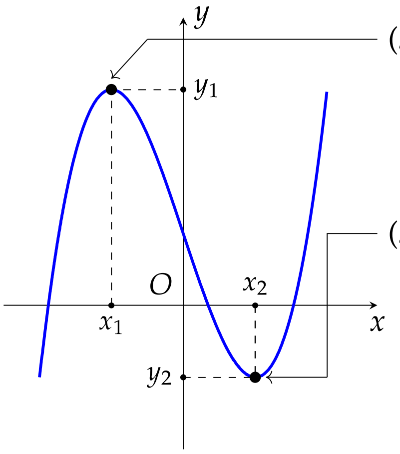
§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

a) Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ hoặc x_0 là điểm mà tại đó đạo hàm không xác định (chỉ có một chiều nhé, đừng suy ngược lại).

b) Bảng tổng kết tên gọi:



$(x_1; y_1)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số
- x_1 là điểm cực đại của hàm số
- y_1 là giá trị cực đại của hàm số

$(x_2; y_2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số
- x_2 là điểm cực tiểu của hàm số
- y_2 là giá trị cực tiểu của hàm số

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 1) để tìm cực trị cực hàm số

a) Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i và những điểm x_j mà đạo hàm không xác định;

b) Đưa các nghiệm x_i và x_j lên bảng xét dấu và xét dấu y';

c) Lập bảng biến thiên và nhìn "điểm dừng":

- "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1; y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1; y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**.
- "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2; y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2; y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**.

Ví dụ 1. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ là

A. $\left(\frac{2}{3}; \frac{50}{27}\right)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $\left(\frac{50}{27}; \frac{2}{3}\right)$. **D.** $(2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{50}{27}. \end{array}\right.$

Có $y'' = 6x - 2 \Rightarrow y''(0) = -2, y''\left(\frac{2}{3}\right) = 2$. Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $\left(\frac{2}{3}; \frac{50}{27}\right)$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 2. Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$ đạt cực đại tại

A. $x = 0$. **B.** $x = -\sqrt{3}$. **C.** $x = \sqrt{3}$. **D.** $x = \pm\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 2x^3 - 6x$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{15}{2}$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\frac{15}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án A $\square$

Ví dụ 3. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 1$ là

A. $(-1;-1)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;-1)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(0;-1)$.

Chọn đáp án B $\square$

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1, y_{CĐ} = 10$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3, y_{CT} = -22$. □

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2+4}{x}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có: $y = x + \dfrac{4}{x} \Rightarrow y' = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2}$.

Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \Rightarrow y = -4 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2, y_{CĐ} = -4$.
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = 4$.

□

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$. Gọi $M(x_1; y_1)$ là điểm cực tiểu của đồ thị của hàm số đã cho. Tính tổng $x_1 + y_1$.

A. 5. **B.** -11. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải.

Ta có $y' = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra tọa độ điểm cực tiểu là $M(-1;-10)$.
Vậy $x_1 + y_1 = -11$.
Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 7. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

A. $y = -2x - 1$. **B.** $y = -2x + 1$. **C.** $y = 2x - 1$. **D.** $y = 2x + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$, do đó hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $A(0;1)$ và $B(2;-3)$.

Đường thẳng đi qua hai điểm A, B có phương trình $y = -2x + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Dạng 2. Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị

☑ **Loại 1:** Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm $y = f(x)$. Ta nhìn "điểm dừng":

① "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1; y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1; y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**

② "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2; y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2; y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**

☑ Loại 2: Cho đồ thị hàm $f'(x)$. Ta thực hiện tương tự như ở phần đồng biến, nghịch biến.

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Cực tiểu (*giá trị cực tiểu*)của hàm số là

A. 4. **B.** 2.
C. -1. **D.** 3.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. Giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 3$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$.
B. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1.
C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 2.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	2 || $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có $x = -2$ và $x = 1$ lần lượt là điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^{2017}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.
B. Hàm số có 3 điểm cực trị.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $x = 3$.

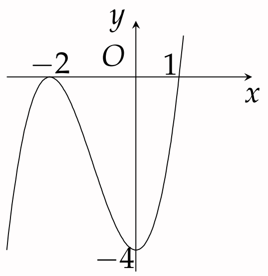
Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

ta thấy hàm số nghịch biến trên $(1;3)$.
Chọn đáp án C □

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $f'(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng về cực trị của hàm số $f(x)$?



A. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.
B. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
C. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
D. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.

