

CHƯƠNG 2

HÀM SỐ LŨY THỪA - HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

§1. LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Lũy thừa với số mũ nguyên dương

Cho n là số nguyên dương và a là số thực. Lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a .

$$a^n = a \cdot a \cdots a \quad (n \text{ thừa số } a).$$

Lưu ý: $a^1 = a$.

2. Lũy thừa với số mũ 0

Cho n là số nguyên dương và a là số thực khác 0. Lũy thừa của a với số mũ 0 là 1.

$$a^0 = 1.$$

Lưu ý: 0^0 vô nghĩa.

3. Lũy thừa với số mũ nguyên âm

Cho n là số nguyên dương và a là số thực khác 0. Lũy thừa của a với số mũ $-n$ là nghịch đảo của a^n .

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Lưu ý: 0^{-n} vô nghĩa.

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$ và a là số thực dương, với m là số nguyên và n là số nguyên dương.

Lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

5. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Cho a là số vô tỉ, a là số thực dương và r_n là dãy số hữu tỉ thỏa mãn $\lim r_n = a$. Lũy thừa của a với số mũ a là số a^a xác định bởi

$$a^a = \lim a^{r_n}$$

6. Tính chất của lũy thừa với số mũ thực

+) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

+) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

+) $(a^x)^y = a^{xy}$

+) $(ab)^x = a^x b^x$

+) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

+) Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$

+) Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Dạng 1. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn các biểu thức chứa lũy thừa

 **Ví dụ 1.** Cho a là số thực dương và $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P = a^{\frac{5}{6}}$.

B. $P = a^{\frac{11}{6}}$.

C. $P = a^{\frac{10}{3}}$.

D. $P = a^{\frac{7}{3}}$.

Lời giải.

Ta có: $P = a^{\frac{4}{3}} \sqrt{a} = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{11}{6}}$.

 Đáp án đúng **(B)**

□

 **Ví dụ 2.** Cho $x, y > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}$.

B. $x^\alpha + y^\alpha = (x + y)^\alpha$.

C. $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha + \beta}$.

D. $(x \cdot y)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$.

Lời giải.

Theo tính chất của lũy thừa thì đẳng thức $x^\alpha + y^\alpha = (x + y)^\alpha$ sai.

 Đáp án đúng **(B)**

□

 **Ví dụ 3.** Cho biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{7}+1} a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$. Rút gọn biểu thức P được kết quả

A. $P = a^3$.

B. $P = a^5$.

C. $P = a$.

D. $P = a^4$.

Lời giải.

Ta có $P = \frac{a^{\sqrt{7}+1} \cdot a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^{\sqrt{7}+1+2-\sqrt{7}}}{a^{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)}} = \frac{a^3}{a^{-2}} = a^5.$

🔍 Đáp án đúng **B**



Ví dụ 4. Cho biểu thức $P = \sqrt[5]{x^3 \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}}}$ với $x > 0$. Biểu thức P được viết dưới dạng lũy thừa của x với số mũ hữu tỉ là

- A. $P = x^{\frac{23}{30}}.$ B. $P = x^{\frac{37}{15}}.$ C. $P = x^{\frac{53}{30}}.$ D. $P = x^{\frac{31}{10}}.$

Lời giải.

$$P = \sqrt[5]{x^3 \sqrt[3]{x^{\frac{5}{2}}}} = \sqrt[5]{x^3 \cdot x^{\frac{5}{6}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{23}{6}}} = x^{\frac{23}{30}}.$$

🔍 Đáp án đúng **A**



Dạng 2. Tính giá trị của biểu thức chứa lũy thừa

Ví dụ 5. Biết rằng $3^x = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = 3^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} + 9^{x+1}.$

- A. $A = \frac{81}{2}.$ B. $A = 37.$ C. $A = \frac{45}{2}.$ D. $A = 25.$

Lời giải.

$$A = 3^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} + 9^{x+1} = 1 + 9 \cdot (3^x)^2 = 1 + 9 \cdot 4 = 37.$$

🔍 Đáp án đúng **B**



Ví dụ 6. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{(4+2\sqrt{3})^{2018} \cdot (1-\sqrt{3})^{2017}}{(1+\sqrt{3})^{2019}}.$

