

§5. PHÉP QUAY

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

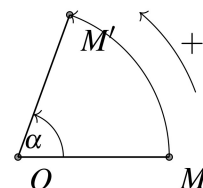
1. ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác α không đổi. Phép biến hình biến:

- Biến điểm O thành chính nó.
- Biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM') = \alpha$.

Phép biến hình trên gọi là phép quay tâm O , góc quay α . Kí hiệu $Q_{(O;\alpha)}$.

$$Q_{(O;\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (OM; OM') = \alpha. \end{cases}$$



Điểm M' gọi là ảnh của M qua phép quay.

Nhận xét. Từ định nghĩa ta có

- Chiều dương của phép quay ngược chiều với chiều quay của kim đồng hồ. Chiều quay ngược lại là chiều âm.
- $Q_{(O;k2\pi)}(M) = M$ (với $k \in \mathbb{Z}$) là phép đồng nhất.
- $Q_{(O;(2k+1)\pi)}(M) = M'$, (với $k \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow M'$ đối xứng với M qua O .

2. TÍNH CHẤT

Phép quay biến

- Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó (ta còn gọi phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì).
- Đường thẳng thành đường thẳng.
- Tam giác thành tam giác bằng nó.
- Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.
- Góc thành góc bằng nó.

3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(x; y)$ và $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép quay tâm O góc quay α .

- Quay tâm $O(0; 0)$ góc quay 90° ta có biểu thức tọa độ

$$Q_{(O;90^\circ)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x. \end{cases}$$

- Quay tâm $O(0; 0)$ góc quay -90° ta có biểu thức tọa độ

$$Q_{(O;-90^\circ)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x. \end{cases}$$

c) Quay tâm $O(0;0)$ góc quay 180° ta có biểu thức tọa độ

$$Q_{(O;180^\circ)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$$

d) Quay tâm $O(0;0)$ góc quay α ta có biểu thức tọa độ

$$Q_{(O;\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Dựa vào định nghĩa và tính chất của phép quay

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-2;5)$. Tìm ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc 90° .

 Lời giải.

Bài tập 2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $A(-2;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm O góc quay 90° .

 Lời giải.

Bài tập 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép quay $Q\left(O; \frac{\pi}{2}\right)$.

 Lời giải.

Bài tập 4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $A(3;4)$. Tìm ảnh của điểm A qua phép quay tâm O góc quay 90°

 Lời giải.

Bài tập 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(1;2)$. Gọi $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$ là hai điểm trên trục hoành sao cho phép quay tâm A , góc quay 90° biến điểm B thành C . Tính $x_B + x_C$.

 Lời giải.

.....

.....

.....

Bài tập 6. Tìm ảnh của điểm $A(-1;2)$ qua phép quay tâm O , góc quay π .

 Lời giải.

.....

.....

.....

Bài tập 7. Trong mặt phẳng Oxy , phép quay tâm O góc -90° biến điểm $M(2;1)$ thành điểm N . Tìm tọa độ của điểm N .

 Lời giải.

.....

.....

.....

Bài tập 8. Trong hệ tọa độ Oxy , phép quay tâm O , góc quay -90° biến điểm $A(2;0)$ thành điểm nào?

 Lời giải.

.....

.....

.....

Bài tập 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm ảnh của đường thẳng $d: 2x - 3y + 4 = 0$ qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc 90° .

 Lời giải.

.....

.....

.....

Bài tập 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x + y = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép quay $Q_{(O, -90^\circ)}$.

 Lời giải.

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phép quay tâm O góc quay α biến điểm M thành điểm M' . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $(OM; OM') = \alpha$.

B. $OM = OM'$ và $(OM; OM') = \alpha$.

C. $OM = OM'$ và $\widehat{MOM'} = \alpha$.

D. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$ và $\widehat{MOM'} = \alpha$.

 **Lời giải.**

B

Câu 2. Phép quay tâm O góc quay α biến điểm M thành điểm M' . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$.

B. $OM = OM'$.

C. $\widehat{MOM'} = \alpha$.

D. Tam giác OMM' cân tại M .

 **Lời giải.**

B

Câu 3. Phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay 90° biến điểm $M(-5;2)$ thành điểm M' có tọa độ:

A. $(2; -5)$.

B. $(5; -2)$.

C. $(-2; -5)$.

D. $(5; -2)$.

 **Lời giải.**

C

Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $A(-2;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm O góc quay 90° .

A. $A'(0; -2)$.

B. $A'(0; 2)$.

C. $A'(2; 2)$.

D. $A'(2; 0)$.

 **Lời giải.**

A

Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x + 2y - 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O góc 90° .

