

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có:
$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

2. Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Nhận xét. Hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác vectơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

4. Ứng dụng

a) Độ dài của vectơ

Độ dài của vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được tính theo công thức: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

b) Góc giữa hai vectơ

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng toán 1: Tích vô hướng của hai vector

Phương pháp:

- Áp dụng công thức của định nghĩa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$
- Xác định đúng góc giữa hai vector
- Dùng tính chất phân phối: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có số đo góc B bằng 30° . Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{BA}$ và $\vec{BC}$.

Giải:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{BA}, \vec{BC})$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 2a \cdot 4a \cdot \cos 30^\circ$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 4a^2 \sqrt{3}$$

Ví dụ 2: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng $4a$. Tính tích vô hướng của hai vector:

a/ $\vec{BA}$ và $\vec{AC}$.

b/ $\vec{DB}$ và $\vec{CA}$.

Giải:

a/ Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{BA}$ và $\vec{AC}$:

$$\vec{BA} \cdot \vec{AC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{BA}, \vec{AC})$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{AC} = 4a \cdot 4a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{AC} = -16a^2$$

b/ Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{DB}$ và $\vec{CA}$.

$$\vec{DB} \cdot \vec{CA} = |\vec{DB}| \cdot |\vec{CA}| \cdot \cos(\vec{DB}, \vec{CA})$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{CA} = 4a\sqrt{2} \cdot 4a\sqrt{2} \cdot \cos 90^\circ$$

$$\vec{DB} \cdot \vec{CA} = 0a^2 = 0$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $5a$. M là trung điểm AB. Tính tích vô hướng của các cặp vector sau:

a/ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b/ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{MB}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC vuông cân tại B có AC=2a. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$

Dạng toán 2: Biểu thức tọa độ tích vô hướng của hai vector và ứng dụng.

Tóm tắt kiến thức:

- Cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.
- Cho vector $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Ta có: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
- Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta có: $|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Tính góc giữa hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

Chú ý cách tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

- ◆ Cho tam giác ABC với ba đỉnh có tọa độ xác định $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$
- Trung điểm I của đoạn AB, tọa độ điểm $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$
- Trọng tâm G, tọa độ điểm $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$
- Trực tâm H, có điều kiện là $\begin{cases} \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$
- Tâm đường tròn ngoại tiếp I tam giác, có điều kiện là $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} AE^2 = BE^2 \\ AE^2 = CE^2 \end{cases}$

Ví dụ 1: Cho vector $\vec{a} = (3; 4)$; $\vec{b} = (7; 9)$ và $\vec{c} = (-4; 1)$.

a/ Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b/ Tính độ dài của vector $\vec{a}$.

c/ Tính cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

Giải:

$$a/ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 57$$

$$b/ |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$c/ \cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{3 \cdot (-4) + 4 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{-8\sqrt{17}}{85}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có $A(4; -5); B(0; 8); C(2; -12)$.

a/ Tính khoảng cách từ A đến C.

b/ Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Giải:

$$a/ AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-12 + 5)^2} = \sqrt{53}$$

b/ Gọi $H(x; y)$. Do H là trực tâm tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} \vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{HB} \cdot \vec{CA} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4 - x; -4 - y) \cdot (2 - 0; -12 - 8) = 0 \\ (0 - x; 8 - y) \cdot (4 - 2; -5 + 12) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4 - x; -4 - y) \cdot (2; -20) = 0 \\ (-x; 8 - y) \cdot (2; 7) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (4 - x) + (-20) \cdot (-4 - y) = 0 \\ 2 \cdot (-x) + 7 \cdot (8 - y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 20y = -88 \\ 2x + 7y = 56 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{868}{27} \\ y = -\frac{32}{27} \end{cases} \quad \text{Vậy } H\left(\frac{868}{27}; -\frac{32}{27}\right)$$

Bài tập tương tự:

Bài 1: Cho vector $\vec{m} = (-2; 5)$; $\vec{n} = (2; 0)$ và $\vec{u} = (-3; 3)$.

a/ Tính tích vô hướng của hai vector $\vec{m}$ và $\vec{n}$.

b/ Tính độ dài của vector $\vec{u}$.

c/ Tính số đo của góc giữa hai vector $\vec{u}$ và $\vec{n}$

Bài 2: Cho tam giác BCD có $B(7; 0); C(5; -2); D(2; -1)$.

a/ Tính độ dài các cạnh BC, CD và DB.

b/ Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác OBC.

c/ Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Bài 3: Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(2; 4); B(1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B

Bài tập trắc nghiệm :

Câu 1: Cho hai vector $\vec{a}$; $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 4$. Khi đó tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng:

- A. 12 B. 7 C. -12 D. -7

Câu 2: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a. Khi đó tích vô hướng của $\vec{AB}$ và $\vec{BC}$ bằng:

- A. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = a^2$ B. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ C. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 3: Cho vector $\vec{a} = (0; -4)$; $\vec{b} = (1; 2)$. Khi đó cosin của góc giữa 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng:

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$