- A. $-2^{2017}.$ B. $-1.$ C. $-2^{2019}.$ D. $2^{2018}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} P &= \frac{(4+2\sqrt{3})^{2018} \cdot (1-\sqrt{3})^{2017}}{(1+\sqrt{3})^{2019}} \\ &= \frac{(1+\sqrt{3})^{4036} \cdot (1-\sqrt{3})^{2017}}{(1+\sqrt{3})^{2019}} \\ &= (1+\sqrt{3})^{2017} \cdot (1-\sqrt{3})^{2017} \\ &= \left[(1+\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{3})\right]^{2017} \\ &= (-2)^{2017} = -2^{2017}. \end{aligned}$$

🔍 Đáp án đúng **A**



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Với a là số thực dương tùy ý, biểu thức $a \sqrt[3]{a^2}$ bằng

- A. a^7 . B. $a^{\frac{5}{3}}$. C. $a^{\frac{3}{5}}$. D. $a^{\frac{1}{7}}$.

Câu 2. Xét a, b là các số thực thỏa mãn $ab > 0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\sqrt[5]{ab} = (ab)^{\frac{1}{5}}$. B. $\sqrt[8]{(ab)^8} = ab$. C. $\sqrt[6]{ab} = \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b}$. D. $\sqrt[3]{\sqrt{ab}} = \sqrt[6]{ab}$.

Câu 3. Viết biểu thức $A = \sqrt[3]{2^5 \sqrt{2} \sqrt{2}}$ dưới dạng lũy thừa của số mũ hữu tỉ ta được

- A. $A = 2^{\frac{2}{3}}$. B. $A = 2^{\frac{13}{30}}$. C. $A = 2^{\frac{91}{30}}$. D. $A = 2^{\frac{1}{30}}$.

Câu 4. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $(5^x)^y = (5^y)^x$. B. $4^{\frac{x}{y}} = \frac{4^x}{4^y}$. C. $(2 \cdot 7)^x = 2^x \cdot 7^x$. D. $3^x \cdot 3^y = 3^{x+y}$.

Câu 5. Cho $a > 0; b > 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$. B. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = a^\alpha - b^\alpha$. C. $(ab)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$. D. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

Câu 6. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

- A. $P = 24$. B. $P = 16$. C. $P = 12$. D. $P = 18$.

Câu 7. Tính giá trị của biểu thức $P = 4^4 \cdot 8^{11} \cdot 2^{2017}$.

- A. $P = 2^{2058}$. B. $P = 2^{2407}$. C. $P = 2^{2032}$. D. $P = 2^{2054}$.

Câu 8. Tính $P = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$.

- A. $P = 2$. B. $P = \frac{31}{48}$. C. $P = \frac{2}{21}$. D. $P = -\frac{141}{112}$.

Câu 9. Tính $P = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$.

- A. $P = 2$. B. $P = \frac{31}{48}$. C. $P = \frac{2}{21}$. D. $P = -\frac{141}{112}$.

Câu 10. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào vô nghĩa?

- A. $\left(-\frac{3}{4}\right)^0$. B. $(-4)^{-\frac{1}{3}}$. C. $(-3)^{-4}$. D. $1^{-\sqrt{2}}$.

Câu 11. Cho số thực a dương. Rút gọn biểu thức $P = a^{\frac{1}{4}} \sqrt{a}$ ta được biểu thức nào sau đây?

- A. $a^{\frac{9}{4}}$. B. $a^{\frac{1}{2}}$. C. $a^{\frac{3}{4}}$. D. $a^{\frac{1}{8}}$.

Câu 12. Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$.

- A. $P = ab^2$. B. $P = a^2 b$. C. $P = ab$. D. $P = a^2 b^2$.

Câu 13. Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt[3]{a^2}$ bằng

- A. a^3 . B. $a^{\frac{5}{3}}$. C. $a^{\frac{1}{3}}$. D. $a^{\frac{2}{3}}$.

Câu 14. Rút gọn biểu thức $P = a^{-2} a^{\frac{3}{4}} \sqrt{a}$, với $a > 0$.

- A. $P = a^{-\frac{7}{4}}$. B. $P = a^{-\frac{3}{4}}$. C. $P = a^{-\frac{1}{2}}$. D. $P = a^{\frac{5}{4}}$.

