



LỚP
12

HÌNH HỌC

Chương 3: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 3: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN



VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG



VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG



VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT CẦU



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có phương trình lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = x'_0 + a's \\ y = y'_0 + b's \\ z = z'_0 + c's \end{cases}.$$

Khi đó d có VTCP $\vec{u}(a; b; c)$ và d' có VTCP $\vec{u}'(a'; b'; c')$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d .

👉 Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{u}'$ và M không thuộc d' thì d song song với d' .

👉 Nếu $\vec{u}$ cùng phương $\vec{u}'$ và M thuộc d thì d trùng với d' .

👉 Nếu hệ phương trình $\begin{cases} x_0 + at = x'_0 + a's \\ y_0 + bt = y'_0 + b's \\ z_0 + ct = z'_0 + c's \end{cases} (*)$ có nghiệm duy nhất thì d cắt d' .

👉 Nếu $\vec{u}$ và $\vec{u}'$ không cùng phương và hệ $(*)$ vô nghiệm thì d và d' chéo nhau.

I VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d và d' có phương trình lần lượt là:

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = x'_0 + a's \\ y = y'_0 + b's \\ z = z'_0 + c's \end{cases}.$$

Khi đó d có VTCP $\vec{u}(a; b; c)$ và d' có VTCP $\vec{u'}(a'; b'; c')$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d .

- 👉 Lưu ý:

1) Nếu hệ phương trình $\begin{cases} x_0 + at = x'_0 + a's \\ y_0 + bt = y'_0 + b's \\ z_0 + ct = z'_0 + c's \end{cases} (*)$ có vô số nghiệm thì d trùng với d' .

2) Nếu $\vec{u}.\vec{u'} = 0$ thì d vuông góc với d' .

I CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$ và $d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng?

Bài giải

Đường thẳng d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$ và điểm $M(1; 0; -2) \in d_1$.

Đường thẳng d_2 có VTCP $\vec{u}_2 = (-2; -1; 2)$.

Ta thấy $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$ suy ra $\vec{u}_1$ cùng phương với $\vec{u}_2$ và $M \notin d_2$. Vậy $d_1 // d_2$.

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 2:

Trong không gian $Oxyz$, xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}, \quad \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

Bài giải

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 1+2s=3-t \\ -1+2s=3-2t \\ 3s=-2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=0 \\ t=2 \end{cases}. \text{ Vậy } \Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2.$$

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA



Ví dụ 3:

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$.

Tìm m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau. Khi đó hãy tìm tọa độ giao điểm của chúng.



Bài giải

Xét hệ: $\begin{cases} 1 + mt = 1 - t' & (1) \\ t = 2 + 2t' & (2) \\ -1 + 2t = 3 - t' & (3) \end{cases}$. Giải hệ (2) (3) ta được $\begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được $m = 0$. Tọa độ giao điểm là $I(1; 2; 3)$.

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 4:

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2 - t \end{cases}$

Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(0; 1; -1)$ và song song với d .

Bài giải

Rõ ràng $M \notin d$.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 2; -1)$.

Đường thẳng đi qua điểm $M(0; 1; -1)$ và song song với đường thẳng d có phương trình là

$$\frac{x}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 1}{-1} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 1}{1}$$

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA



Ví dụ 5:

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$.
Viết phương trình đường thẳng d đi qua M , cắt và vuông góc với Δ .



Bài giải

Gọi H là giao điểm của d và Δ , khi đó giá của $\overrightarrow{MH}$ vuông góc với đường thẳng Δ .

$H(1 + 2t; -1 + t; -t)$, $\overrightarrow{MH} = (2t - 1; t - 2; -t)$, $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; 1; -1)$ là VTCP của Δ .

Ta có $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1) + 1(t - 2) - 1(-t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$

$\overrightarrow{MH} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ Suy ra một VTCP của đường thẳng d là $\vec{u} = (1; -4; -2)$.

Vậy $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA



Ví dụ 6:

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0; -1; 2)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}, d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}.$$

Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua M , cắt cả d_1 và d_2 .



