sqrt{3})a^2.$$



❖ Ví dụ 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và có $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

💬 Lời giải.

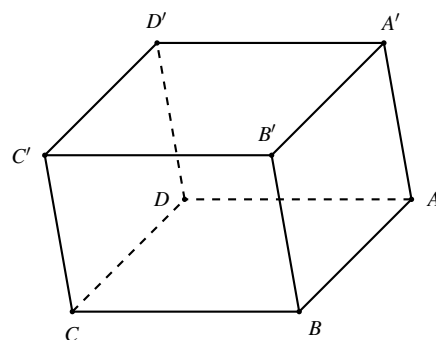
Tam giác ABD có $AD = AB = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.
Suy ra tam giác ABD là tam giác đều, nên

$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Tương tự, ta có tam giác $A'AB$ và tam giác $A'AD$ là những tam giác đều, nên

$$S_{AB'BA} = S_{D'C'CD} = S_{D'A'AD} = S_{C'B'BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy tổng diện tích các mặt của hình hộp là $S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}a^2$.



❖ Ví dụ 6. Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng $2a$, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính đường cao của hình chóp cụt và đường cao của mặt bên.

💬 Lời giải.

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H$ ($H \in OC$).

Ta có $OC = a\sqrt{2}$, $O'C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $CH = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có

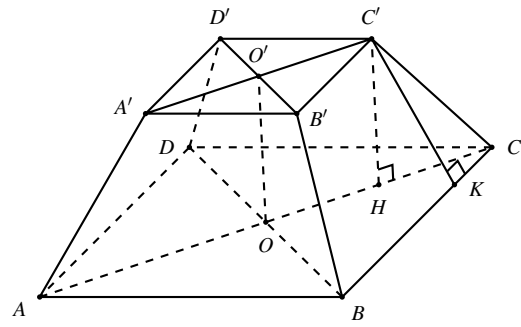
$$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Nên } OO' = C'H = a\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

Trong hình thang $BB'C'C$, vẽ đường cao $C'K$ ($K \in BC$). Ta có $CK = \frac{BC - B'C'}{2} = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CK$, ta có

$$C'K = \sqrt{CC'^2 - CK^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$



□

C BÀI TẬP

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông cân tại B và $AB \perp (BCD)$. Cho biết $BC = a\sqrt{2}$, $AB = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) .

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng $2a$. Cho biết $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Trên BC lấy điểm I sao cho tam giác SDI vuông tại S . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SDI) và $(ABCD)$ là 60° . Tính độ dài SI .

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi M là trung điểm của AC . Chứng minh $(SBM) \perp (SAC)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD . Chứng minh rằng

a) $(SBC) \perp (SAB)$;

b) $(SCD) \perp (SAD)$;

c) $(SBD) \perp (SAC)$;

d) $(SAC) \perp (AHK)$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

b) Các giao tuyến ở trên tạo thành hình gì? Tính diện tích hình đó.

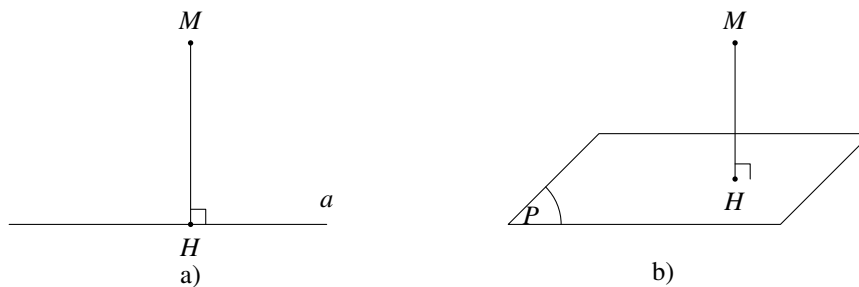
Bài 6. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 2 (m), đáy nhỏ có cạnh bằng 1 (m) và cạnh bên bằng 2 (m). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.

Bài 7. Một hộp đèn treo trần có hình dạng hình lăng trụ đứng, lục giác đều, cạnh đáy bằng 10 (cm) và cạnh bên bằng 50 (cm). Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

- ☑ Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$.
- ☑ Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến (P) , kí hiệu $d(M, (P))$.



