

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

❶ Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \end{cases}$, phương trình chính tắc: $\frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} \quad (u_1, u_2 \neq 0)$

❷ Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$ có phương trình tổng quát: $ax + by + c = 0$ với $c = -ax_0 - by_0$ hay $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

❸ Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc $k = \frac{u_2}{u_1}$ với $u_1 \neq 0$ có dạng:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

❹ Cho đường thẳng $(\Delta): ax + by + c = 0$, điểm $M(x_0; y_0)$. Khoảng cách

$$d(M; \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

❺ Cho $(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0; (d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Góc giữa hai đường thẳng được tính

$$\text{bởi công thức: } \cos(d_1; d_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

➡ Lưu ý

❑ Góc giữa hai đường thẳng: $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

❑ $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

❑ $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$ với $(d_1): y = k_1 x + m; (d_2): y = k_2 x + n$

❻ Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng $(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0; (d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

TH1: hệ có một nghiệm $(x_0; y_0)$, khi đó (d_1) cắt (d_2) tại một điểm $M(x_0; y_0)$.

TH2: hệ có vô số nghiệm, khi đó (d_1) trùng (d_2) .

TH3: hệ vô nghiệm, khi đó (d_1) song song (d_2) .



Bài tập tự luyện

Bài 1) Viết **phương trình tham số** của đường thẳng (d) trong các trường hợp sau:

- a) (d) đi qua $M(1; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -1)$.
- b) (d) đi qua 2 điểm $M(1; 2)$, $N(-3; 0)$.
- c) (d) qua $M(2; 5)$ và song song với $(\Delta): -2x + 3y + 1 = 0$
- d) (d) qua $M(2; 5)$ và song song với $(\Delta): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
- e) (d) đi qua $M(-1; 2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -2)$.
- f) (d) qua $M(-2; 1)$ và vuông góc với $(\Delta): x - 3y + 2 = 0$.
- g) (d) qua $M(-2; -3)$ và vuông góc với $(\Delta): \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
- h) (d) qua $M(1; -2)$ và song song với trục Oy .
- i) (d) qua $M(3; -1)$ và song song với trục Ox .

Bài 2) Viết **phương trình tổng quát** của đường thẳng (d) trong các trường hợp sau:

- a) (d) đi qua $M(2; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; 3)$.
- b) (d) đi qua $M(5; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -3)$.
- c) (d) đi qua 2 điểm $M(-1; 4)$, $N(3; -5)$.
- d) (d) qua $M(0; 3)$ và song song với $(\Delta): x + y - 5 = 0$.
- e) (d) qua $M(-3; 7)$ và song song với $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
- f) (d) qua $M(2; -5)$ và vuông góc với $(\Delta): 2x - 5y + 3 = 0$
- g) (d) qua $M(2; -2)$ và vuông góc với $(\Delta): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

h) (d) qua $M(2; -3)$ và có hệ số góc $k = -\frac{3}{2}$.

Bài 3) Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $(\Delta): 2x - y + 3 = 0$: $A(2; 1)$, $B(0; 3)$, $C(1; 5)$, $D(-3; 5)$.

Bài 4) Cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases} (t \in R)$.

a) Tìm tọa độ các điểm thuộc (Δ) ứng với $t = 0; t = -1; t = 2; t = 1; t = -3$.

b) Điểm nào sau đây không thuộc (Δ) : $A(0; 1)$, $B(1; 3)$, $C(3; 2)$, $D(1; -2)$.

Bài 5) Chuyển về **phương trình tổng quát** của đường thẳng (d) khi biết:

a) $d: \begin{cases} x = -3t \\ y = 2 + 4t \end{cases} (t \in R)$

b) $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{cases} (t \in R)$

c) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases} (t \in R)$

d) $d: \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 5 + t \end{cases} (t \in R)$

Bài 6) Chuyển về **phương trình tham số** của đường thẳng (d) khi biết:

a) (d): $2x + 3y - 5 = 0$

b) (d): $x - 4y = 7$

c) (d): $5x - y - 3 = 0$

d) (d): $-2x + y - 3 = 0$

Bài 7) Tìm **hệ số góc** của các đường thẳng sau:

a) $2x - 3y + 4 = 0$

b) $4x + 3y - 1 = 0$

c) $2y - 4 = 0$

d) $-3y - 9 = 0$

e) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases} (t \in R)$

f) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 5t - 1 \end{cases} (t \in R)$

Bài 8) Trong mp Oxy, cho ΔABC với $A(0; 1)$, $B(-1; 3)$, $C(3; -2)$.

a) Viết phương trình **tham số** cạnh AC.

b) Viết phương trình **tham số** đường trung tuyến AM, đường cao AH.

c) Viết phương trình **tham số** đường trung trực của cạnh AC.

d) Viết phương trình **tham số** các đường trung bình của ΔABC .