Bài giải

$$\Delta \cap d_1 = A(t_1 + 1; -t_1 - 2; 2t_1 + 3); \Delta \cap d_2 = B(2t_2 - 1; -t_2 + 4; 4t_2 + 2).$$

$$\overrightarrow{MA} = (t_1 + 1; -t_1 - 1; 2t_1 + 1); \overrightarrow{MB} = (2t_2 - 1; -t_2 + 5; 4t_2).$$

$$M, A, B \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 1 = k(2t_2 - 1) \\ -t_1 - 1 = k(-t_2 + 5) \\ 2t_1 + 1 = 4kt_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ kt_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{7}{2} \\ t_2 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = (-9; 9; -16).$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta \text{ đi qua } M(0; -1; 2), \text{ và có một VTCP là } \vec{u} = (9; -9; 16) \Rightarrow \Delta: \frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}.$$

II VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ và}$$

mặt phẳng (P) : $Ax + By + Cz + D = 0$.

Khi đó d có VTCP $\vec{u}(a; b; c)$ và (P) có VTPT $\vec{n}(A; B; C)$. Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d .

Xét phương trình: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 \quad (*)$.

Nếu $(*)$ có nghiệm duy nhất thì d cắt (P) .

Nếu $(*)$ vô nghiệm thì $d \parallel (P)$.

Nếu $(*)$ có vô số nghiệm thì $d \subset (P)$.

Lưu ý:

- 1) Nếu $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}$ thì $d \perp (P)$.
- 2) Nếu $\vec{u} \perp \vec{n}$ thì $d \parallel (P)$ hoặc $d \subset (P)$.

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA



Ví dụ 7:

Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(3; -1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + y - 3z - 5 = 0$.



Bài giải

(P) có VTPT $\vec{n_P} = (1; 1; -3)$. Do $d \perp (P)$ nên d có VTCP $\vec{n_P} = (1; 1; -3)$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(3; -1; 2)$ có VTCP $\vec{n_P} = (1; 1; -3)$

nên $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-3}$.

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA



Ví dụ 9:

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z - 5 = 0$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$. Xác định vị trí tương đối của d và (P) .



Bài giải

Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) thỏa mãn phương trình:

$$3(-1 + 2t) - 3(3 + 4t) + 2(3t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 0t = 17 (\text{vô nghiệm}).$$

Từ đó suy ra đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) .

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA



Ví dụ 10:

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 4z + 1 = 0$.
Viết phương trình của đường thẳng d đi qua điểm A , song song với mặt phẳng (P) ,
đồng thời cắt trục Oz .

Bài giải

Gọi $B(0; 0; b)$ là giao điểm của đường thẳng d và trục Oz .

Ta có $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AB} = (-1; -2; b - 3)$.

Vì đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) nên:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow -2 - 2 - 4(b - 3) = 0 \Leftrightarrow b = 2.$$

Suy ra $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AB} = (-1; -2; -1) = -1(1; 2; 1)$.

III VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT CẦU

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt cầu $S(I;R)$. Gọi H là hình chiếu của I trên d .

Nếu $IH > R$ thì d không cắt (S) .

Nếu $IH = R$ thì d tiếp xúc với (S) .

Nếu $IH < R$ thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

Lưu ý:

- 1) Nếu $IH = 0$ (tức là d đi qua tâm I của mặt cầu) thì d cắt (S) tại 2 điểm A, B và AB là đường kính của mặt cầu.
- 2) Nếu $IH = R$ thì d là tiếp tuyến của mặt cầu.

IV TIẾP TUYẾN CỦA MẶT CẦU

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $S(I;R)$ và một điểm M ngoài mặt cầu. Từ M kẻ các tiếp tuyến $MA_1, MA_2, MA_3, \dots$ ($A_1, A_2, A_3, \dots$ là các tiếp điểm)

Khi đó: $MA_1 = MA_2 = MA_3 = \dots$ và $MA_1 \perp IA_1; MA_2 \perp IA_2; \dots$

Các tiếp điểm $A_1, A_2, A_3, \dots$ nằm trên một đường tròn.