Hình 1

Quy ước:

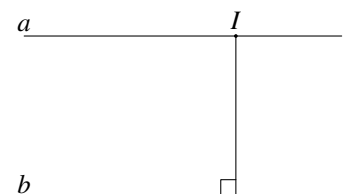
- ☑ $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc a ;
- ☑ $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc (P) .

Nhận xét:

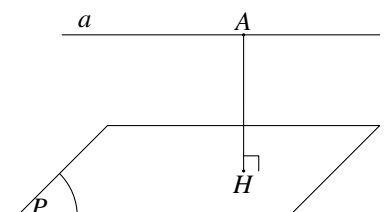
- ☑ Lấy điểm N tùy ý trên đường thẳng a , ta luôn có $d(M, a) \leq MN$.
- ☑ Lấy điểm N tùy ý trên mặt phẳng (P) , ta luôn có $d(M, (P)) \leq MN$.

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

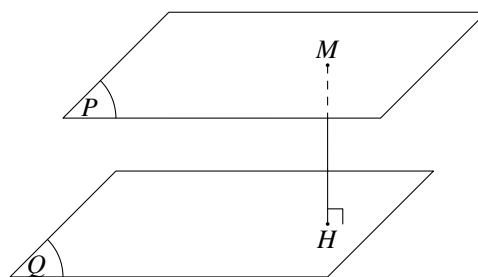
Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b , kí hiệu $d(a, b)$.



Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) , kí hiệu $d(a, (P))$.



Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì trên (P) đến (Q) , kí hiệu $d((P), (Q))$.

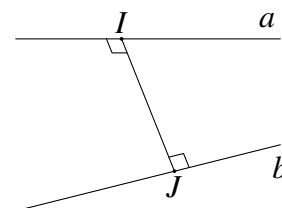


3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là đường vuông góc chung của a và b .

Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là đoạn vuông góc chung của a và b .

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.



Chú ý:

- ☑ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.
- ☑ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

4. Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp

Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước: $V = abc$.

Thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao: $V = \frac{1}{3}Sh$.

Thể tích khối chóp cụt đều có chiều cao h và diện tích hai đáy S, S' : $V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$.

Thể tích khối lăng trụ bằng tích diện tích đáy và chiều cao: $V = Sh$.

B BÀI TẬP MẪU

❖ **Ví dụ 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy bằng 30° . Gọi I là trung điểm của BC . Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng:

a) SB ;

b) SC ;

c) SI .

💬 **Lời giải.**

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $(SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 30^\circ$.
Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có

$$SA = AC \tan 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

- a) Vẽ $AH \perp SB$ ($H \in SB$), ta có $d(A, SB) = AH$. Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có

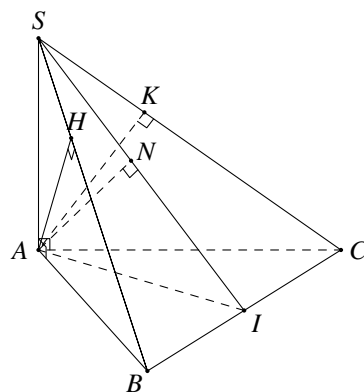
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a.$$

- b) Vẽ $AK \perp SC$ ($K \in SC$), ta có $d(A, SC) = AK$.
Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AK = a.$$

- c) Vẽ $AN \perp SI$ ($N \in SI$), ta có $d(A, SD) = AN$.
Vì ABC là tam giác đều cạnh $2a$ nên $AI = a\sqrt{3}$.
Xét tam giác SAI vuông tại A , ta có

$$\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AN = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$



❖ **Ví dụ 2.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách từ đỉnh D' đến đường chéo AC .

💬 **Lời giải.**

Gọi H là hình chiếu của D' trên AC' .

