

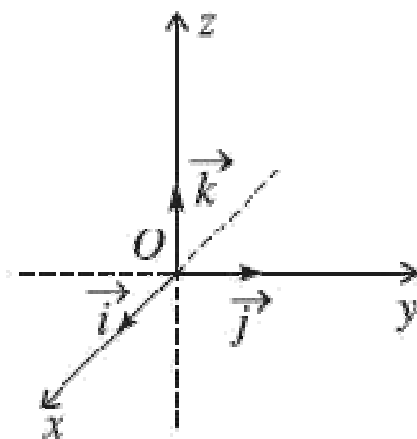
CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. Tọa độ của điểm và của vectơ

1. Hệ tọa độ

Trong không gian, cho ba trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$. Hệ ba trục này được gọi là **hệ tọa độ Oxyz**.



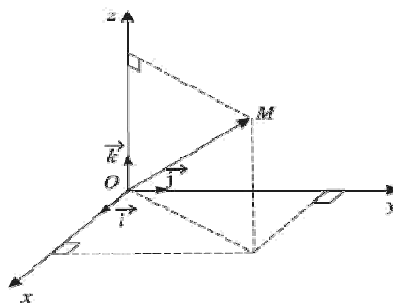
Trong đó:

- O là gốc tọa độ.
- Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.
- Không gian với hệ tọa độ Oxyz được gọi là không gian Oxyz.

Lưu ý: tọa độ của các vectơ đơn vị là $\vec{i}(1;0;0), \vec{j}(0;1;0), \vec{k}(0;0;1)$

2. Tọa độ của một điểm

Trong không gian Oxyz, cho một điểm M tùy ý có duy nhất bộ ba số $(x;y;z)$ thỏa $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ta gọi bộ ba số $(x;y;z)$ là tọa độ của điểm M và viết $M = (x;y;z)$ hay $M(x;y;z)$



3. Tọa độ của vector

Trong không gian $Oxyz$ cho vector $\vec{a}$, khi đó luôn tồn tại duy nhất bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ sao cho $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là tọa độ của vector $\vec{a}$ và viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hay $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Nhận xét: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ của điểm M chính là tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$.
Ta có: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$

II. Biểu thức tọa độ của phép toán vector

Định lý

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

- a) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
- b) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
- c) $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ với k là số thực.

Hệ quả

- a) Cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

$$\text{Ta có: } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

- b) Vector $\vec{0}$ có tọa độ là $(0; 0; 0)$.
- c) Với $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi có một số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$
- d) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$

Ta có:

$$\square \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\square \text{ Tọa độ trung điểm } M \text{ của đoạn thẳng } AB: M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

□ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

III. Tích vô hướng

1. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định lí

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

2. Ứng dụng

a) Độ dài của vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ là $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

b) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Khoảng cách giữa hai điểm A và B chính là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$. Ta có: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

c) Góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

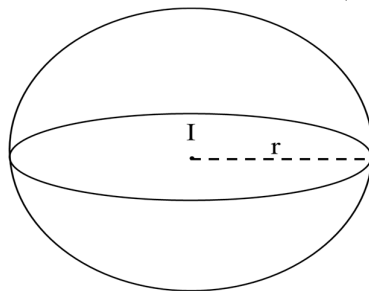
IV. Phương trình mặt cầu

Định lí

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính r có phương trình:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Nhận xét: Phương trình mặt cầu có thể viết dưới dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$



Ví dụ: Xác định tâm và bán kính của mặt cầu sau:

a) (S): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$ có tâm $I(1; 2; 3)$, $r = 4$.

b) (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 6z - 3 = 0$

Ta có: $a = 2; b = -3; c = -3; d = -3$ nên tâm $I(2; -3; -3)$, $r = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-3)^2 - (-3)} = 5$.

Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho vector $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm M ?

- A. $M(2; 5; 3)$. B. $M(-2; -5; -3)$. C. $M(2; -5; 3)$. D. $M(-2; 5; -3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3; -1; 2)$, $\vec{b} = (4; 2; -6)$. Tính tọa độ của vector $\vec{a} + \vec{b}$.

- A. $\vec{a} + \vec{b} = (1; 3; -8)$. B. $\vec{a} + \vec{b} = (7; 1; -4)$.
C. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; -3; 8)$. D. $\vec{a} + \vec{b} = (-7; -1; 4)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $M(1; -2; 4)$, $N(-2; 3; 5)$. Tính tọa độ của $\overrightarrow{MN}$

- A. $\overrightarrow{MN} = (-3; 5; 1)$ B. $\overrightarrow{MN} = (3; -5; -1)$ C. $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; 9)$ D. $\overrightarrow{MN} = (1; -1; -9)$

Câu 4. Cho $\vec{a} = (2; -1; 2)$. Tìm y, z sao cho $\vec{c} = (-2; y; z)$ cùng phương với $\vec{a}$.

