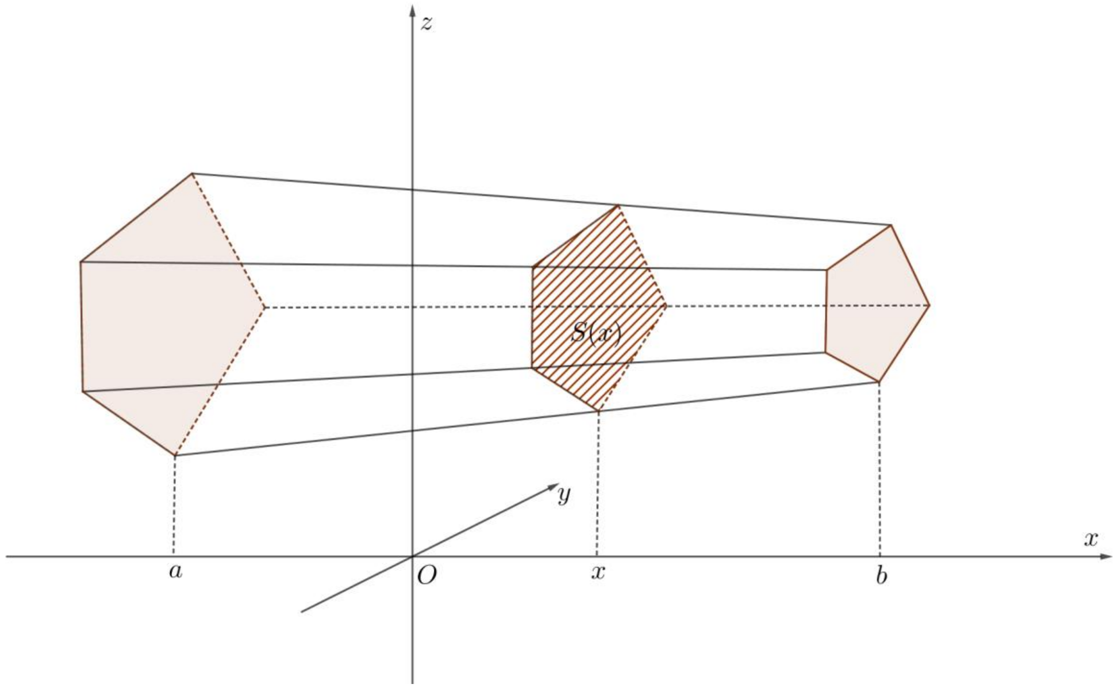
# ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