Câu 15. Rút gọn biểu thức $\frac{a^{\sqrt{6}+1} a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ (với $a > 0$) được kết quả là

- A. a^4 . B. a^5 . C. a^3 . D. a .

Câu 16. Cho a là số thực dương tùy ý, $\sqrt[4]{a^3}$ bằng

- A. $a^{\frac{3}{4}}$. B. $a^{-\frac{3}{4}}$. C. $a^{\frac{4}{3}}$. D. $a^{-\frac{4}{3}}$.

Câu 17. Cho a là số thực dương. Hãy viết biểu thức $P = a^2 \sqrt{a} \sqrt[3]{a}$ dưới dạng lũy thừa cơ số a với số mũ hữu tỉ.

- A. $P = a^{\frac{5}{3}}$. B. $P = a^{\frac{4}{3}}$. C. $P = a^{\frac{5}{6}}$. D. $P = a^{\frac{17}{6}}$.

Câu 18. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

- A. 1. B. $6^{-\sqrt{5}}$. C. 18. D. 9.

Câu 19. Giá trị của biểu thức $A = (a+1)^{-1} + (b+1)^{-1}$ với $a = 2 + \sqrt{3}$ và $b = 2 - \sqrt{3}$

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 20. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-2}}}$, $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m^2 - n^2 = 25$. B. $m^2 + n^2 = 43$. C. $3m^2 - 2n = 2$. D. $2m^2 + n = 15$.

Câu 21. Cho biểu thức $D = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $D = x^{\frac{1}{2}}$. B. $D = x^{\frac{13}{24}}$. C. $D = x^{\frac{1}{4}}$. D. $D = x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 22. Cho $x > 0$, $y > 0$ và $K = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}\right)^{-1}$. Xác định mệnh đề đúng.

- A. $K = 2x$. B. $K = x + 1$. C. $K = x - 1$. D. $K = x$.

Câu 23. Rút gọn biểu thức $A = (a-4) \left(\frac{a}{4-a}\right)^{\frac{1}{2}} + [a(4-a)]^{\frac{1}{2}}$, với $0 < a < 4$.

- A. $A = \sqrt{a(4-a)}$. B. $A = 1$. C. $A = 2\sqrt{a(4-a)}$. D. $A = 0$.

Câu 24. Cho $a > 0$; $b > 0$; $a \neq b$. Đơn giản biểu thức sau: $N = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{3}} - a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}}$.

- A. $N = \sqrt[3]{a}$. B. $N = \sqrt[3]{b}$. C. $N = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$. D. $N = \sqrt[3]{ab}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2}$. Khi đó tổng $f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{19}{10}\right)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{59}{6}$. B. $\frac{19}{2}$. C. $\frac{28}{3}$. D. 10.

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

2. Tập xác định

- +) Nếu số mũ α nguyên dương thì tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là $\mathbb{R}$.
- +) Nếu số mũ α nguyên âm hoặc bằng 0 thì tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- +) Nếu số mũ α không nguyên thì tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là $(0; +\infty)$.

3. Đạo hàm

Hàm số $y = x^\alpha$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

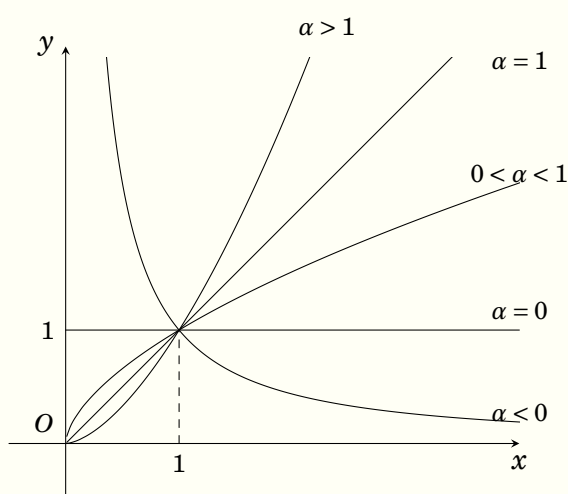
Lưu ý:

$$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$

4. Khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng $(0; +\infty)$

Trường hợp: $\alpha > 0$		Trường hợp: $\alpha < 0$	
$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0$		$y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0$	
Hàm số đồng biến trên		Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$	
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$		$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$	
Đồ thị hàm số không có tiệm cận		Tiệm cận ngang là trục Ox và tiệm cận đứng là trục Oy	
x	0 $\rightarrow$ $+\infty$	x	0 $\rightarrow$ $+\infty$
y'	+	y'	-
y	0 $\rightarrow$ $+\infty$	y	$+\infty \rightarrow$ 0

