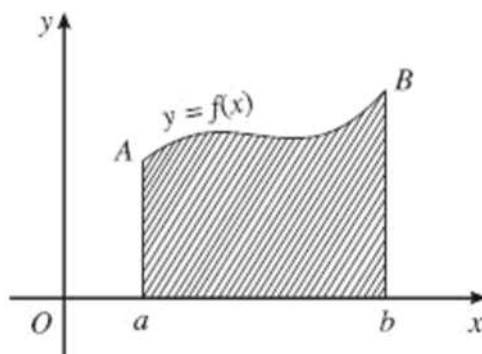


## BÀI 2: TÍCH PHÂN

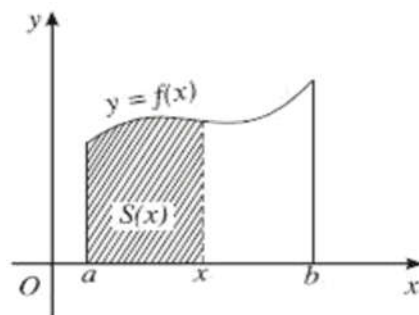
### I. Khái niệm tích phân.

#### 1. Diện tích hình thang cong

Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục, không đổi trên đoạn  $[a; b]$ . Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số  $y = f(x)$ , trục hoành và hai đường thẳng  $x=a$ ,  $x=b$  được gọi là **hình thang cong**.



Khái niệm hình thang cong giúp ta giải bài toán tìm diện tích một hình phẳng được giới hạn bởi một đường cong khép kín (vì nó bằng tổng diện tích của một số hình thang cong dạng này hay dạng khác), bằng cách chuyển từ một bài toán phức tạp về bài toán đơn giản.



#### 2. Định nghĩa tích phân

Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[a; b]$ . Giả sử  $F(x)$  là một nguyên hàm của  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ .

Hiệu số  $F(b) - F(a)$  được gọi là **tích phân** từ  $a$  đến  $b$  (hay tích phân xác định trên đoạn  $[a; b]$ ) của hàm số  $f(x)$  kí hiệu là:  $\int_a^b f(x) dx$

Vậy:  $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Ta gọi  $\int_a^b$  là dấu tích phân,  $a$  là cận dưới,  $b$  là cận trên,  $f(x)dx$  là biểu thức dưới dấu tích phân và  $f(x)$  là hàm số dưới dấu tích phân.

**Chú ý:** Trong trường hợp  $a = b$  hay  $a > b$ , ta quy ước:

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

## II. Tính chất của tích phân

**Tính chất 1:**  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$  ( $k$ : hằng số)

**Tính chất 2:**  $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

**Tính chất 3:**  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$  ( $a < c < b$ )

**Ví dụ:** Tính tích phân:  $A = \int_1^1 (2x+1)dx$

**Giải**

Ta có:  $A = \int_1^1 (2x+1)dx = \int_1^2 2xdx + \int_1^2 1dx = x^2 \Big|_1^2 + x \Big|_1^2 = (4-1) + (2-1) = 4$

## III. Phương pháp tính tích phân

### 1. Phương pháp đổi biến số:

**Định lý**

Cho  $f(x)$  là hàm số liên tục trên đoạn  $[a;b]$ . Giả sử hàm số  $x = \varphi(t)$  có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[\alpha;\beta]$  sao cho  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$  và  $a \leq \varphi(t) \leq b$  với mọi  $t \in [\alpha;\beta]$ . Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Ví dụ:** Tính tích phân  $I = \int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{x^2+1}dx$

**Giải**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2$$

$$\text{Nên } I = \int_1^2 2t^2 dt = 2 \frac{t^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

## 2. Phương pháp tính tích phân từng phần:

**Định lí:**

Nếu  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn  $[a; b]$  thì

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x)) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \text{ hay } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

**Lưu ý:** thứ tự ưu tiên đặt  $u$  : “log, đa thức, mũ, lượng giác”

**Ví dụ:** Tính tích phân  $I = \int_0^1 xe^x dx$

**Giải**

$$\text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx; dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\text{Nên } I = x.e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

