

§2: HÀM SỐ BẬC NHẤT

❶ **Hàm số:** $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

- Tập xác định $D = R$.
- Hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $R \Leftrightarrow a > 0$
- Hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên $R \Leftrightarrow a < 0$
- Đồ thị hàm số là đường thẳng qua điểm $A(0; b), B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$

❷ **Hàm số hằng:** $y = b$.

- Tập xác định $D = R$.
- Đồ thị hàm số $y = b$ là đường thẳng song song với trục hoành Ox và đi qua điểm $A(0; b)$.

❸ **Hàm số:** $y = |x|$.

- Tập xác định $D = R$.
- Hàm số $y = |x|$ là hàm số chẵn.
- Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.
- Đồ thị hàm số $y = |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$

❹ **Định lý:** $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$

- (d) song song $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.
- (d) trùng $(d') \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.
- (d) cắt $(d') \Leftrightarrow a \neq a'$.
- Số giao điểm của d và d' là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax - y = b \\ a'x - y = b' \end{cases}$$

❺ **Chú ý:** $a \cdot a' = -1 \Leftrightarrow d \perp d'$.



Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

- a) Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của đồ thị hàm số $y = x - 1$ và $y = 4x + 8$.
- b) Tìm a, b biết đồ thị hàm số $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $A(-1; 6)$ và $B(1; 2)$.
- c) Tìm a, b biết đồ thị hàm số $(d): y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; -1)$ và $(\Delta): y = 2x + 7$.

Lời giải

a) Gọi M là giao điểm cần tìm. Suy ra M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 4x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -1 \\ -4x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Vậy: giao điểm cần tìm là $M(-3; -4)$.

b) Ta có: $\begin{cases} A(-1; 6) \in (d) \\ B(1; 2) \in (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -a + b \\ 2 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}.$

Vậy: $(d): y = -2x + 4$.

c) Ta có: $(d) // (\Delta) \Rightarrow (d): y = 2x + m (m \neq 7)$

Mà $M(1; -1) \in (d): -1 = 2.1 + m \Leftrightarrow m = -3$

Vậy: $(d): y = 2x - 3$

Ví dụ 2

Định m để đồ thị hàm số $y = (3m - 1)x + m + 3; y = 2x - 1$ song song với nhau?

Lời giải

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 = 2 \\ m + 3 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq -4 \end{cases}.$$

Vậy: $m = 1$ thỏa ycbt.

Ví dụ 3

Định m để đồ thị hàm số $(d_1): y = x - 4; (d_2): y = 2x + 3; (d_3): y = mx + m + 1$ đồng quy.

Lời giải

Gọi N là giao điểm cần tìm. Nên N là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x - 4 & (1) \\ y = 2x + 3 & (2) \\ y = mx + m + 1 & (3) \end{cases}$$

Từ (1), (2): $\begin{cases} x = -7 \\ y = -11 \end{cases} (4).$

Thế (4) vào (3): $-11 = -7m + m + 1 \Leftrightarrow m = 2$

Vậy: $m = 2$ thỏa ycbt.



Bài tập tự luyện

Bài 1) Vẽ các đồ thị hàm số sau.

a) $y = x + 1$

b) $y = 1 - x$

c) $y = 1$

d) $y = -2$

Bài 2) Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của đồ thị hai hàm số.

a) $y = x + 2$ và $y = 3 - 2x$

b) $y = 3x - 1$ và $y = x + 1$

Bài 3) Định m để:

a) Đồ thị hàm số $y = 3x + 5$ và $y = (m + 2)x + 5$ cắt nhau.

b) Đồ thị hàm số $y = 2x - 2$ và $y = (m^2 + 1)x + 2m$ song song.

c) Đồ thị hàm số $y = x - 2$ và $y = m^2x - 2m$ trùng nhau.

Bài 4) Tìm m để các đường thẳng sau đồng quy.

a) $(d_1): y = x + 3; (d_2): y = -x + 1; (d_3): y = 2mx + m - 1.$

b) $(d_1): y = 2x - 1; (d_2): y = mx - m; (d_3): y = 3x - m.$

Bài 5) Tìm a, b biết đồ thị hàm số $y = ax + b$.

a) Đi qua hai điểm $A(1; -3)$ và $B(2; 3)$

b) Đi qua điểm $M(2; -1)$ và song song với $y = x + 3.$

c) Đi qua $M(1; 2)$ và vuông góc với $y = \frac{1}{4}x + 2019$

d) Đi qua $M(-1, 1)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5.

e) Đi qua $N(1; 2)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -4.

Bài 6) Cho đường thẳng (d): $y = ax + b$. Trong mỗi trường hợp sau xác định a, b sao cho:

- a) (d) cắt trục tung và trục hoành lần lượt tại hai điểm có tung độ bằng 3 và hoành độ bằng -5.
- b) (d) cắt $(d_1): y = -x - 5$ tại điểm có hoành độ bằng 4 và cắt $(d_2): y = 2x - 1$ tại điểm có tung độ bằng 3.
- c) (d) // $(\Delta): y = 2x$ và qua giao điểm của hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = 3x - 2$
- d) (d) // $(d_1): y = \frac{1}{2}x$ và (d) cắt $(d_2): y = 2x - 3$ tại một điểm trên trục hoành.
- e) (d) cắt $(D_1): y = 3x - 6$ tại 1 điểm trên trục Ox và cắt $(D_2): y = 2x - 1$ tại 1 điểm trên trục Oy .