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 11:

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1, -2, 3)$ và đường thẳng d có phương trình

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}. \text{ Biết rằng } (S) \text{ tiếp xúc với đường thẳng } (d). \text{ Viết phương trình } (S).$$

Bài giải

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng (d) , nên bán kính mặt cầu (S) là:

$$R = d(I, d) = \frac{|[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}]|}{|\overrightarrow{u_d}|}$$

với $M(1; -1; 1) \in (d)$, $\overrightarrow{IM} = (0; 1; -2)$ và $\overrightarrow{u_d} = (2; -1; 2)$ là một VTCP của đường thẳng (d) .

Ta có $[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}] = (0; -4; -2) \Rightarrow |[\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{u_d}]| = \sqrt{20}$, $|\overrightarrow{u_d}| = 3$. Suy ra $R = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{20}{9}$.

II CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 12:

Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; -1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

Bài giải

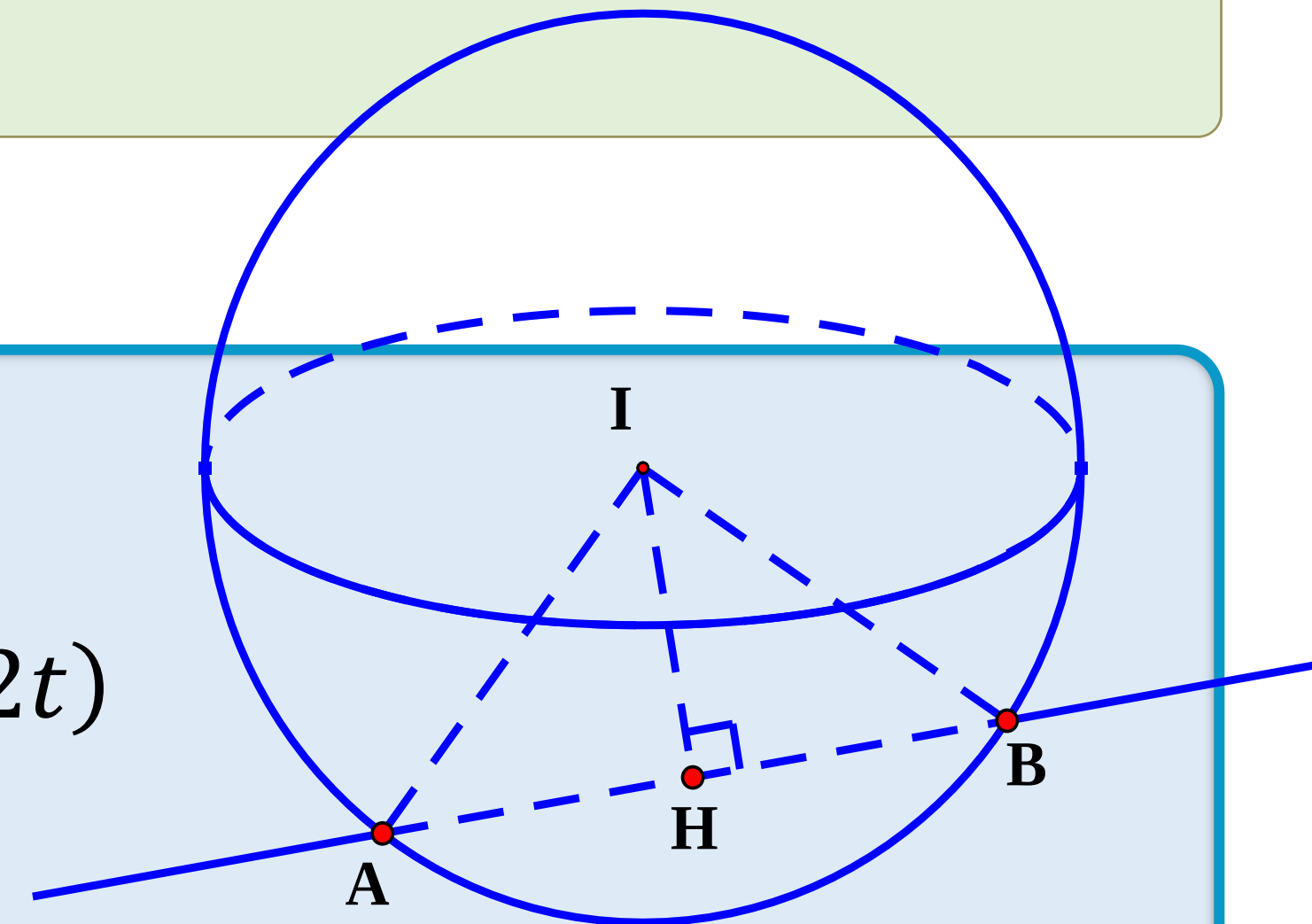
Gọi H là hình chiếu của I trên d nên tọa độ của $H(-1 + 3t; 2 - 2t; 2 + 2t)$ và $\overrightarrow{IH} = (-2 + 3t; -2t; 3 + 2t)$.