Đồ thị hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng $(0; +\infty)$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$ như hình dưới đây:



Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

B. VÍ DỤ MINH HỌA**Dạng 1. Tập xác định của hàm số chứa hàm lũy thừa****✎ Ví dụ 1.** Hàm số $y = (4 - x)^5$ có tập xác định là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. B. $\mathcal{D} = (4; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (-\infty; 4)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

🔗 Lời giải.TXĐ của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.**🔍 Đáp án đúng** **D**

□

✎ Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 + x - 2)^{-3}$.

- A. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

🔗 Lời giải.

Vì -3 là số nguyên âm nên hàm số xác định khi $x^2 + x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2. \end{cases}$

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -2\}$.**🔍 Đáp án đúng** **C**

□

✎ Ví dụ 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = (2x - 4)^0$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$.

🔗 Lời giải.Vì số mũ 0 nên điều kiện xác định của hàm số là $2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.Vậy $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.**🔍 Đáp án đúng** **C**

□

✎ Ví dụ 4. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (x + 2)^{0,1}$.

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; -2)$. B. $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (-2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

🔗 Lời giải.

Số 0,1 là số không nguyên nên điều kiện xác định của hàm số là $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Vậy $\mathcal{D} = (-2; +\infty)$.

🔍 Đáp án đúng **C**

□

✎ Ví dụ 5. Tập xác định của hàm số $y = (3x - x^2)^{-\frac{3}{2}}$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(0; 3)$.
C. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$.

🔗 Lời giải.Điều kiện: $3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.**🔍 Đáp án đúng** **B**

□

✎ Ví dụ 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{2}}$.

- A. $\mathcal{D} = (1; 2)$. B. $\mathcal{D} = [1; 2]$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

$y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

🔍 Đáp án đúng **D**

□

Dạng 2. Đạo hàm hàm số lũy thừa

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Đạo hàm của hàm số đã cho là

A. $y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} \ln \sqrt{2}$.

B. $y' = x^{\sqrt{2}}$.

C. $y' = x^{\sqrt{2}} \ln \sqrt{2}$.

D. $y' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, ta có: $y' = (x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$.

🔍 Đáp án đúng **D**

□

Ví dụ 8. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{2}{3}}$.

A. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

B. $y' = \frac{2}{3}x$.

C. $y' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$.

D. $y' = \frac{2}{3x^3}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức đạo hàm của hàm số $y = x^\alpha \Rightarrow y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Với $x > 0$ ta có $y' = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

🔍 Đáp án đúng **A**

□

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = x^{\frac{\pi}{2}}$ có đồ thị (C) . Lấy $M \in (C)$ có hoành độ $x_0 = 1$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M .

Lời giải.

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M là $y'(1)$.

Áp dụng công thức $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

$$y' = \frac{\pi}{2} x^{\frac{\pi}{2}-1} \Rightarrow y'(1) = \frac{\pi}{2} \cdot 1^{\frac{\pi}{2}-1} = \frac{\pi}{2}.$$

□

Ví dụ 10. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$.

A. $y' = \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

B. $y' = \frac{3}{2}x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

C. $y' = 3x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

D. $y' = 3x(x^2 + 1) \ln \frac{3}{2}$.

Lời giải.