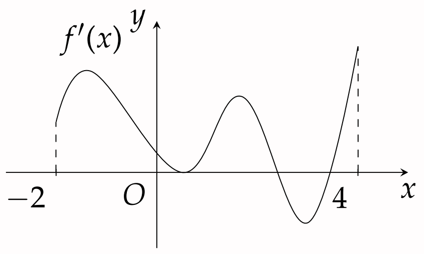
Lời giải.

Từ đồ thị của đạo hàm $f'(x)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Vậy hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
Chọn đáp án B □

Tìm số điểm cực tiểu trên đoạn $[-2;4]$ của hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



A. 1. **B.** 0.
C. 2. **D.** 3.

Lời giải.

Đồ thị ta thấy $f'(x) = 0$ tại ba điểm theo thứ tự x_1, x_2, x_3. Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		x_1		x_2		x_3		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ có một cực tiểu.

Chọn đáp án A □

Dạng 3. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 2) để tìm cực trị cực hàm số

Chỉ dùng khi hàm số có đạo hàm cấp 2 tại x_0. Ta thực hiện các bước:

a) Tính y'. Giải phương trình $y' = 0$, tìm nghiệm x_0.

b) Tính y''.

- Nếu $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
- Nếu $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

Ghi nhớ: "âm" lồi, "dương" lõm

Ví dụ 13. Hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ

A. $x = \pm\sqrt{2}$. **B.** $x = \pm 1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = \pm 2$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^4 - 4x^2 + 1 = 4x(x^2 - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ $x = \pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 14. Tìm các điểm cực tiểu của hàm số $y = \sin 2x - x$.

A. $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$. **B.** $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$. **C.** $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$. **D.** $x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

Lời giải.

Chọn đáp án B □

Dạng 4. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước

a) Giải điều kiện $y'(x_0) = 0$, tìm m.

b) Thử lại với m vừa tìm được bằng một trong hai cách sau:

- Cách 1: Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được. Xem giá trị m nào thỏa yêu cầu.
- Cách 2. Tính y''. Thử $y''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CĐ; $y''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CT.

Ví dụ 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 1$. **B.** $m = 3$.
C. $m = 1$ hoặc $m = 3$. **D.** $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4mx + m^2$, $y'' = 6x - 4m$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m^2 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right. \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án A □

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ với m là tham số. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$?

A. $m = -3$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 0$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.
Ta có $y' = \dfrac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4 + 4m + m^2 - 1}{(2 + m)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = -3. \end{array}\right.$

Ta có $y'' = \dfrac{2}{(x + m)^3}$.

- Với $m = -1$, ta có $y''(2) = 2 > 0 \Rightarrow x = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- Với $m = -3$, ta có $y''(2) = -2 < 0 \Rightarrow x = 2$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy với $m = -3$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
Chọn đáp án A □

Dạng 5. Biện luận cực trị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) Biện luận nghiệm phương trình $y' = 0$ (phương trình bậc hai).

- $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$: Hàm số có hai điểm cực trị
- $\Delta \leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$: Hàm số không có cực trị.

b) Định lý Vi-et: $x_1 + x_2 = -\dfrac{2b}{3a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{3a}$ (nhìn trực tiếp từ hàm số).

- $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$;
- $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$
- $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$.

c) Các công thức tính toán thường gặp

.
- Độ dài $MN=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}$
- Khoảng cách từ M đến Δ: $d(M,\Delta)=\dfrac{|Ax_M+By_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, với $\Delta\colon\ Ax+By+C=0$.
- Tam giác ABC vuông tại $A\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
- Diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$, với $\overrightarrow{AB}=(a_1;b_1)$, $\overrightarrow{AC}=(a_2;b_2)$.

d) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y=-\dfrac{2}{9a}(b^2-3ac)x+d-\dfrac{bc}{9a}$.

Ví dụ 17. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+5mx-1$ không có cực trị?

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải.

Ta có $y'=x^2-2mx+5m$, hàm số không có cực trị khi $\Delta'\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 5$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 18. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y=x^3-3x^2+(m+1)x+2$ có hai điểm cực trị.

A. $m<2$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m>2$. **D.** $m<-4$.

Lời giải.

$y'=3x^2-6x+m+1$, $\Delta'=6-3m$. Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt tức là $\Delta>0\Leftrightarrow m<2$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 19. Cho $y=(m-3)x^3+2(m^2-m-1)x^2+(m+4)x-1$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung. Tìm số phần tử của S.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải.

$y'=3(m-3)x^2+4(m^2-m-1)x+m+4$. Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow(m-3)(m+4)<0\Leftrightarrow -4<m<3$

Chọn đáp án C □

Ví dụ 20. Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+9x-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\le 2$. Biết $S=(a;b]$. Tính $T=b-a$.