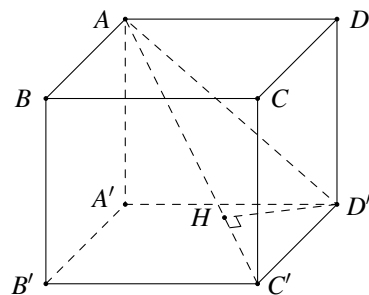
Ta có $\begin{cases} CD' \perp A'D' \\ C'D' \perp DD' \end{cases} \Rightarrow C'D' \perp (ADD'A') \Rightarrow C'D' \perp AD'.$

Do tam giác ADD' vuông cân tại D nên $AD' = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $D'AC'$ vuông tại D' , ta có

$$\frac{1}{D'H^2} = \frac{1}{D'A^2} + \frac{1}{D'C^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow D'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d(D', AC') = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.



❖ **Ví dụ 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

- a) SB và AD ;

- b) BD và SC .

💬 **Lời giải.**

a)

Vẽ đường cao AH của tam giác SAB .

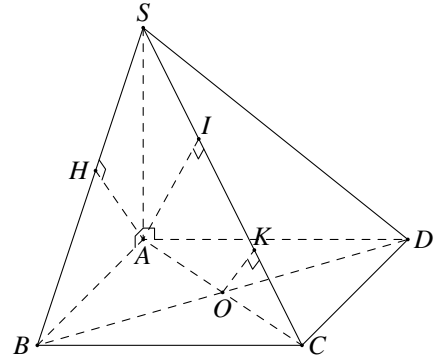
Ta có $AD \perp AB$ và $AD \perp SA \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp AH$.

Do đó AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD nên $d(SB, AD) = AH$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên $SB = a\sqrt{2}$.

AH là đường cao của tam giác SAB nên $AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AD, SB) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



b) Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $OK \perp SC, K \in SC$.

Ta có $OK \perp SC$ và $OK \perp BD$ (do $BD \perp (SAC)$) nên OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

Suy ra $d(BD, SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (với I là hình chiếu của A trên SC).

Tam giác ABC vuông tại B nên $AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A , ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $d(BD, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

□

◀ Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SB = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

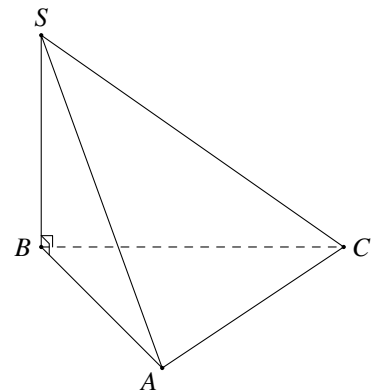
💬 Lời giải.

Diện tích tam giác đều ABC

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SB = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$



□

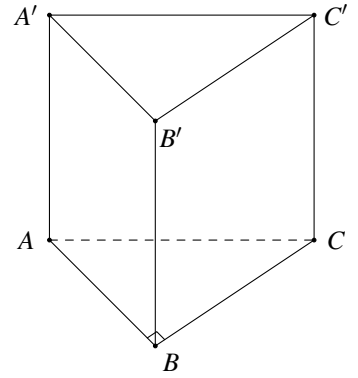
◀ Ví dụ 5. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

💬 Lời giải.

Chiều cao khối lăng trụ đứng là cạnh bên nên $h = BB' = a$.
Tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Vậy } V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{2}.$$



❖ Ví dụ 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

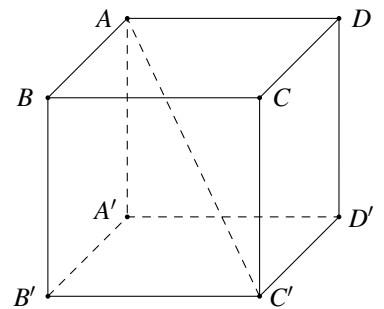
💬 Lời giải.

Đường chéo của một hình lập phương là $d = a\sqrt{3}$ với a là độ dài cạnh hình lập phương.

Để thấy rằng hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có AC' là đường chéo và cạnh là AB .

$$\text{Do đó } AC' = AB\sqrt{3} \Rightarrow AB = \frac{AC'}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a.$$

Vậy thể tích khối lập phương là $V = a^3$.



❖ Ví dụ 7. Tính thể tích của khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a$, $A'B' = a$.

