

ĐỊNH LÝ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN

Lớp: 10

Số tiết: 3

1. Định lý côsin

Trong tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$, ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Từ định lý côsin, ta có hệ quả sau đây:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



Ví dụ 1

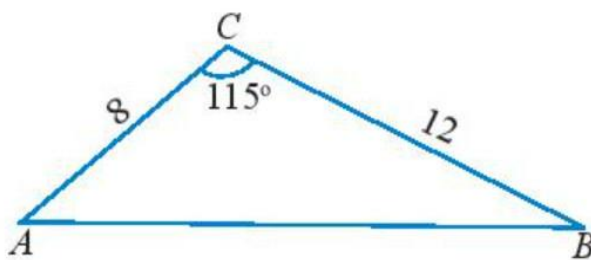
Cho tam giác ABC có $C = 115^\circ$, $AC = 8$ và $BC = 12$. Tính độ dài cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

Lời giải

Theo định lý côsin, ta có :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 115^\circ \approx 289,14$$

Vậy $AB \approx \sqrt{289,14} \approx 17$.



Hình 3

Theo hệ quả của định lý côsin, ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \approx \frac{17^2 + 8^2 - 12^2}{2 \cdot 17 \cdot 8} \approx 0,7684$$

Suy ra $A = 39^\circ 47'$, $B = 180^\circ - (A + C) \approx 25^\circ 13'$

2. Định lí sin

Trong tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Từ định lí sin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C;$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \quad \sin B = \frac{b}{2R}; \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$



Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có $A=72^\circ$, $B=83^\circ$, $BC=18$. Tính độ dài các cạnh AC, AB và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Lời giải

Đặt $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Ta có: $a=18$, $C=180^\circ - 72^\circ + 83^\circ = 25^\circ$.

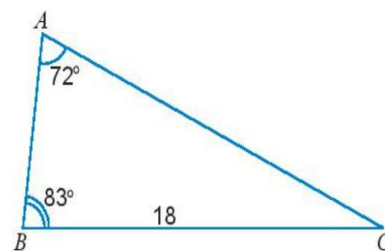
Áp dụng định lí sin, ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Suy ra:

$$AC = b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{18 \cdot \sin 83^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 18,8;$$

$$AB = c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{18 \cdot \sin 25^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 8;$$

$$R = \frac{a}{2 \cdot \sin A} = \frac{18}{2 \cdot \sin 72^\circ} \approx 9,5.$$



Hình 7

3. Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC. Ta kí hiệu:

- h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB.
- R là bán kính đường tròn **ngoại** tiếp tam giác.
- r là bán kính đường tròn **nội** tiếp tam giác.
- p là nửa chu vi tam giác.
- S là diện tích tam giác.

Ta có các công thức tính diện tích tam giác sau:

$$1) S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c$$

$$2) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$3) S = \frac{abc}{4R}$$

$$4) S = p.r$$

$$5) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (công thức Heron).}$$



Ví dụ 3

Cho tam giác ABC có $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$ và $C = 30^\circ$

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

a) Áp dụng công thức $S = \frac{1}{2} ab \sin C$, ta có: $S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3} \approx 1,7$

b) Áp dụng định lý côsin, ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$

Suy ra $c = 2$.

Áp dụng định lý sin, ta có: $R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{2}{2 \sin 30^\circ} = 2$



Ví dụ 4

Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 30, b = 26, c = 28$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải

a) Ta có $p = \frac{1}{2}(a+b+c) = 42$

Áp dụng công thức Heron, ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{42(42-30)(42-26)(42-28)} = 336$.