$$IH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 3(-2 + 3t) + 4t + 6 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow H(-1; 2; 2)$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{13}. \text{ Mà } AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow AH = \sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó bán kính mặt cầu } R = AI = \sqrt{AH^2 + HI^2} = \sqrt{3 + 13} = 4.$$

$$\text{Vậy } (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16.$$





CÁC BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 1.

Phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$; $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$ là:

A $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$

C $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$

B $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$

D $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$

Chọn B.

Bài giải

Vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 1; -1)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $A = \Delta \cap d_1, B = \Delta \cap d_2$.

Suy ra: $A(-1 + 2a; -1 + a; 2 - a), B(1 - b; 2 + b; 3 + 3b)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (-b - 2a + 2; b - a + 3; 3b + a + 1)$.

Vì đường thẳng Δ song song với đường thẳng d nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{u}$.

Suy ra: $\frac{-b - 2a + 2}{1} = \frac{b - a + 3}{1} = \frac{3b + a + 1}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(1; 0; 1) \\ B(2; 1; 0) \end{cases}$. Ta thấy $A \notin d$

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



CÂU 2.

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(5; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$.
Tìm phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc (P) .

A $\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$

B $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$

C $\frac{x-6}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{1}$

D $\frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{1}$

Chọn C.

Bài giải

d qua điểm $M(5; -3; 2)$ và vuông góc (P) nhận $\vec{u} = (1; -2; 1)$ là vtcp có dạng
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 - 2t. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Cho $t = 1 \Rightarrow N(6; -5; 3) \in d \Rightarrow d: \frac{x-6}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

CÂU 3.

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-9}{-1}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $m^2x - my - 2z + 19 = 0$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị m để $d // (\alpha)$ là

A $\emptyset$

B $\{2\}$

C $\{1\}$

D $\{1; 2\}$

Chọn B.

Bài giải

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; 9)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 3; -1)$. Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (m^2; -m; -2)$.

$$\text{Vì } d // (\alpha) \text{ nên } \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Khi $m = 1$ thì $(\alpha): x - y - 2z + 19 = 0$ chứa điểm A nên $d \subset (\alpha)$.

Khi $m = 2$ thì $(\alpha): 4x - 2y - 2z + 19 = 0$ không chứa điểm A nên $d // (\alpha)$.

Vậy tập hợp các giá trị m để $d // (\alpha)$ là $\{2\}$.

CÂU 4.

Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $m^2x - 3y + z + 3m = 0$ (m là tham số). Tập hợp tất cả các giá trị của m để đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) là

A $\{2; -2\}$

B $\{-2\}$

C $\{2\}$

D $\{1; 2\}$

Bài giải

Chọn B.

d có vectơ chỉ phương là: $\vec{u} = (1; 1; -1)$ và đi qua điểm $M(-1; 1; 1)$
 (α) có vectơ pháp tuyến là: $\vec{n} = (m^2; -3; 1)$

$$\begin{aligned} \text{Do } d \text{ song song với } (\alpha) \text{ nên } \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 - 1 = 0 \\ -m^2 - 3 + 1 + 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ -m^2 + 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 1, m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2 \quad \text{Vậy } m = -2. \end{aligned}$$

DẶN DÒ

- 1 Xem lại các dạng bài tập trên
- 2 Xem trước phần III- KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.