💬 Lời giải.

$$\text{Diện tích tam giác đều } ABC : S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4a)^2\sqrt{3}}{4} = 4a^2\sqrt{3}.$$

$$\text{Diện tích tam giác đều } A'B'C' : S' = \frac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Thể tích khối chóp cắt

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \left(4a^2\sqrt{3} + \sqrt{4a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} \right) = \frac{21a^3\sqrt{3}}{4}.$$

C BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a , biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Bài 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , M là trung điểm của SC .

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) .

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG) .

Bài 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$.

Bài 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI .

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABC) . Các mặt bên (SAB) , (SBC) tạo với mặt đáy các góc bằng nhau và bằng 60° . Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a$, $AD = 3a$, $BC = a$. Tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a .

Bài 7. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Biết $d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{57}}{12}$. Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.

Bài 8. Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là 2 cm, 3 cm và 6 cm. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

Bài 9. Cho hình chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao $HH' = 2a$. Cho biết $AB = 2a$, $A'B' = a$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tính thể tích của:

- Khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$;
- Khối lăng trụ $AB_1C_1.A'B'C'$.

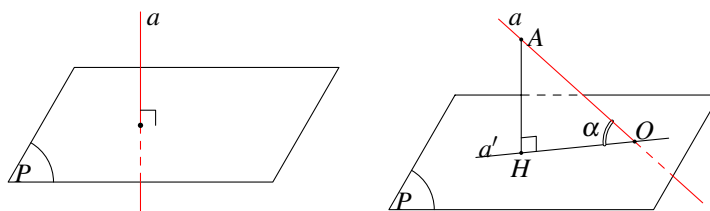
Bài 10. Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cắt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm, đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm.

BÀI 5 GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. GÓC NHỊ DIỆN

A Kiến thức cần nhớ

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a với (P) bằng 90° . Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và (P) .



Hình 1

Chú ý

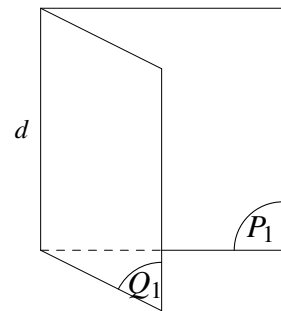
- ☑ Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thỏa mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- ☑ Nếu đường thẳng a nằm trong (P) hoặc a song song với (P) thì $(a, (P)) = 0^\circ$.

2. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

Góc nhị diện

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d . Hình tạo bởi (P_1) , (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1) , kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

Hai nửa mặt phẳng (P_1) , (Q_1) gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện.



Hình 2

Chú ý

- ☑ Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.
- ☑ Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng (P_1) , (Q_1) .

Góc phẳng nhị diện

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý:

- ☑ Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.
- ☑ Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt (P_1) , (Q_1) của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\widehat{uOv}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi (P_1) , (Q_1) .
- ☑ Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.
- ☑ Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.
- ☑ Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180° .



Bài tập mẫu

Bài 1. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại B . Biết $AC = a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ và vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa

- a) SB và (ABC) ; b) SC và (ABC) ; c) SC và (SAB) .

Bài 2. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC) , tính $\cos \alpha$.

Bài 3. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC . Tính số đo các góc phẳng nhị diện:

- a) $[B, SA, D]$; b) $[S, BD, A]$;
c) $[S, BD, C]$; d) $[D, SC, B]$.

Bài 5. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa:

- a) SB và $(ABCD)$; b) SC và $(ABCD)$;
c) SD và $(ABCD)$; d) SB và (SAC) .

Bài 6. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm I của cạnh AB . Biết rằng mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S . Xác định và tính góc giữa:

- a) SA và (ABC) ; b) SC và (SAB) .

Bài 7. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$, cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{15}}{6}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

Bài 8. Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian, khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì cũng vuông góc với đường thẳng thứ hai.
- B.** Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thứ ba thì song song với nhau.
- C.** Hai đường thẳng phân biệt vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.
- D.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 2. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α) .
B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.
C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) .
D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $AB = CD$. **B.** $AC = BD$. **C.** $AB \perp CD$. **D.** $CD \perp BD$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $SC \perp EF$. B. $SC \perp AE$. C. $SC \perp AF$. D. $SC \perp BC$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a , tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 75^\circ$. C. $\tan \alpha = 1$. D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$. B. Góc giữa AD và (ABC) là góc $\widehat{ADB}$.
C. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{ACB}$. D. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 8. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì

- A. Song song với nhau.
B. Trùng nhau.
C. Không song song với nhau.
D. Hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Câu 9. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi E là trung điểm của CD . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng BE và SC .