Bài 9) Trong mp Oxy, cho ΔABC với $A(-1; 1)$, $B(1; -3)$, $C(3; 2)$.

a) Viết phương trình **tổng quát** cạnh AB.

b) Viết phương trình **tổng quát** các đường trung tuyến AM, BN.

c) Viết phương trình **tổng quát** các đường cao AH, BK. Tìm tọa độ trực tâm H.

- d) Viết phương trình **tổng quát** đường trung trực của các cạnh AC, AB. Tìm tọa độ giao điểm O của các đường trung trực này.
- e) Viết phương trình **tổng quát** các đường trung bình của ΔABC .
- f) Tìm điểm H thuộc đường thẳng AC sao cho độ dài BH ngắn nhất.

Bài 10) Tìm tọa độ **hình chiếu vuông góc** H của M lên đường thẳng (d) và xác định tọa độ điểm M_1 **đối xứng** với M qua (d)

a) $M(-6;4), (\Delta): 4x - 5y + 3 = 0$

b) $M(1;4), (\Delta): 3x + y - 4 = 0$

c) $M(3;5), (d): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$

Bài 11) Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC .

a) $A(0;3), B(3;0), C(-1;-1)$.

b) $A(-2;1), B(2;-3), C(5;0)$.

Bài 12) Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau. Tìm tọa độ giao điểm khi hai đường thẳng cắt nhau.

a) $d_1: 4x - 10y + 1 = 0; d_2: x + y + 2 = 0$

b) $d_1: 4x + 5y - 6 = 0; d_2: \begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases} t \in R$.

c) $d_1: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases} t \in R; d_2: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 3t \end{cases} t \in R$

d) $d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases} t \in R; d_2: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + 6t \end{cases} t \in R$

Bài 13) Tính **khoảng cách** từ điểm M đến đường thẳng (d) trong các trường hợp:

a) $M(3;5)$ và $(d): 4x + 3y + 1 = 0$.

b) $M(1;-2)$ và $(d): 3x - 4y - 26 = 0$.

c) $M(1;2)$ và $(d): \begin{cases} x = 1 + 12t \\ y = -1 - 5t \end{cases} (t \in R)$.

d) $M(3;-5)$ và $(d): \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -5 - 3t \end{cases} (t \in R)$.

Bài 14) Tính **số đo góc** tạo thành bởi hai đường thẳng d_1 và (d_2) trong các trường hợp sau:

a) $d_1 : x - 2y + 5 = 0; d_2 : 3x - y = 0$

b) $d_1 : x + 2y + 4 = 0; d_2 : x - 3y + 1 = 0$

c) $d_1 : 3x - 2y + 1 = 0; d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 5t \end{cases} t \in R$

d) $d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \end{cases} t \in R ; d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{9}{5} - \frac{1}{5}t \end{cases} t \in R$

Bài 15) Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với (d) qua điểm I.

a) $I(-3;1), (d): 2x + y - 3 = 0$

b) $I(1;1), (d): 3x - 2y + 1 = 0$

c) $I(-1;3), (d): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 - 2t \end{cases} (t \in R)$

d) $I(0;2), (d): \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 - 4t \end{cases} (t \in R)$

Bài 16) Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ) biết:

a) $d : x + 2y - 1 = 0, \Delta : 2x - y + 3 = 0$

b) $d : 2x + 3y + 5 = 0, \Delta : 5x - y + 4 = 0$

c) $d : 5x + y - 6 = 0, \Delta : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{3}$

d) $d : -2x + y + 3 = 0, \Delta : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} t \in R$

Bài 17) Lập phương trình ba cạnh AB, AC, BC của ΔABC biết trung điểm các cạnh lần lượt là $M(-1;1), N(1;-3), P(3;2)$.

Bài 18) Lập phương trình 3 đường trung trực của ΔABC biết trung điểm của AB, BC, AC lần lượt là $M(-1;0), N(4;1), P(2;4)$.

Bài 19) Cho ΔABC biết $AB: x - 3y + 11 = 0$, hai đường cao $AH: 3x + 7y - 15 = 0$, $BH: 3x - 5y + 13 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng chứa hai cạnh còn lại của ΔABC .

Bài 20) Lập phương trình các cạnh của ΔABC biết $A(3;5)$, đường cao và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh có phương trình lần lượt là: $(d): 5x + 4y - 1 = 0, (m): 8x + y - 7 = 0$.