A. $T=2+\sqrt{3}$. **B.** $T=1+\sqrt{3}$. **C.** $T=2-\sqrt{3}$. **D.** $T=3-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^3-3mx^2+9x-m$ xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có $y'=3(x^2-2mx+3)$.

Điều kiện hàm số có cực trị: $m^2-3>0$. Lúc này theo Viet: $\begin{cases}x_1+x_2=2m\\ x_1x_2=3\end{cases}$.

Theo giả thiết $|x_1-x_2|=\le 2\Leftrightarrow(x_1-x_2)^2\le 4\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 4$.

Mà m dương nên $3 < m^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < m \leq 2$.
Vậy $a = \sqrt{3}, b = 2 \Rightarrow b - a = 2 - \sqrt{3}$.
Chọn đáp án C □

Ví dụ 21. Cho hàm số $y = -x^3 - 3mx^2 + m - 2$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = 2$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 - 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2m. \end{array}\right.$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.
Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là A, B.
Ta có $A(0; m-2)$, $B\left(-2m; -4m^3 + m - 2\right)$.
Do đó

$$\begin{aligned} AB^2 = 4m^2 + 16m^6 = 4 &\Leftrightarrow 4m^6 + m^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Suy ra tổng bằng 0.
Chọn đáp án C □

Ví dụ 22. Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O.

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

Dạng 6. Biện luận cực trị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

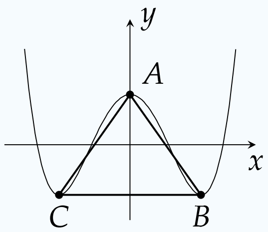
a) Tính $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $2ax^2 + b = 0$ (1).

b) Nhận xét:

- Hàm số có ba điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm khác 0. Suy ra $\boxed{ab < 0}$
- Hàm số có đúng một điểm cực trị $\boxed{ab \geq 0}$ và a, b không đồng thời bằng 0.

c) Các công thức tính nhanh:

- $\cos A = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$
- $S^2_{ABC} = -\dfrac{b^5}{32a^3}$.



Ví dụ 23. Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

A. $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$. **B.** $m \in (-1; 0)$.
C. $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải.

$y' = 4(m+1)x^3 - 2mx = 2x[2(m+1)x^2 - m]$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2(m+1)x^2 - m = 0\ (*) \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow \dfrac{m}{m+1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0. \end{array}\right.$

Chọn đáp án D $\square$

Ví dụ 24. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-2)x^4 + (m^2-4)x^2 + 2m - 3$ có đúng 1 điểm cực trị.

A. $m \in [-2; 2)$. **B.** $m \in [-2; +\infty) \setminus \{2\}$.
C. $m \in [-2; 2]$. **D.** $m \in [-2; +\infty)$.

Ví dụ 25. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1 - m$ là ba đỉnh của một tam giác vuông.

A. $m = \dfrac{2}{3}$. **B.** $m = \dfrac{1}{3}$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = \sqrt[3]{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4(3m-2)x$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - 3m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{2}{3}$.

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; 10m)$, $B\left(\sqrt{2-3m}; -(2-3m)^2 + 1 - m\right)$
và $C\left(-\sqrt{2-3m}; -(2-3m)^2 + 1 - m\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-3m}; -(2-3m)^2\right)$ và $\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-3m}; -(2-3m)^2\right)$

Nhận xét: $\triangle ABC$ luôn cân tại A.

Do đó, ABC tạo thành tam giác vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(2-3m) + (2-3m)^4 = 0$

$\Leftrightarrow (2-3m)^3 = 1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án B $\square$

Ví dụ 26. Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m_0 \in (-1; 1]$. **B.** $m_0 \in (-2; -1]$. **C.** $m_0 \in (-\infty; -2]$. **D.** $m_0 \in (-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; -1)$, $B\left(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$, $B\left(\sqrt{-m}; -m^2 - 1\right)$.

Gọi H là trung điểm của BC, ta có $H(0; -m^2 - 1)$.

Ta có $BC = \sqrt{\left(2\sqrt{-m}\right)^2} = 2\sqrt{-m}$, $AH = \sqrt{\left(-m^2\right)^2} = m^2$.

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot AH = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{-m} \cdot m^2 = \sqrt{-m} \cdot m^2$.

Theo giả thiết, ta có $S_{ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{-m} \cdot m^2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow m = -2$.

Chọn đáp án C $\square$