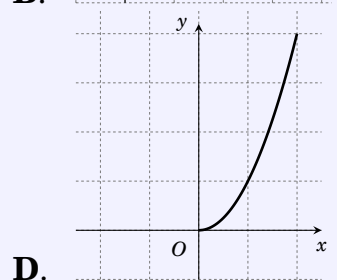
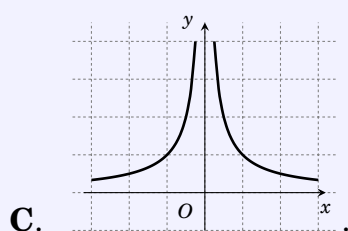
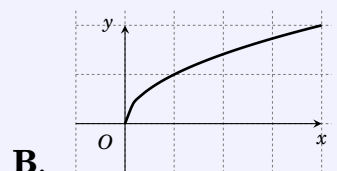
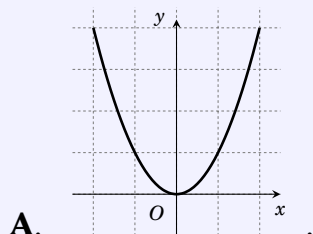
Ta có $y' = \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

🔍 Đáp án đúng **C**

□

Dạng 3. Khảo sát sự biến thiên và đồ thị hàm số lũy thừa

❏ Ví dụ 11. Trong các đồ thị dưới đây, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = x^{\frac{1}{4}}$?



❏ Lời giải.

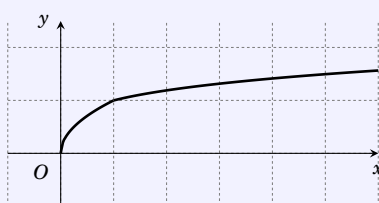
Do hàm số $y = x^{\frac{1}{4}}$ có tập xác định là $(0; +\infty)$ nên ta chỉ xét các đồ thị nằm bên phải trục tung.

Mặt khác, hàm số $y = x^{\frac{1}{4}}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

🔍 Đáp án đúng **B**

□

❏ Ví dụ 12. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số



A. $y = x^{\frac{1}{4}}$.

B. $y = x^{-2}$.

C. $y = x^{-\frac{1}{3}}$.

D. $y = x^{\frac{3}{2}}$.

❏ Lời giải.

🔍 Đáp án đúng **A**

□

❏ Ví dụ 13. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên các khoảng xác định của nó?

A. $y = x^{\frac{1}{3}}$.

B. $y = \frac{1}{x}$.

C. $y = x^{-4}$.

D. $y = x^{-\frac{3}{4}}$.

❏ Lời giải.

Hàm số $y = x^{\frac{1}{3}}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

🔍 Đáp án đúng **A**

□

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Hàm số $y = (9 - x^2)^{\frac{1}{3}}$ có tập xác định là
 A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. C. $\mathcal{D} = (-3; 3)$. D. $\mathcal{D} = [-3; 3]$.

Câu 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3)^{-2}$.
 A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$. B. $\mathcal{D} = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.
 C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}\}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\pi}$ là
 A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. B. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.
 C. $(1; 2)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

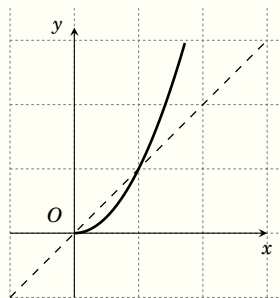
Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{2}}$ là
 A. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. B. $[1; +\infty)$.
 C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 5. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = (2 - x)^{1 - \sqrt{3}}$.
 A. $\mathcal{D} = (-\infty; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$. C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$. D. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$.

Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = x^{\frac{1}{2}}$.
 A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (-\infty; 0)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

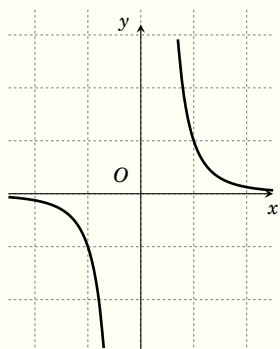
Câu 7. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^{\frac{2}{3}}$.
 A. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. B. $y' = \frac{2}{3}x$. C. $y' = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$. D. $y' = \frac{2}{3x^3}$.

Câu 8. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số



A. $y = x^{\frac{\pi}{2}}$. B. $y = x^{\frac{1}{3}}$. C. $y = x^{-\frac{5}{2}}$. D. $y = x^{-3}$.

Câu 9. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^{-3}$. B. $y = x^{-\frac{1}{3}}$. C. $y = x^3$. D. $y = \sqrt[3]{x}$.

Câu 10. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = (1 + \sqrt{x - 1})^{\sqrt{5}}$.
 A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{2}}$.

- A. $\mathcal{D} = (1; 2)$. B. $\mathcal{D} = [1; 2]$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Câu 12. Tìm tập xác định của hàm số $y = (-x^2 + 3x + 4)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x-2}$.