## 1. Thể tích của vật thể.

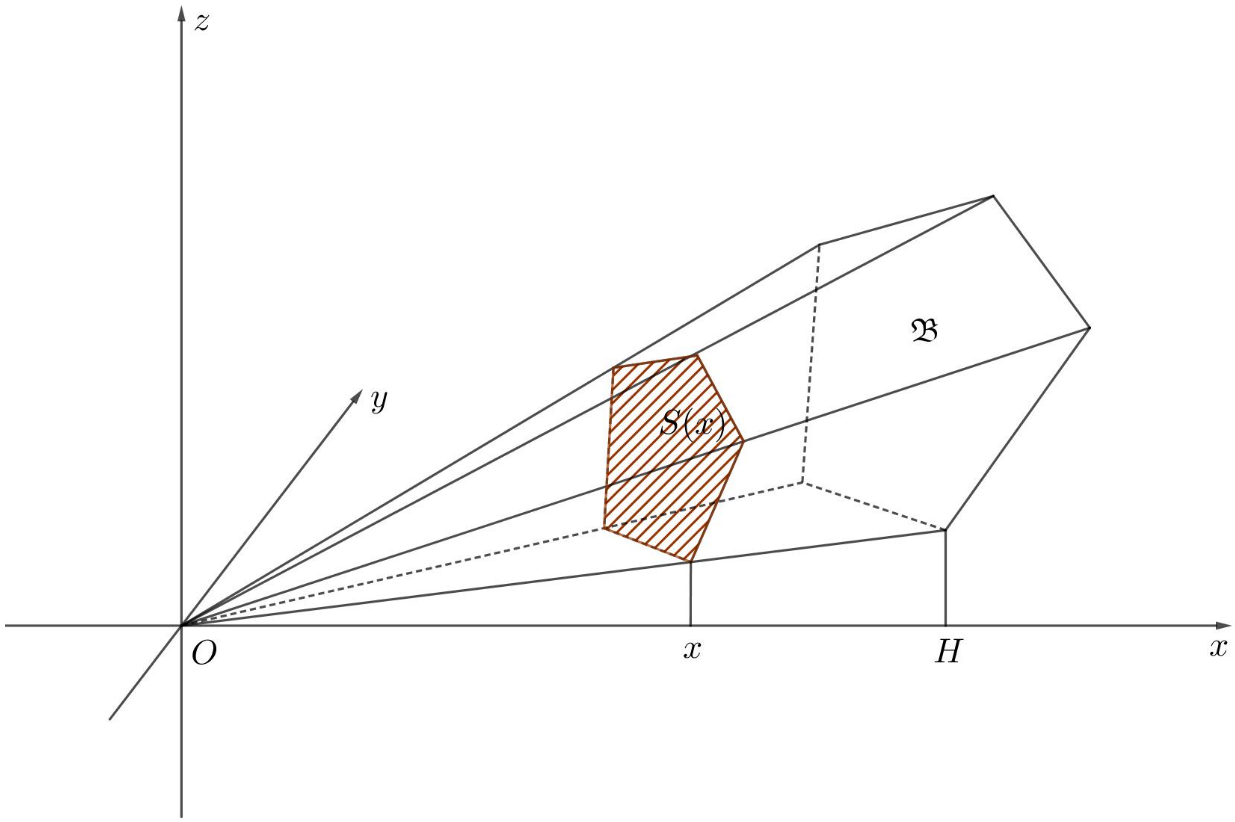



Cho một vật thể trong không gian tọa độ $Oxyz$ . Phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại các điểm có hoành độ $a,b$ . Gọi $S(x)$ là diện tích của thiết diện của vật thề bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x$ ( $a \le x \le b$) (hình trên). Giả sử $S(x)$ là một hàm số liên tục. Người ta chứng minh được rằng, thể tich vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với Ox tai $a$ và $b$ là:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

**Ví dụ 1.** Tính thể tích khối chóp có chiều cao h, diện tích đáy B

**Giải**




Chọn hệ tọa độ Oxyz sao cho Ox vuông góc với mặt phẳng đáy tại H, gốc tọa độ O trùng với đỉnh của hình chóp. Khi đó ta có OH = h. Một mặt phẳng $(\alpha)$ vuông góc với Ox tại $x$ $(0 \le x \le h)$ cắt khối chóp theo một thiết diện có diện tích $S(x)$

Vì thiết diện song song (hoặc trùng) với đáy của hình chóp (do cùng vuông góc Ox) nên ta có :

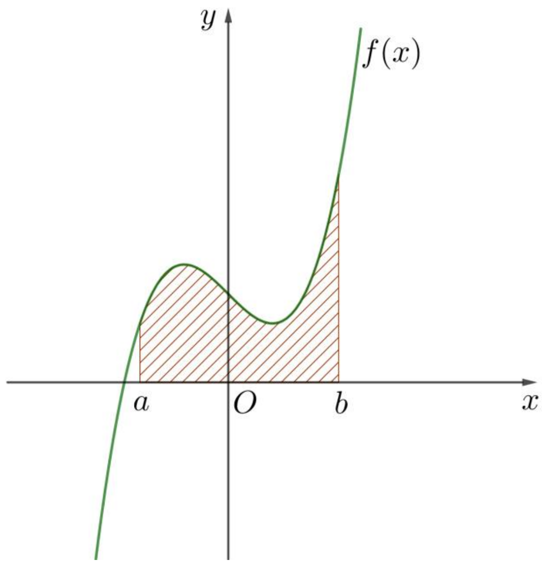
$$\frac{S(x)}{B} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow S(x) = \frac{x^2}{h^2}B$$

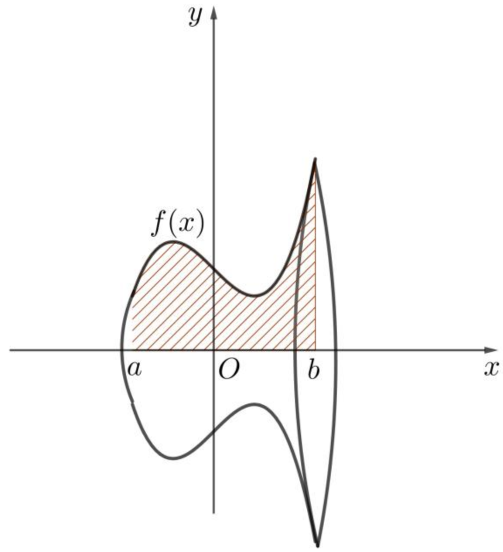
Theo công thức tính thể tích, ta có thể tích của khói chóp là $V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}Bdx = \frac{B}{h^2}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h = \frac{1}{3}Bh$

Vậy thể tích khối chóp là: $V = \frac{1}{3}Bh$

**2. Thể tích khối tròn xoay.**

***2.1. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường: y = f(x), trục Ox, x = a, x= b quay quay Ox***




$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_a^b y^2dx}$$

**Ví dụ 2**: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^2 - 2x - 3$, trục Ox quay quanh Ox.

**Giải.**

- Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$
- Thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V=\pi\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x-3\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{3}\left(x^4+4x^2+9-4x^3-6x^2+12x\right)dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{3}\left(x^4-4x^3-2x^2+12x+9\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4-\frac{2x^3}{3}+6x^2+9x\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{512}{15}\pi$$

Vậy: thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\dfrac{512\pi}{15}$ (đvtt)

**Ví dụ 3.** Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục Ox, $x=2$ quay quanh Ox.

**Giải.**

- Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$

- Thể tích khối tròn xoay cần tính là: $V = \pi\int_1^2 \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx = \pi\int_1^2 (x-1)\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}$