- A. $\frac{a\sqrt{30}}{10}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. a .

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, AD = a$. Tam giác SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. B. $\frac{1}{3}a^3$. C. $2a^3$. D. $\frac{2}{3}a^3$.

Câu 12. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy và SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

- A. $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $V = 2\sqrt{6}a^3$. D. $V = \frac{4a^3}{3}$.

Câu 13. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại $B, AB = 2a, BC = a, AA' = 2a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $4a^3\sqrt{3}$. B. $2a^3\sqrt{3}$. C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14. Gọi V là thể tích của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, V_1 là thể tích của tứ diện $A'ABD$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

- A. $V = 6V_1$. B. $V = 4V_1$. C. $V = 3V_1$. D. $V = 2V_1$.



Tự luận

Bài 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của điểm O trên mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng

- a) $BC \perp (OAH)$.
- b) H là trực tâm của $\triangle ABC$.
- c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (DBC) . Vẽ các đường cao BE, DF của tam giác BCD , đường cao DK của tam giác ACD .

- a) Chứng minh hai mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với (ADC) .
- b) Gọi O và H là trực tâm $\triangle BCD$ và $\triangle ACD$. Chứng minh OH vuông góc với (ADC) .

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

Bài 4. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 5a, BC = 8a, AC = 7a$, góc giữa SB và (ABC) là 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Bài 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B . Biết $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng $(C'AB)$ và (ABC) bằng 60° . Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.

Bài 6. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a, \widehat{BAC} = 120^\circ$, mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Bài 7. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$. Mặt phẳng $(B'AC)$ tạo với đáy một góc 30° , khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(D'AC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$.

Bài 8. Một thùng đựng rác có dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Đáy và miệng thùng có độ dài lần lượt là 60 cm và 120 cm, cạnh bên của thùng dài 100 cm. Tính thể tích của thùng.

Chương 9

XÁC SUẤT

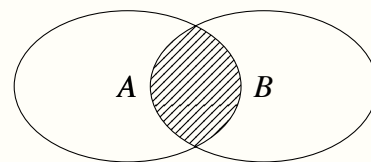
Bài 1 BIẾN CỐ GIAO VÀ QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

A Kiến thức cần nhớ

1. Biến cố giao

Định nghĩa 1.1.

Cho hai biến cố A và B . Biến cố “Cả A và B cùng xảy ra”, kí hiệu AB hoặc $A \cap B$ được gọi là **biến cố giao** của A và B .



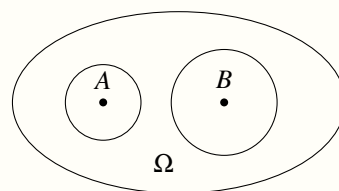
Hình 1

Chú ý: Tập hợp mô tả biến cố AB là giao của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B . Biến cố AB xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B xảy ra.

2. Biến cố xung khắc

Định nghĩa 1.2.

Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** nếu A và B không đồng thời xảy ra.



Hình 2

Chú ý: Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.

3. Biến cố độc lập

Định nghĩa 1.3. Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nhận xét: Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $\bar{A}$ và B ; A và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và $\bar{B}$ cũng độc lập.

4. Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Để tính xác suất của giao các biến cố độc lập, ta sử dụng **quy tắc nhân xác suất** sau:

Định nghĩa 1.4. Nếu hai biến cố A và B độc lập thì

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Chú ý: Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy, nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

B Bài tập mẫu

Bài 1. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Hộp thứ hai chứa 6 viên bi cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 6. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 viên bi. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 viên bi bằng 8”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 viên bi là số chẵn”.