A. $2x - y + 6 = 0$.

B. $2x + y + 6 = 0$.

C. $2x + y - 6 = 0$.

D. $2x - y - 6 = 0$.

 **Lời giải.**

A

§6. PHÉP DỜI HÌNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Nội dung 1

2. Nội dung 2

3. Nội dung 3

Dạng 1. Dạng toán 1

Tóm tắt nội dung cách giải dạng 1

 **Ví dụ 1.** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(3;0)$, $I(2;1)$. Tìm tọa độ ảnh A' của điểm A qua phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép quay $Q\left(O; \frac{\pi}{2}\right)$ và phép quay $Q\left(I; \frac{\pi}{4}\right)$.

 **Lời giải.**

$Q\left(O; \frac{\pi}{2}\right): A(x;y) \mapsto M(x';y')$. Nên $\begin{cases} x' = -y = 0 \\ y' = x = 3 \end{cases}$. Vậy $M(0;3)$.

Gọi $A'(x_1;y_1)$ là ảnh của M qua $Q\left(I; \frac{\pi}{4}\right)$. Ta có

$$\begin{cases} x_1 = 2 + (0-2)\cos\frac{\pi}{4} - (3-1)\sin\frac{\pi}{4} \\ y_1 = 1 + (0-2)\sin\frac{\pi}{4} + (3-1)\cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2\sqrt{2} \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'(2 - 2\sqrt{2}; 1).$$

□

 **Ví dụ 2.** Cho đường thẳng $d: 2x + y = 0$ và $\vec{v} = (3; -1)$. Tìm ảnh của d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O; 90^\circ)}$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

 **Lời giải.**

Đặt $F = T_{\vec{v}} \circ Q_{(O; 90^\circ)}$ là phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O; 90^\circ)}$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Gọi $d' = F(d)$ thì $d' \perp d \Rightarrow d': x - 2y + c = 0$.

Lấy $O(0;0) \in d \Rightarrow F(O) = T_{\vec{v}} \circ Q_{(O; 90^\circ)}(O) = T_{\vec{v}}(O) = O'(3; -1)$; $O' \in d' \Rightarrow c = -5$.

Vậy $F(d) = d': x - 2y - 5 = 0$.

□

 **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng (Oxy) cho đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3; 1)$ và phép quay tâm O góc quay 90° .

 **Lời giải.**

$$\forall I(C): \begin{cases} I = (-1; 2) \\ R = 3 \end{cases} \xrightarrow{T_{\vec{v}}} (C_1): \begin{cases} I_1 = (2; 3) \\ R_1 = R = 3 \end{cases} \xrightarrow{Q_{(O; 90^\circ)}} (C'): \begin{cases} I' = (-3; 2) \\ R' = R_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow (C'): (x+3)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

□

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng (Oxy), tìm tạo ảnh của đường tròn (C'): $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ qua phép dời hình $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 3. \end{cases}$

Lời giải.

Theo định nghĩa ta có biểu thức tọa độ của phép dời hình là $\begin{cases} x' = x + a = x + 1 \\ y' = y + b = y + 3. \end{cases}$

Thay vào phương trình đường tròn (C'): $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$. Ta có

$$\Leftrightarrow (x+1-3)^2 + (y+3-4)^2 = 16 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 16.$$

Vậy tạo ảnh của đường tròn đã cho qua phép dời hình là đường tròn có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$. $\square$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(-2;0)$, gọi N là ảnh của M qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc 180° và phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (-3;4)$. Tìm tọa độ điểm N .

Lời giải.

Bài tập 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(1;1)$. Tìm ảnh của M qua phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép quay tâm O , góc 45° và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Lời giải.

Bài tập 3. Tìm ảnh của đường thẳng $d: 5x - 3y + 15 = 0$ qua phép dời hình có được khi thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$ và qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;2)$

Lời giải.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho phép dời hình F có quy tắc đặt ảnh tương ứng điểm $M(x_M; y_M)$ có ảnh là điểm $M'(x'; y')$ theo công thức $F: \begin{cases} x' = x_M + 1 \\ y' = y_M + 3 \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm P có ảnh là điểm $Q(3;2)$

qua phép biến hình F .

A. $P(4;5)$.

B. $P(1;0)$.

C. $P(1;1)$.

D. $P(2;-1)$.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: 2x + y - 3 = 0$. Phép dời hình $F: \begin{cases} x' = x_M + 2 \\ y' = y_M + 3 \end{cases}$

biến d thành đường thẳng d' có phương trình là

A. $2x + y - 10 = 0$.

B. $2x + y + 10 = 0$.

C. $2x + y + 4 = 0$.

D. $2x + y - 4 = 0$.

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....