**ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC**

1. **TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG**

**A. LÝ THUYẾT**

**1) Công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số**

Cho hai đồ thị của hai hàm số  liên tục trên đoạn  và hai đường thẳng . Khi đó hình phẳng giới hạn bởi bốn đường  và hai đường thẳng  có diện tích *S* được tính theo công thức: .

**Đặc biệt:** Trong trường hợp  là trục hoành () ta được công thức tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng  là:

 (1).

Để tính diện tích *S* ta phải tính tích phân (1), muốn vậy ta phải phá dấu giá trị tuyệt đối:

• Nếu  thì .

• Nếu  thì .

Muốn xét dấu của biểu thức  ta thường có một số cách làm như sau:

🖎 **Cách 1:** Sử dụng bảng xét dấu cho  với ghi nhớ qua nghiệm bội lẻ  đổi dấu, qua nghiệm bội chẵn  không đổi dấu.

🖎 **Cách 2:** Dựa vào đồ thị của hàm số  trên đoạn  để suy ra dấu của  trên đoạn đó:

- Nếu trên đoạn  đồ thị hàm số  nằm phía trên trục hoành thì .

- Nếu trên đoạn  đồ thị hàm số  nằm phía dưới trục hoành thì .

🖎 **Cách 3:** Nếu  không đổi dấu trên  thì ta có: .

🖎 **Cách 4:** Sử dụng máy tính **CASIO**, tuy nhiên xu hướng ra đề thi **THPT Quốc gia** sẽ hạn chế **CASIO** nên cần chú ý cách giải tổng quát và hiểu rõ bản chất!

**Chú ý:**

- Khi tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số ta có:

 ta làm hoàn toàn tương tự như trên.

- Nếu đề bài không cho các đường thẳng giới hạn  ta giải phương trình  (hoặc  trong trường hợp  là trục hoành) để tìm cận của tích phân.

**B. VÍ DỤ MINH HỌA**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Tính diện tích hình phẳng trên được giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và các đường thẳng . |

***Lời giải***

Diện tích S của hình phẳng trên là .

Ta có: .

 (đvdt).

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và các đường thẳng . |

***Lời giải***

Gọi S là diện tích của hình phẳng trên, ta có: 

Ta có: 

Do đó:   (đvdt).

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  là**A.**  **B.**  **C.** 1 **D.**   |

***Lời giải***

Phương trình hoành độ giao điểm 2 đồ thị là: 

Diện tích cần tìm là: 

 . **Chọn B.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Tính diện tích *S* của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  và các đường thẳng .**A.**  **B.**  **C.**  **D.**   |

***Lời giải***

Ta có: .

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: 

Diện tích hình phẳng cần tìm là: . **Chọn B.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 5:** Cho đồ thị hàm số  trên đoạn  như hình vẽ ở bên và có diện tích . Tính tích phân .Untitled**A.**  **B.**  **C.**  **D.**   |

***Lời giải***

Ta có . **Chọn A.**

|  |
| --- |
| Untitled**Ví dụ 6:** Cho hàm số  liên tục trên ℝ. Đồ thị hàm số  được cho như hình bên. Diện tích các hình phẳng  lần lượt là  và . Biết , tính .**A.**  **B.**  **C.**  **D.**   |

***Lời giải***

Ta có: .

Lại có: . **Chọn B.**

1. **TÍNH THỂ TÍCH**
2. **Tính thể tích vật thể**

Cắt một vật thể  bởi hai mặt phẳng  và  vuông góc với trục  lần lượt tại  Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với  tại điểm  () cắt  theo thiết diện là  (hình vẽ). Giả sử  liên tục trên đoạn 



Khi đó thể tích  của vật thể  giới hạn bởi hai mặt phẳng  và  được tính bởi công thức:



1. **Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay quanh trục Ox**

Giả sử một hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục  và hai đường thẳng  và  quay quanh trục  tạo thành một khối tròn xoay (hình vẽ). Khi đó ta có thể tích vật thể là: 

Mặt khác tại điểm  ta có  là một hình tròn có bán kính 

. Vậy 

Trong trường hợp  giới hạn bởi hai đồ thị hàm số  và  ta được khối tròn xoay có thể tích là:



**Chú ý:** Khi bài toán không cho hai đường thẳng giới hạn  và  thì ta giải phương trình  để tìm cận của tích phân, trong đó  là nghiệm nhỏ nhất và  là nghiệm lớn nhất của phương trình.

1. **Tính thể tích vật tròn xoay sinh bởi diện tích S quay quanh trục Oy**

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số  trục  và hai đường thẳng 

- **Bước 1:** Biến đổi  về dạng 

- **Bước 2:** Khi đó 

**Tương tự:** Trong trường hợp  sinh ra bởi diện tích hình phẳng của hai đồ thị hàm số  và hai đường thẳng  ta có 

**Chú ý:** Khi quay diện tích hình phẳng  quanh trục  ta được khối tròn xoay có thể tích . Khi quay quanh trục  ta được khối tròn xoay có thể tích 

Hầu như  **không** bằng . Chúng chỉ bằng nhau trong một số trường hợp đặc biệt.

1. **Ví dụ minh họa**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 1:** Cho hình phẳng  giới hạn bởi các đường . Tính thể tích  của khối tròn xoay thu được khi quay  quanh trục  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  |

***Lời giải:***

Thể tích cần tính là  **Chọn D.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 2:** Cho hình phẳng  giới hạn bởi đường cong , trục hoành và các đường thẳng  Khối tròn xoay tạo thành khi quay  quanh trục hoành có thể tích  bằng bao nhiêu? **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  |

***Lời giải:***

Thể tích cần tính bằng  **Chọn A.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 3:** Cho hình phẳng  giới hạn bởi đường cong , trục hoành và các đường thẳng . Khối tròn xoay tạo thành khi quay  quanh trục hoành có thể tích  bằng:**A.**  **B.**  **C.**  **D.**  |

***Lời giải:***

Thể tích cần tính bằng  **Chọn A.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 4:** Cho  là hình phẳng giới hạn bởi đường cong  và đường thẳng  Tính thể tích  của vật thể tròn xoay do hình phẳng  quay xung quanh trục hoành.**A.**  **B.**  **C.**  **D.**  |

***Lời giải:***

Phương trình hoành độ giao điểm là: 

Thể tích cần tìm là:  **Chọn C.**

|  |
| --- |
| **Ví dụ 5:** Tính thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường  quay quanh  **A.**  **B.**  **C.**  **D.**  |

***Lời giải:***

Tung độ giao điểm là: 



Vậy  (đvtt). **Chọn D.**