

CHƯƠNG IV. BẤT ĐẲNG THỨC- BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC

1. Khái niệm

- Mệnh đề dạng " $a < b$ " (hoặc " $a > b$ " hoặc " $a \leq b$ " hoặc " $a \geq b$ ") được gọi là **bất đẳng thức**.
- Nếu mệnh đề " $a < b \Rightarrow c < d$ " đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là **bất đẳng thức hệ quả** của bất đẳng thức $a < b$ và cũng viết là $a < b \Rightarrow c < d$.
- Nếu mệnh đề " $a < b \Leftrightarrow c < d$ " đúng thì ta nói hai bất đẳng thức $a < b$ và $c < d$ là hai **bất đẳng thức tương đương** với nhau và cũng viết là $a < b \Leftrightarrow c < d$.

2. Tính chất của bất đẳng thức

Điều kiện	Tính chất	Tên gọi
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$	Nhân hai vế bất đẳng thức với một số dương
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$	Nhân hai vế bất đẳng thức với một số âm
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$	Bình phương hai vế bất đẳng thức
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn bậc hai hai vế bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$	Lập phương hai vế bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	Khai căn bậc ba hai vế bất đẳng thức
	$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều

3. Bất đẳng thức Cô-si

➤ Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng.

$$\bullet \quad \boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \quad \forall a \geq 0, b \geq 0} \quad (\text{BĐT Cô-si cho 2 số})$$

$$\bullet \quad \boxed{\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}, \quad \forall a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0} \quad (\text{BĐT Cô-si cho 3 số})$$

➤ Nếu hai số x, y cùng dương và có tổng không đổi thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Do đó: “Hình vuông có diện tích lớn nhất trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi”.

➤ Nếu hai số x, y cùng dương và có tích không đổi thì tổng $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Do đó: “Hình vuông có chu vi nhỏ nhất trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích”.

4. Tính chất bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Điều kiện	Tính chất
	$ a \geq 0$
	$ a \geq a$
	$ a \geq -a$
$b > 0$	$ a \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
$b > 0$	$ a \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -b \\ a \geq b \end{cases}$
	$ a - b \leq a + b $
	$ a + b \leq a + b $

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 \geq 2ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Cách 1: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ta có

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

Vậy bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ đúng với mọi số thực a, b . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm a^2 và b^2 , ta có

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq |ab| \quad (1) \quad (\text{Vì } \sqrt{(ab)^2} = |ab|)$$

Theo tính chất giá trị tuyệt đối ta có

$$|ab| \geq ab \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Vậy bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$ đúng với mọi số thực a, b . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $a^2 + ab + b^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$

Lời giải

Với mọi số thực a, b ta có

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0 \quad (*)$$

Vì $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0$ và $\frac{3b^2}{4} \geq 0$ nên $(*)$ đúng.

Vậy $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ đúng với mọi số thực a, b . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng: $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4, \forall a > 0, b > 0$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương a và b , ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$, ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\frac{1}{\sqrt{ab}} \quad (2)$$

Nhân tương ứng hai vế (1) và (2) ta được

$$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

Vậy $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ đúng với mọi số thực dương a, b . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 4. Cho a là số thực lớn hơn 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 25a - 3 + \frac{4}{a - 3}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $25(a - 3)$ và $\frac{4}{a - 3}$, ta có

$$P = 25(a - 3) + \frac{4}{a - 3} + 72 \geq 2 \cdot \sqrt{25(a - 3) \cdot \frac{4}{a - 3}} + 72 = 92.$$

$$P = 92 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} a > 3 \\ 25(a-3) = \frac{4}{a-3} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{17}{5}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 92 khi $a = \frac{17}{5}$.

C. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Câu 1. Chứng minh rằng: $(x+2y)^2 \geq 8xy, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 2. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}, \forall a > 0, b > 0$.

Câu 3. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 1 \geq a + b + ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Câu 4. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \geq 6, \forall a > 0, b > 0, c > 0$.