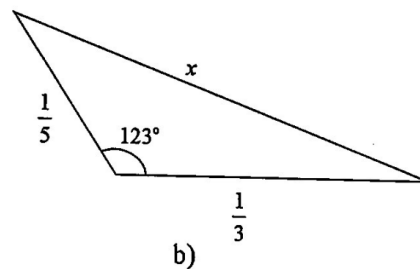
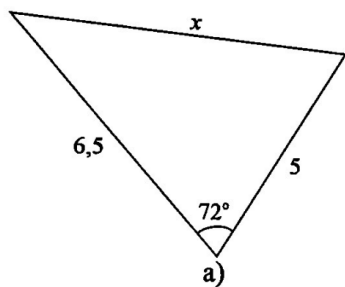
b) Ta có: $S = \frac{abc}{4R}$ suy ra: $R = \frac{abc}{4S} = \frac{30.26.28}{4.336} = 16,25$

Ta lại có: $S = pr$, suy ra: $r = \frac{S}{p} = \frac{336}{42} = 8$



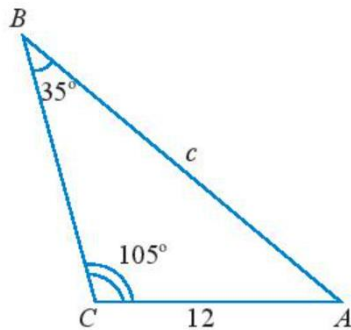
Bài tập

1) Tính độ dài cạnh x trong các tam giác sau:



Hình 13

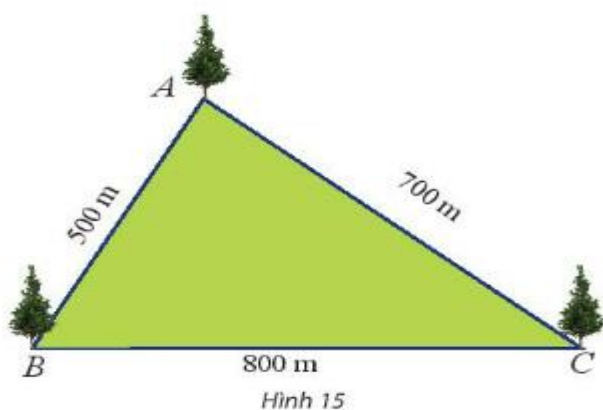
2) Tính độ dài cạnh c trong tam giác ABC ở hình 14.



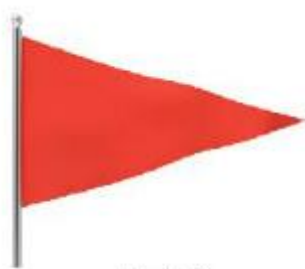
Hình 14

3) Cho tam giác ABC, biết cạnh $a = 152$, $B = 79^\circ$, $C = 61^\circ$. Tính các góc, các cạnh còn lại và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

4) Một công viên có dạng hình tam giác với các kích thước như Hình 15. Tính số đo các góc của tam giác đó.



- 5) Tính diện tích một lá cờ hình tam giác cân có độ dài cạnh bên là 90 cm và góc ở đỉnh là 35° .



- 6) Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 8$ và $A = 60^\circ$.

a. Tính diện tích tam giác ABC .

b. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính diện tích tam giác IBC .

- 7) Cho tam giác ABC có trọng tâm G và độ dài ba cạnh AB, BC, CA lần lượt là 15, 18, 27.

a. Tính diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

b. Tính diện tích tam giác GBC .

- 8) Cho h_a là đường cao vẽ từ đỉnh A , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh hệ thức: $h_a = 2R \sin B \sin C$.

- 9) Cho tam giác ABC có góc B nhọn, AD và CE là hai đường cao.

a. Chứng minh $\frac{S_{BDE}}{S_{BAC}} = \frac{BD \cdot BE}{BA \cdot BC}$

b. Biết rằng $S_{ABC} = 9S_{BDE}$ và $DE = 2\sqrt{2}$. Tính $\cos B$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- 10) Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các đường chéo $AC = x$, $BD = y$ và góc giữa AC và BD bằng α . Gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$.

a. Chứng minh: $S = \frac{1}{2}xy \sin \alpha$.

b. Nêu kết quả trong trường hợp $AC \perp BD$.