- A. $y = -1, z = 2$ B. $y = 2, z = -1$ C. $y = 1, z = -2$ D. $y = -2, z = 1$

Câu 5. Tính góc giữa hai vector $\vec{a} = (-2; -1; 2)$ và $\vec{b} = (0; 1; -1)$.

- A. 135° B. 90° C. 60° D. 45°

Câu 6. Cho $\vec{a} = (1; m; -1)$ và $\vec{b} = (2; 1; 3)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

- A. $m = 1$ B. $m = -1$ C. $m = -2$ D. $m = 2$

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$. Tọa độ tâm G của tam giác ABC là:

- A. $\left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}; 2\right)$ B. $\left(\frac{10}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{10}{3}\right)$ D. $\left(\frac{1}{3}; 2; \frac{4}{3}\right)$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 điểm $A(1; -2; 1)$, $B(5; 6; 3)$. Tọa độ trung điểm I của AB.

- A. $(6; 4; 4)$ B. $(3; 2; 2)$ C. $(4; 8; 2)$ D. $(2; 4; 1)$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hành ABDC với $A(1; 2; 1)$, $B(1; 1; 0)$, $C(1; 0; 2)$. Tọa độ đỉnh D là:

- A. $(1; -1; 1)$ B. $(1; 1; 3)$ C. $(1; -1; 3)$ D. $(-1; 1; 1)$

Câu 10. Cho 2 điểm $A(2; -1; 3)$, $B(4; 3; 3)$. Tìm điểm M thỏa $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

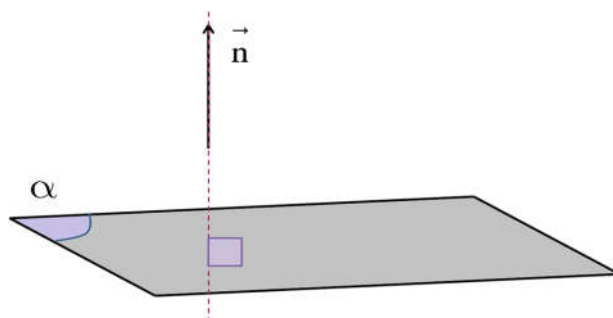
- A. $(-2; 9; 3)$ B. $(2; -9; 3)$ C. $(2; 9; -3)$ D. $(-2; -9; 3)$

BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

I. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

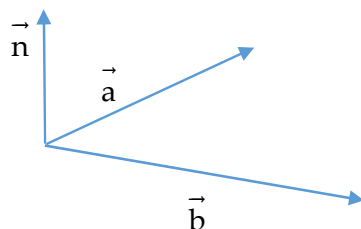
Định nghĩa

Cho mặt phẳng (α) . Nếu vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của (α) .



Chú ý:

- ☐ Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng thì $k\vec{n}$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đó.
- ☐



- Vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- Vectơ $\vec{n}$ xác định như trên được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ hay $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.
- Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng giữa 2 vectơ là

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

II. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

1. Định nghĩa

Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét:

- a) Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

Ví dụ: phương trình mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 5 = 0$ có vtpt $\vec{n} = (2; -1; 3)$.

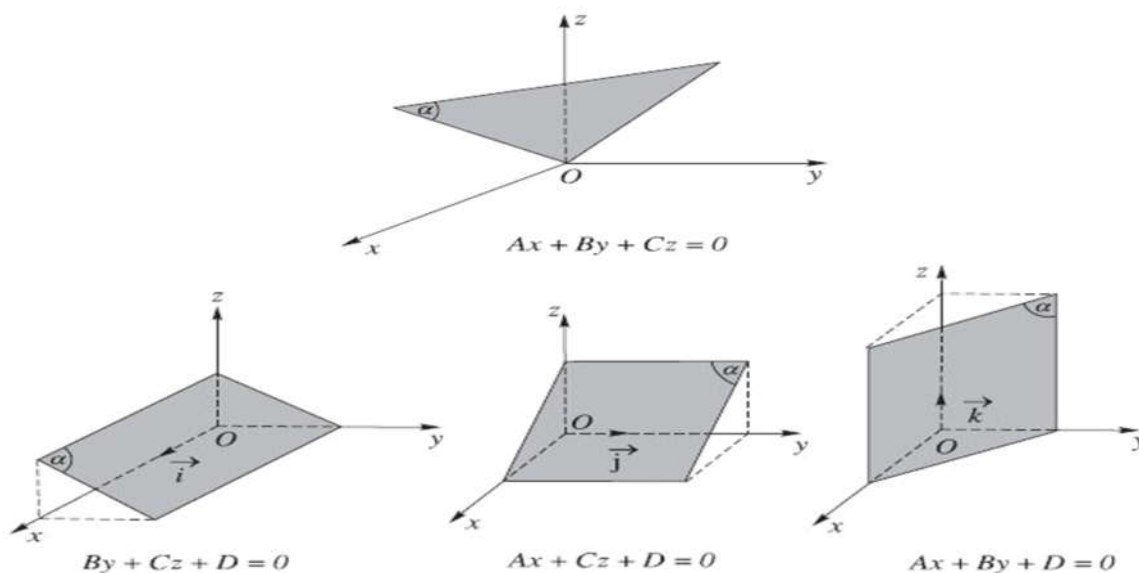
b) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ khác $\vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