- Xác định không gian mẫu của phép thử.
- Hãy tính xác suất của biến cố AB .
- Tính xác suất của biến cố A và biến cố B .
- A và B có là hai biến cố độc lập không?
- Hãy tìm một biến cố khác rỗng, xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B .

Bài 2. Một hộp chứa 99 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 99. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 5”.

- Bình nói AB là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 10”. Bình nói như vậy đúng hay sai? Tại sao?
- Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Bài 3. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

- Biết $P(A) = 0,3$ và $P(B) = 0,7$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB , $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.
- Biết $P(A) = 0,8$ và $P(AB) = 0,4$. Hãy tính xác suất của các biến cố B , $\overline{A}B$ và $\overline{A}\overline{B}$.

Bài 4. Minh gieo 1 hạt đậu và 1 hạt ngô. Xác suất nảy mầm của hạt đậu và hạt ngô lần lượt là 0,7 và 0,6. Biết rằng sự nảy mầm của hai hạt này là độc lập. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của các biến cố:

- “Cả 2 hạt đều nảy mầm”;
- “Cả 2 hạt đều không nảy mầm”;
- “Hạt đậu nảy mầm, hạt ngô không nảy mầm”.

Bài 5. Một hộp chứa 4 bút xanh, 1 bút đen và 1 bút đỏ. Các cây bút có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 3 cây bút từ hộp. Gọi A là biến cố “Có 1 cây bút đỏ trong 3 cây bút được lấy ra”. Gọi B là biến cố “có 1 cây bút đen trong 3 cây bút được lấy ra”.

- Hãy tìm một biến cố xung khắc với biến cố A nhưng không xung khắc với biến cố B .
- Tính xác suất của các biến cố A , B và AB .

Bài 6. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Hộp thứ hai chứa 1 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 2 viên bi. Gọi A là biến cố “Cả 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ nhất có cùng màu”; B là biến cố “Cả 2 viên bi lấy ra từ hộp thứ hai có cùng màu”.

- Mình nói AB là biến cố “Trong 4 viên bi lấy ra có 2 viên bi xanh, 2 viên bi đỏ”. Mình nói đúng hay sai? Tại sao?
- So sánh $P(AB)$ với $P(A)P(B)$.
- Hãy tìm một biến cố khác rỗng, xung khắc với cả biến cố A và biến cố B .

Bài 7. Một hộp chứa 50 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 50. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 4”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 6”.

- Giang nói AB là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 24”. Giang nói như vậy đúng hay sai? Tại sao?
- Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Bài 8. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

- Biết $P(\bar{A}) = 0,4$ và $P(B) = 0,1$. Hãy tính xác suất của các biến cố AB , $\bar{A}B$ và $\overline{AB}$.
- Biết $P(A) + P(B) = 0,8$ và $P(AB) = 0,16$. Hãy tính xác suất của các biến cố B , $\bar{A}B$ và $\overline{AB}$.

Bài 9. Minh mua 2 bóng đèn. Theo một kết quả thống kê, tỉ lệ bị hỏng trong năm đầu sử dụng của loại bóng đèn Minh mua là 23%. Tính xác suất của các biến cố

- A: “Cả hai bóng đèn đều bị hỏng trong năm đầu sử dụng”;
- B: “Cả hai bóng đèn đều không bị hỏng trong năm đầu sử dụng”.

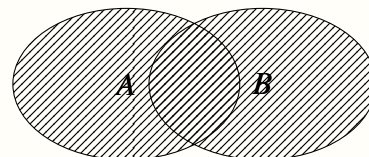


A Kiến thức cần nhớ

1. Biến cố hợp

Định nghĩa 2.1.

Cho hai biến cố A và B . Biến cố “ A hoặc B xảy ra”, kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là **biến cố hợp** của A và B .



Hình 1

! *Chú ý: Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Tập hợp mô tả biến cố $A \cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B .*

2. Quy tắc cộng xác suất

Định lý 2.1. Quy tắc cộng cho hai biến cố xung khắc:

Cho hai biến cố xung khắc A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Quy tắc cộng cho hai biến cố bất kì

Cho hai biến cố A và B . Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.



