

§3: TÍCH MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO

TÓM TẮT

- ❶ Qui ước: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}; k \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- ❷ I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M. Ta có: $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$
- ❸ G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M. Ta có: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.
- ❹ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\vec{AB} = k\vec{AC} (k \neq 0)$
- ❺ Cho hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương với mọi $\vec{x}$. Ta có: $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.



Bài tập tự luyện

Bài 1) Cho $\vec{a} = \vec{AB}$ và điểm O. Xác định điểm M, N sao cho: $\vec{OM} = 3\vec{a}; \vec{ON} = -4\vec{a}$.

Bài 2) Cho đoạn thẳng AB và một điểm M nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$.

Tìm số k sao cho:

a) $\vec{AM} = k\vec{AB}$

b) $\vec{AM} = k\vec{BA}$

c) $\vec{MA} = k\vec{MB}$

Bài 3) Cho hình bình hành ABCD có tâm O và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $\vec{DO} + \vec{AO} = \vec{AB}$

b) $\vec{CO} - \vec{OB} = \vec{BA}$

c) $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$

d) $\vec{DA} - \vec{DB} = \vec{OD} - \vec{OC}$

e) $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD} = 2\vec{MO}$

f) $\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} + \vec{DM} = 4\vec{OM}$

Bài 4) Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

Chứng minh rằng:

a) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

b) $\vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PM} = \vec{0}$

c) $\vec{AN} + \vec{CM} - \vec{PB} = \vec{0}$

d) $\vec{AP} + \vec{BM} + \vec{MP} = \vec{0}$

e) $\vec{AP} + \vec{BM} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

f) $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$

g) $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$

h) $\vec{AP} + \vec{BM} + \vec{AN} + \vec{BP} = \vec{PC}$

Bài 5) Cho hình thang OABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC.

Chứng minh rằng:

a) $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{OB} - \vec{OA}$

b) $\vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{OC} - \vec{OB}$

c) $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{OC} - \vec{OB})$

Bài 6) Cho ΔABC có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ b) $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{IC}$ c) $\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MI}$

Bài 7) Cho ΔABC có trọng tâm G . Gọi M thuộc cạnh BC sao cho $MB = 2MC$.

Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$. b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Bài 8) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và O, M là điểm bất kỳ. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$ b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

Bài 9) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . G là trung điểm của FH , M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}$

Bài 10) Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm của AD .

Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ b) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}$

Bài 11) Cho 4 điểm A, B, C, D . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{DA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$.

Bài 12) Cho ΔABC . Trên cạnh BC lấy các điểm D, E, F sao cho: $BD = DE = EF = FC$.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AE}$.

Bài 13) Cho tứ giác $ABCD$ có AB không song song với CD . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC, DB .

a) Chứng minh: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ và $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.

b) Chứng minh: $MNPQ$ là hình bình hành.

c) Gọi I là trung điểm của MN và O là điểm bất kỳ.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$.

Bài 14) Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, DC . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$ b) $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}$

$$c) 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = 3\overrightarrow{AC}$$

Bài 15) Cho ΔABC . Gọi H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Gọi D là điểm đối xứng với A qua O.

a) Chứng minh rằng: BHCD là hình bình hành. Từ đó hãy tính tổng $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$.

b) CM: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) Nhận xét gì về 3 điểm O, G, H?

Bài 16) Cho tứ giác ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Bài 17) Cho hình bình hành ABCD tâm O. **Dựng M, I, F sao cho:**

$$a) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MD}$$

$$b) \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} + 4\overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

$$c) 2\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} = 3\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{FD}$$

Bài 18) Cho 3 điểm A, B, C. **Tìm vị trí điểm M thỏa:**

$$a) \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$$

$$b) 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$c) \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$d) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$e) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$f) \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Bài 19) Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K, D lần lượt là trung điểm của MN và BC. Chứng minh:

$$a) \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$b) \overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Bài 20) Cho ΔABC . Lấy điểm I nằm trên đoạn BC sao cho $IB = 2IC$. Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Bài 21) Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi H là điểm đối xứng của B qua G. Chứng minh:

$$a) \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$b) \overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$c) \text{ Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: } \overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$$

Bài 22) Cho hình bình hành ABCD tâm O. **Hãy xác định các điểm I, J, K L thỏa:**

$$a) \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{ID}$$

$$b) 2\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = 3\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JD}$$

$$c) 2\overrightarrow{AK} + 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$$

$$d) 4\overrightarrow{LA} + 3\overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}$$

Bài 23) Cho ΔABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J thuộc BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$.

b) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$.

Bài 24) Cho $\triangle ABC$ và M, N là trung điểm của AB, AC.

a) Gọi P, Q là trung điểm MN và BC. Chứng minh rằng: A, P, Q thẳng hàng.

b) Gọi E, F thoả: $\overrightarrow{ME} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng: A, E, F thẳng hàng.

Bài 25) Cho $\triangle ABC$ biết E là trung điểm của AB và F thuộc đoạn AC thoả mãn $AF = 2FC$.

a) Gọi M là trung điểm của BC và I thuộc đoạn EF sao cho $4EI = 3FI$. Chứng minh rằng: A, M, I thẳng hàng.

b) Lấy điểm N thuộc đoạn BC sao cho $BN = 2NC$ và điểm J thuộc đoạn EF sao cho $2EJ = 3JF$. Chứng minh rằng: A, J, N thẳng hàng.

Bài 26) Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P là các điểm thoả mãn: $\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}$. Chứng minh rằng: M, N, P thẳng hàng.

Bài 27) Cho $\triangle ABC$. Gọi L, M, N là các điểm thoả mãn: $\overrightarrow{LB} = 2\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{MC} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}$.

Chứng minh rằng: L, M, N thẳng hàng.

Bài 28) Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Gọi I, J thoả mãn: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Chứng minh rằng:

a) Ba điểm M, N, J thẳng hàng với M, N là trung điểm AB, BC.

b) J là trung điểm của BI.

c) Gọi E là điểm thuộc đoạn AB và thoả mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

Bài 29) Cho hai điểm A, B cố định. Tìm quỹ tích điểm M sao cho:

a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{AB}|$

b) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{AB}|$

c) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MA}|$

d) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA}|$