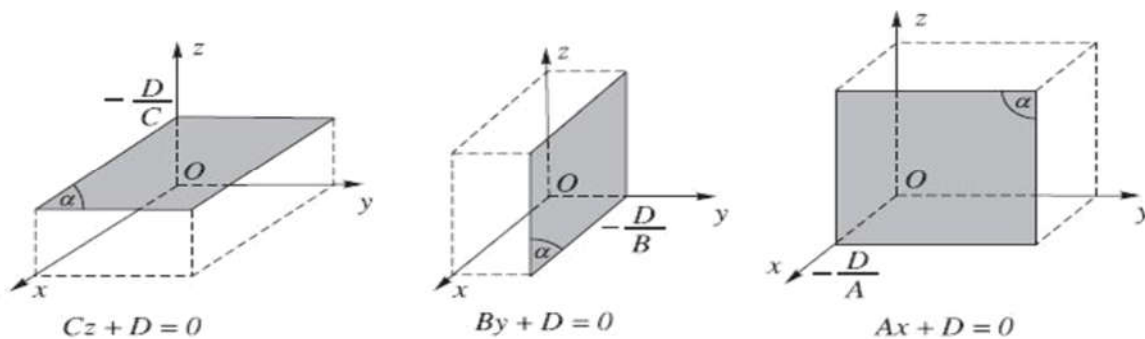
Ví dụ: phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vtpt $\vec{n} = (4; 5; 6)$ là
 $(P): 4(x - 1) + 5(y - 2) + 6(z - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y + 6z - 32 = 0$

2. Các trường hợp riêng

Phương trình (α)	Đặc điểm của (α)
$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ
$By + Cz + D = 0$	(α) song song hoặc chứa Ox
$Ax + Cz + D = 0$	(α) song song hoặc chứa Oy
$Ax + By + D = 0$	(α) song song hoặc chứa Oz
$Cz + D = 0$	(α) song song hoặc trùng với (Oxy)
$By + D = 0$	(α) song song hoặc trùng với (Oxz)
$Ax + D = 0$	(α) song song hoặc trùng với (Oyz)

Lưu ý: phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ nghĩa là mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $(a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)$





Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 4z + 2022 = 0$. Véc tơ nào sau đây là một VTPT của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n} = (-2; -3; 4)$ B. $\vec{n} = (-2; 3; 4)$ C. $\vec{n} = (-2; 3; -4)$ D. $\vec{n} = (2; 3; -4)$

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $z = 0$.
 B. Phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $y = 0$.
 C. Phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $x = 0$.
 D. Phương trình của mặt phẳng (Oxy) là: $x + y = 0$.

Câu 3. Mặt phẳng qua 3 điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;3)$ có phương trình:

- A. $x - 2y + 3z = 1$. B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 6$. C. $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1$. D. $6x - 3y + 2z = 6$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2; -3; 5)$ và nhận $\vec{n} = (1; 2; -6)$ làm VTPT có phương trình là:

- A. $x + 2y - 6z + 34 = 0$ B. $2x - 3y + 5z + 34 = 0$
 C. $x + 2y - 6z - 34 = 0$ D. $2x - 3y + 5z - 34 = 0$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng $(P): 3x + 2y - 13 = 0$.

- A. $(3; 2; -13)$ B. $(1; 2; -2)$ C. $(-2; -3; 1)$ D. $(13; 2; 3)$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-3x + 2z - 2 = 0$. Khi đó mặt phẳng (P) song song với:

- A. Trục Oy B. Trục Oz
 C. Mặt phẳng (Oxy) D. Trục Ox

...HẾT...