- A. $D = [2; +\infty)$. B. $D = (-1; 2]$. C. $D = [2; 4)$. D. $D = (-1; 4)$.

Câu 13. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\sqrt{3}}$.

- A. $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x-3)(x^2-3x+2)^{\sqrt{3}-1}$. B. $y' = \sqrt{3}(2x-3)(x^2-3x+2)^{\sqrt{3}+1}$.
C. $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x-3)(x^2-3x+2)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$. D. $y' = \sqrt{3}(2x-3)(x^2-3x+2)^{\sqrt{3}-1}$.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$.

- A. $y' = \frac{4x-3}{3\sqrt[3]{(2x^2-3x+2)^2}}$. B. $y' = \frac{4x-3}{3\sqrt{(2x^2-3x+2)^2}}$.
C. $y' = \frac{4x-3}{3\sqrt[3]{2x^2-3x+2}}$. D. $y' = \frac{4x-3}{\sqrt[3]{(2x^2-3x+2)^2}}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = (2x-3)^{\frac{5}{6}}$. Tính $f'(2)$.

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{5}{3}$.

Câu 16. Tìm đạo hàm số của hàm số $y = \sqrt[4]{x+2}$, $x > -2$.

- A. $y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}}$. B. $y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x+2}}$. C. $y' = \frac{1}{2\sqrt[4]{(x+2)^3}}$. D. $y' = 4\sqrt[3]{x+2}$.

Câu 17. Tìm đạo hàm y' của hàm số $y = \sqrt[3]{(1-3x)^5}$ trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$.

- A. $y' = -5(1-3x)^{\frac{2}{3}}$. B. $y' = \frac{5}{3}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$. C. $y' = -5(1-3x)^{\frac{4}{3}}$. D. $y' = \frac{5}{3}(1-3x)^{\frac{2}{3}}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

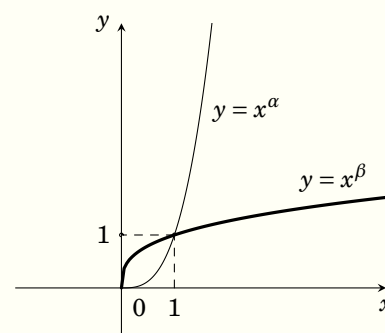
- A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận.
B. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.
C. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang và có một tiệm cận đứng.
D. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = (1-x^2)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Câu 20. Cho các số thực α và β . Đồ thị các hàm số $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $0 < \beta < \alpha < 1$. B. $\alpha < 0 < \beta < 1$.
C. $0 < \beta < 1 < \alpha$. D. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.



§3. LOGARIT

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Định nghĩa

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α thỏa mãn đẳng thức

$$a^\alpha = b$$

được gọi là **lôgarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$.

Ta có

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$$

2. Các tính chất

Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có

- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log_a (a^\alpha) = \alpha$

3. Lôgarit của một tích

Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

4. Lôgarit của một thương

Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Đặc biệt:

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

5. Lôgarit của một lũy thừa

Cho hai số dương $a, b, a \neq 1$, với mọi α , ta có

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

Đặc biệt:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

6. Công thức đổi cơ số

Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Đặc biệt:

$$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$$

và

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \quad (\alpha \neq 0)$$

7. Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên

- **Lôgarit thập phân** là lôgarit cơ số 10, kí hiệu là $\log b$ hoặc $\lg b$.
Ta có

$$\log b = \lg b = \log_{10} b$$

- **Lôgarit tự nhiên** là lôgarit cơ số e , kí hiệu là $\ln b$.
Ta có

$$\ln b = \log_e b$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

➤ Dạng 1. Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lô-ga-rít

 **Ví dụ 1.** Cho a là số thực dương khác 1 và x, y là hai số thực dương. Biểu thức $\log_a \frac{x}{y}$ bằng

- A. $\log_a x - \log_a y$. B. $\log_a x + \log_a y$. C. $\log_a(x - y)$. D. $\frac{\log_a x}{\log_b x}$.