B Bài tập mẫu

Bài 1. Một hộp chứa 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- Cả 4 viên bi lấy ra đều có cùng màu.
- Có ít nhất 3 viên bi xanh trong 4 viên bi lấy ra.

Bài 2. Mai, Lan và 5 bạn cùng lớp xếp thành một hàng ngang theo thứ tự ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố “Có ít nhất một trong hai bạn Mai và Lan đứng ở đầu hàng”.

Bài 3. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

- Biết $P(A) = 0,8$ và $P(AB) = 0,2$. Tính xác suất của biến cố $A \cup B$.
- Biết $P(B) = 0,3$ và $P(A \cup B) = 0,6$. Tính xác suất của biến cố A .

Bài 4. Một nhóm gồm 8 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Chọn ra ngẫu nhiên 5 học sinh từ nhóm. Sử dụng sơ đồ hình cây, hãy tính xác suất của biến cố “Có ít nhất 3 học sinh nữ trong 5 học sinh vừa chọn”.

Bài 5. Một hộp chứa 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 20. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 37.
- Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6.



Bài tập

Bài 1. Trong một cuộc gặp mặt có 63 đoàn viên tham dự, trong đó có 25 người đến từ miền Bắc, 19 người đến từ miền Nam và 19 người đến từ miền Trung.

- a) Gặp ngẫu nhiên 1 đoàn viên trong cuộc gặp mặt, tính xác suất của biến cố "Đoàn viên được gặp đến từ miền Nam hoặc miền Trung"
- b) Gặp ngẫu nhiên 2 đoàn viên trong cuộc gặp mặt, tính xác suất của biến cố "Hai đoàn viên được gặp cùng đến từ miền Bắc hoặc cùng đến từ miền Nam".

Bài 2. Một túi chứa 2 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 3 viên bi từ túi. Tính xác suất của các biến cố:

- a) "Cả 3 viên bi lấy ra đều có cùng màu";
- b) "Có không quá 1 viên bi xanh trong 3 viên bi lấy ra";
- c) "Có đúng hai màu trong 3 viên bi lấy ra".

Bài 3. Thanh có 4 tấm thẻ được đánh số 1, 3, 4, 7. Thanh lấy ra 3 trong 4 thẻ và xếp chúng thành một hàng ngang một cách ngẫu nhiên để tạo thành một số có 3 chữ số. Tính xác suất của biến cố A : "Số tạo thành chia hết cho 2 hoặc 3".

Bài 4. Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

- a) Biết $P(A) = 0,4$ và $P(\bar{A}B) = 0,3$. Tính xác suất của các biến cố B và $A \cup B$.
- b) Biết $P(\bar{A}B) = 0,4$ và $P(A \cup B) = 0,9$. Tính xác suất của các biến cố A, B và AB .

Bài 5. Một hộp chứa 10 quả bóng xanh và 10 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 5 quả bóng từ hộp. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố "Có ít nhất 3 quả bóng xanh trong 5 quả bóng lấy ra".

Bài 6. Châu gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất liên tiếp cho đến khi xuất hiện mặt 6 chấm thì dừng lại. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất của biến cố "Châu phải gieo không quá 3 lần để xuất hiện mặt 6 chấm".

Bài 7. Trong một trò chơi, Dương chọn ra 5 số từ 100 số tự nhiên đầu tiên. Sau đó, người ta chọn ra ngẫu nhiên 3 số may mắn từ 100 số tự nhiên đầu tiên đó. Tính xác suất của các biến cố:

- a) A : "Không có số may mắn nào trong 5 số Dương đã chọn";
- b) B : "Có đúng 1 số may mắn trong 5 số Dương đã chọn".

Bài 8. Một hộp chứa 3 quả bóng xanh và một số quả bóng đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ hộp. Biết rằng xác suất của biến cố "Lấy được 2 quả bóng đỏ" gấp 5 lần xác suất của biến cố "Lấy được 2 quả bóng xanh". Tính xác suất của biến cố "Lấy được 2 quả bóng có cùng màu".

Bài 9. Gieo ngẫu nhiên 3 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố A : "Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc chia hết cho 15".

Bài 10. Một hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 40. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- a) "Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 76";
- b) "Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10".