- Bài 21)** Lập phương trình các cạnh của ΔABC biết $B(0;3)$, đường cao và đường trung tuyến kẻ từ một đỉnh có phương trình lần lượt là: $(d): 2x - 7y + 23 = 0, (m): 7x + 4y - 5 = 0$.
- Bài 22)** Lập phương trình các cạnh của ΔABC biết $A(3;1)$ và 2 đường trung tuyến (d_1) và (d_2) có phương trình là: $(d): 2x - y - 1 = 0, (m): x - 1 = 0$.
- Bài 23)** Phương trình 2 cạnh của một tam giác là: $(d_1): x + y - 2 = 0, (d_2): x + 2y - 5 = 0$ và trực tâm $H(2;3)$. Lập phương trình cạnh thứ 3.
- Bài 24)** Xác định tọa độ các đỉnh và lập phương trình cạnh BC của ΔABC biết trung điểm của BC là $M(2;3)$, $AB: x - y - 1 = 0$, $AC: 2x + y = 0$.
- Bài 25)** Xác định tọa độ các đỉnh và lập phương trình cạnh BC của ΔABC biết trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$ và $AB: x - 3y + 13 = 0$, $AC: 12x + y - 29 = 0$.
- Bài 26)** Lập phương trình các cạnh của ΔABC biết $A(0;3)$, phương trình 2 đường phân giác trong xuất phát từ B và C lần lượt là $(d_B): x - y = 0, (d_C): 2x + y - 8 = 0$.
- Bài 27)** Lập phương trình các cạnh của ΔABC biết $A(-4;3)$, $B(9;2)$ và phương trình phân giác trong xuất phát từ C là $(d): x - y + 3 = 0$.
- Bài 28)** Cho ΔABC biết phương trình cạnh $BC: x + 4y - 8 = 0$ và phương trình 2 đường phân giác trong xuất phát từ B và C lần lượt là: $(d_B): y = 0, (d_C): 5x + 3y - 6 = 0$.
- Bài 29)** Lập phương trình các cạnh của ΔABC biết $B(2;-3)$, phương trình đường cao hạ từ A và trung tuyến từ C lần lượt là: $(d): 3x - 2y + 3 = 0, (\Delta): 7x + y - 2 = 0$
- Bài 30)** Cho $(\Delta_1): \sqrt{3}x - y + 7 = 0, (\Delta_2): mx + y + 1 = 0$. Tìm m để góc giữa $(\Delta_1, \Delta_2) = 30^\circ$.
- Bài 31)** Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và tạo với (Δ) một góc:
- $M(-1;2), (\Delta): x - 2y + 3 = 0, \alpha = 45^\circ$
 - $M(2;0), (\Delta): \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + t \end{cases}, \alpha = 45^\circ$
 - $A(2;-4), (n): x + y + 3 = 0, \alpha = 45^\circ$
 - $M(4;3), (\Delta): 3x - 2y + 1 = 0, \alpha = 45^\circ$
 - $M(-2;-1), (\Delta): 3x + 2y - 1 = 0, \alpha = 30^\circ$
- Bài 32)** Lập phương trình các cạnh của hình chữ nhật ABCD biết $A(1;1)$, góc $ABD = 60^\circ$ và phương trình cạnh $BD: 2x - y - 4 = 0$.
- Bài 33)** Cho $(d_1): kx - y + k = 0; (d_2): (1 - k^2)x + 2ky - 1 - k^2 = 0$. Chứng minh rằng:

- a) Đường thẳng (d_1) luôn đi qua 1 điểm cố định với mọi k .
- b) Đường thẳng (d_1) luôn cắt (d_2) . Xác định tọa độ của chúng.

Bài 34) Tính bán kính đường tròn (O) trong các trường hợp :

- a) Đường tròn (O) có tâm $I(1;-1)$ và tiếp xúc với $(d): 5x - 12y - 26 = 0$.
- b) Đường tròn (O) có tâm $I(2;-2)$ và tiếp xúc với $(d): 4x - 3y - 10 = 0$.
- c) Đường tròn (O) có tâm $I(3;-1)$ và tiếp xúc với $(d): \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = -1 + 12t \end{cases} (t \in R)$

Bài 35) Cho $(d): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} (t \in R)$. Tìm điểm M thuộc d và cách điểm $A(0;1)$ một khoảng bằng 5.

Bài 36) Cho đường thẳng $(D): 3x + y - 6 = 0$. Tìm những điểm nằm trên (D) và cách đường thẳng $(D'): x + 2y - 2 = 0$ một khoảng bằng $\sqrt{5}$.

Bài 37) Viết phương trình đường thẳng (D) song song với đường thẳng $(D'): 3x - 4y + 12 = 0$ và cách điểm $A(2;3)$ một đoạn bằng 2.

Bài 38) Lập phương trình đường thẳng (d) song song với $(\Delta): 3x - 4y + 1 = 0$ và cách (Δ) khoảng bằng 1.

Bài 39) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2;5)$ và cách đều hai điểm $A(-1;2)$, $B(5;4)$.

Bài 40) Tìm M thuộc trục tung và cách đều 2 đường thẳng: $3x - 4y + 6 = 0$ và $4x - 3y - 9 = 0$.

Bài 41) Cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} (t \in R)$

- a) Tìm điểm M trên (Δ) và cách điểm $I(2;0)$ một khoảng bằng 10.
- b) Tìm điểm C trên (Δ) sao cho ΔABC cân tại C biết $A(2;5)$, $B(4;1)$.
- c) Tìm điểm D trên (Δ) sao cho khoảng cách từ D đến đường $(d): x - 2y + 4 = 0$ bằng 6.

Bài 42) Cho ΔABC có phương trình $(AB): 3x + 4y - 1 = 0$, $(AC): 4x + 3y - 7 = 0$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