## Bài tập tự luyện

**Tính các tích phân sau:**

$$A = \int_1^2 (x^2 - 3x + 1) dx$$

$$B = \int_0^1 (x-1)e^x dx$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

## Bài tập trắc nghiệm

- Câu 1.** Nếu  $\int_1^2 f(x) dx = -2$  và  $\int_2^3 f(x) dx = 1$  thì  $\int_1^3 f(x) dx$  bằng:
- A. -3.                      B. -1.                      C. 1.                      D. 3.
- Câu 2.** Nếu  $\int_0^1 f(x) dx = 4$  thì  $\int_0^1 2f(x) dx$  bằng:
- A. 16.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 8.
- Câu 3.** Biết  $\int_2^3 f(x) dx = 6$ . Giá trị của  $\int_2^3 2f(x) dx$  bằng :
- A. 36.                      B. 3.                      C. 12.                      D. 8.
- Câu 4.** Biết  $F(x) = x^2$  là một nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $\mathbb{R}$ . Giá trị của  $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$  bằng:
- A. 5.                      B. 3.                      C.  $\frac{13}{3}$ .                      D.  $\frac{7}{3}$ .
- Câu 5.** Biết  $\int_2^3 f(x) dx = 4$  và  $\int_2^3 g(x) dx = 1$ . Khi đó:  $\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx$  bằng:
- A. -3.                      B. 3.                      C. 4.                      D. 5.
- Câu 6.** Biết  $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 2$ . Khi đó  $\int_0^1 f(x) dx$  bằng :
- A. 1.                      B. 4.                      C. 2.                      D. 0.
- Câu 7.** Biết  $\int_1^2 f(x) dx = 2$  và  $\int_1^2 g(x) dx = 3$ . Khi đó  $\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx$  bằng:
- A. 1.                      B. 5.                      C. -1.                      D. 6.
- Câu 8.** Cho  $\int_0^1 f(x) dx = -1$ ;  $\int_0^3 f(x) dx = 5$ . Tính  $\int_1^3 f(x) dx$ .

- A. 1.                      B. 4.                      C. 6.                      D. 5.
- Câu 9.** Cho  $\int_1^2 f(x)dx = -3$  và  $\int_2^3 f(x)dx = 4$ . Khi đó  $\int_1^3 f(x)dx$  bằng:
- A. 12.                      B. 7.                      C. 1.                      D. -12.
- Câu 10.** Cho hàm số  $f(x)$  liên tục, có đạo hàm trên  $[-1; 2]$ ,  $f(-1) = 8$ ;  $f(2) = -1$ . Tích phân  $\int_{-1}^2 f'(x)dx$  bằng:
- A. 1.                      B. 7.                      C. -9.                      D. 9.
- Câu 11.** Cho  $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$  và  $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$ , khi đó  $\int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)]dx$  bằng:
- A.  $\frac{5}{2}$                       B.  $\frac{7}{2}$                       C.  $\frac{17}{2}$                       D.  $\frac{11}{2}$
- Câu 12.** Tính tích phân  $I = \int_{-1}^0 (2x+1)dx$ .
- A.  $I = 0$ .                      B.  $I = 1$ .                      C.  $I = 2$ .                      D.  $I = -\frac{1}{2}$ .
- Câu 13.** Giá trị của  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  bằng
- A. 0.                      B. 1.                      C. -1.                      D.  $\frac{\pi}{2}$ .
- Câu 14.** Giả sử  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Khi đó giá trị của  $a - b$  là:
- A.  $-\frac{1}{6}$                       B.  $-\frac{1}{6}$                       C.  $-\frac{3}{10}$                       D.  $\frac{1}{5}$
- Câu 15.**  $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$  bằng:
- A.  $\frac{1}{2} \ln 35$                       B.  $\ln \frac{7}{5}$                       C.  $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$                       D.  $2 \ln \frac{7}{5}$

**Câu 16.** Cho  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$  với  $a, b$  là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $a + 2b = 0$

B.  $a + b = 2$

C.  $a - 2b = 0$

D.  $a + b = -2$

**Câu 17.** Tính tích phân  $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$ .

A.  $I = 1 - \ln 2$ .

B.  $I = \frac{7}{4}$ .

C.  $I = 1 + \ln 2$ .

D.  $I = 2 \ln 2$ .

**Câu 18.**  $\int_0^1 e^{3x+1} dx$  bằng :

A.  $\frac{1}{3}(e^4 + e)$

B.  $e^3 - e$

C.  $\frac{1}{3}(e^4 - e)$

D.  $e^4 - e$

**Câu 19.** Cho  $\int_0^6 f(x) dx = 12$ . Tính  $I = \int_0^2 f(3x) dx$ .

A.  $I = 5$

B.  $I = 36$

C.  $I = 4$

D.  $I = 6$

**Câu 20.** Tính  $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx$ .

A.  $K = \ln 2$ .

B.  $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$ .

C.  $K = 2 \ln 2$ .

D.  $K = \ln \frac{8}{3}$ .

...HẾT...