Vậy: thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \frac{\pi}{2}$ (đvtt)

***2.2. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường: x = f(y), trục Oy, y = a,y= b quay quay Oy***

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(y)dy = \pi\int_a^b x^2 dy}$$

**Ví dụ 4**. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường:

y = $x^2 - 1$ , trục Oy, y =1, y = 2 quay quanh Oy

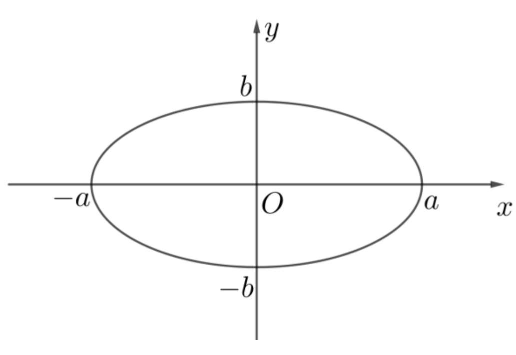
**Giải.**

Thể tích khối tròn xoay cần tính là: $V = \pi\int_1^2 (y+1)\,dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_1^2 = \frac{5\pi}{2}$

Vậy: thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \frac{5\pi}{2}$ (đvtt)

**Ví dụ 5.** Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi c đường $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ quay quanh Oy.

**Giải.**



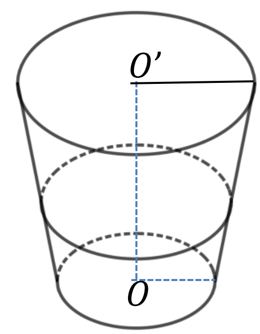

- Hình phẳng giới hạn bới các đường $x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right), Oy, y = -b, y = b$

- Thể tích khối tròn xoay cần tính là: $V = \pi \int_{-b}^{b} \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - y^2\right) dy = \frac{\pi a^2}{b^2}\left(b^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-b}^{b} = \frac{4\pi a^2 b}{3}$

Vậy: thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = \frac{4\pi a^2 b}{3}$ (đvtt)

## 3. Tính thể tích một số vật thể trong thực tế.

**Ví dụ 6.** Tính thể tích khối nón cụt có chiều cao OO′ = h, bán kính đáy lớn là R và bán kính đáy nhỏ là $r$.

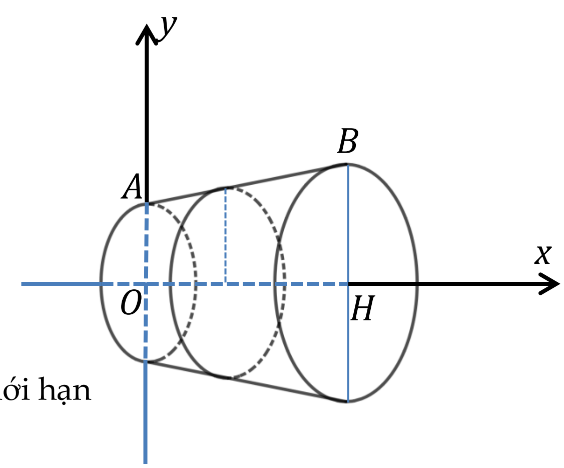



**Giải.**

- Xét mp(P) chứa trục của hình nón cụt.

Trong mp(P) chọn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ.

Ta có $A(0;r), B(h;R)$




- Phương trình đường thẳng AB: $y = \frac{R-r}{h}x + r$

- Hình nón cụt trên được sinh ra do hình phẳng giới hạn bởi các đường AB, Ox, Oy, x = h quay quanh Ox.

Do đó thể tích hìn nón cụt trên là:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^2 dx = \frac{\pi h}{3(R-r)}\left(\frac{R-r}{h}x + r\right)^3\Bigg|_0^h = \frac{\pi h}{3(R-r)}\left[R^3 - r^3\right] = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

Vậy: Thể tích khối nón cụt, chiều cao h, bán kính hai đáy R, r là:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + r^2 + Rr\right)}$$

**BÀI TẬP.**

**Bài 1.** Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường sau đây khi hình phẳng đó quay quanh trục Ox.

a) $y = \sqrt{x}$ ,trục Ox, x = 4

b) $y = x^3 - 1$, trục Ox, x = - 1, x = 1

c) $y = x^2 - 2x$, trục Ox.

d) $y = x^4 + 3x^2 - 4$, truïc Ox, x = 1, x = 0.

e) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 10}{x - 2}$, trục Ox, x = 3, x = 4

f) $y = \dfrac{x+1}{x-1}, Ox, Oy$

**Bài 2.** Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường sau đây khi hình phẳng đó quay quanh trục Oy.

a) $2x + 3y - 1 = 0, Oy, y = 1$

b) $y = x^2 + 1, Oy, y = 1, y = 2$

**Bài 3.** Một thùng rượu có bán kính các đáy là R, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính R’, chiều cao của thùng rượu là h (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh của bình rượu là các đường parabol. Tính thể tích của thùng rượu (Giả thiết rằng các số liệu không tính đến bề dày của mặt xung quanh của thùng rượu)