§3: HÀM SỐ BẬC HAI

❶ Hàm số bậc hai: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- Tập xác định $D = R$.
- Sự biến thiên:
 - ❑ Nếu $a > 0$: hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
 - ❑ Nếu $a < 0$: hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
- Đồ thị là Parabol có:
 - ◇ Đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
 - ◇ Đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ là trục đối xứng.

❷ Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- | | |
|--|-------------------------------------|
| B ₁) Tập xác định. | B ₂) Tìm tọa độ đỉnh I. |
| B ₃) Xác định trục đối xứng. | B ₄) Giao Ox, Oy . |
| B ₅) Bảng giá trị. | B ₆) Vẽ. |

→ Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C).

③ Cách vẽ đồ thị $(C_1): y = f(|x|)$.

Hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua trục Oy. Do đó:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x \geq 0$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục Oy.
- Hợp hai phần đồ thị trên cho đồ thị (C_1) .

④ Cách vẽ đồ thị $(C_2): y = |f(x)|$

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x); f(x) \geq 0 \\ -f(x); f(x) < 0 \end{cases}$$

Đồ thị (C_2) được vẽ như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên trục Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới trục Ox qua trục Ox.
- Hợp hai phần đồ thị trên ta có đồ thị (C_2) .

⑤ Cách vẽ đồ thị $(C_3): y = |f(|x|)|$

Vẽ (C_3) bằng cách kết hợp vẽ (C_1) và (C_2) .

**Bài tập tự luyện**

Bài 1) Lập bảng biến thiên và vẽ các Parabol. Suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, $y = |f(|x|)|$.

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = -x^2 + 2x + 3$

c) $y = x^2 + 2x$

d) $y = -x^2 + 4$

Bài 2) Tìm tọa độ giao điểm (nếu có) của đồ thị hai hàm số.

a) $y = x - 1$ và $y = x^2 - 2x - 1$.

b) $y = 2x + 1$ và $y = x^2 - x - 2$.

c) $y = 2x^2 + 3x + 2$ và $y = -x^2 + x - 1$.

d) $y = 4x^2 - 8x + 4$ và $y = -2x^2 + 4x - 2$.

Bài 3) Tìm Parabol: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) biết rằng Parabol đó:

a) Đi qua ba điểm $A(1, -1), B(2, 3), C(-1, -3)$.

b) Cắt trục hoành tại $x_1 = 2$ và $x_2 = 3$, cắt trục tung tại $y = 6$.

- c) Đi qua hai điểm $A(-1;5)$, $B(2;-1)$ và có trục đối xứng $x = 1$.
- d) Có đỉnh $S(1;-4)$ và đi qua điểm $M(2;-3)$.

Bài 4) Tìm Parabol: $y = ax^2 + bx + 2$ ($a \neq 0$) biết rằng Parabol đó:

- a) Đi qua hai điểm $A(1;5)$ và $B(-2;8)$.
- b) Cắt trục hoành tại $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.
- c) Đi qua điểm $C(1;-1)$ và có trục đối xứng $x = 2$.
- d) Có đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.
- e) Đi qua điểm $M(1;1)$ và có hoành độ đỉnh là $\frac{3}{4}$.
- f) Đi qua điểm $N(-2;2)$ và có tung độ đỉnh là 1.

Bài 5) Tìm Parabol: $y = ax^2 + 6x + c$ ($a \neq 0$) biết rằng Parabol đó:

- a) Đi qua hai điểm $A(1,-2)$ $B(-3,-10)$.
- b) Cắt trục hoành tại $x_1 = -2$ và $x_2 = -4$.
- c) Đi qua điểm $C(2,5)$ và có trục đối xứng $x = 1$.
- d) Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và có tung độ đỉnh bằng -1 .

Bài 6) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

- a) $y = x^2 - 5x + 7$ trên $[-2,5]$.
- b) $y = -2x^2 + x - 3$ trên $[1,3]$.

Bài 7) Cho $(P): y = x^2 - 3x + 2$, đường thẳng $(d): y = mx + 2$.

- a) Vẽ đồ thị (P) .
- b) Định m để hai đồ thị trên tiếp xúc nhau.
- c) Biện luận theo m số nghiệm phương trình: $x^2 - 3x + 3 - 2m = 0$

Bài 8) Cho $(P): y = x^2 - x + 2$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M(1;-1)$ và có hệ số góc bằng $-\frac{1}{2}$. Tìm tọa độ giao điểm của (d) và (P) .

Bài 9) Cho $(P): y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.

- a) Vẽ đồ thị (P) .
- b) Tìm m để phương trình $x^2 - 2x + 4 + 3m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt bằng 2 cách.
- c) Lập phương trình đường thẳng (d) qua $B(2;0)$ và cắt (P) theo một dây cung nhận B làm trung điểm.