 **Lời giải.**

Ta có $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

🔍 Đáp án đúng **A** □

 **Ví dụ 2.** Cho hai số dương a, b ($a \neq 1$) và α là số thực tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\log_a a = 2a$. B. $\log_a a^\alpha = \alpha$. C. $\log_a 1 = 0$. D. $a^{\log_a b} = b$.

 **Lời giải.**

Ta có $\log_a a = 1$

🔍 Đáp án đúng **A** □

✍ Ví dụ 3. Với a, b, c là các số thực dương, a và c khác 1 và $a \neq 0$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$.

B. $\log_{a^c} b = a \log_a b$.

C. $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$.

D. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.

🔗 Lời giải.

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \log_a b.$$

🔍 Đáp án đúng **(B)**



✍ Ví dụ 4. Cho a là số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(10a) = 10 \log a$.

B. $\log(10a) = \log a$.

C. $\log(10a) = 10 + \log a$.

D. $\log(10a) = 1 + \log a$.

🔗 Lời giải.

$$\text{Ta có } \log(10a) = \log(10) + \log a = 1 + \log a.$$

🔍 Đáp án đúng **(D)**



✍ Ví dụ 5. Với a, b, c là các số thực dương khác 1, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

A. $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.

B. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

D. $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$.

🔗 Lời giải.

Với a, b, c dương và khác 1, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ mới là công thức đổi cơ số đúng.

🔍 Đáp án đúng **(B)**



✍ Ví dụ 6. Cho a là số thực dương bất kỳ, biểu thức $\log(2a^3)$ bằng?

A. $2 \log a^3$.

B. $6 \log a$.

C. $\log 2 + 3 \log a$.

D. $a \log 2^3$.

🔗 Lời giải.

$$\text{Ta có } \log(2a^3) = \log 2 + \log a^3 = \log 2 + 3 \log a.$$

🔍 Đáp án đúng **(C)**



✍ Ví dụ 7. Cho $\log_2 5 = a$. Biểu diễn $\log_8 25$ theo a là

A. $3a$.

B. $2a$.

C. $\frac{3}{2}a$.

D. $\frac{2}{3}a$.

🔗 Lời giải.

$$\text{Ta có } \log_8 25 = \log_{2^3} 5^2 = \frac{2}{3} \log_2 5 = \frac{2}{3}a.$$

🔍 Đáp án đúng **(D)**



✍ Ví dụ 8. Cho $\log_2 5 = a$, $\log_3 5 = b$. Tính $\log_6 5$ theo a và b là

A. $a^2 + b^2$.

B. $\frac{1}{a+b}$.

C. $\frac{ab}{a+b}$.

D. $a + b$.

🔗 Lời giải.

Ta có $\log_5 6 = \log_5 2 + \log_5 3 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$, suy ra $\log_6 5 = \frac{ab}{a+b}$.

🔍 Đáp án đúng **C**

□

🔗 **Ví dụ 9.** Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_{a^3}(ab^6)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = 2 + 3\log_a b$. B. $P = \frac{1}{3} + 2\log_a b$. C. $P = 2\log_a(ab)$. D. $P = 3\log_a b$.

🔗 **Lời giải.**

Biến đổi $P = \log_{a^3}(ab^6) = \frac{1}{3}\log_a(ab^6) = \frac{1}{3}(\log_a a + \log_a b^6) = \frac{1}{3} + 2\log_a b$.

🔍 Đáp án đúng **B**

□

🔗 **Ví dụ 10.** Biết $\log_2 x = a$. Biểu thức $\log_2 4x^2$ bằng

A. $2+a$. B. $4+2a$. C. $4+a$. D. $2+2a$.

🔗 **Lời giải.**

Ta có $\log_2 4x^2 = \log_2 4 + \log_2 x^2 = 2 + 2\log_2 x = 2 + 2a$.

🔍 Đáp án đúng **D**

□

📁 Dạng 2. Tính giá trị biểu thức chứa lô-ga-rít

🔗 **Ví dụ 11.** Cho $a > 0, a \neq 1$. Tính $\log_a(a^2)$

A. $2a$. B. -2 . C. 2 . D. a .

🔗 **Lời giải.**

$\log_a(a^2) = 2$.

🔍 Đáp án đúng **C**

□

🔗 **Ví dụ 12.** Cho $a > 0, a \neq 1$, giá trị của $\log_{a^3} a$ bằng

A. -3 . B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3 .

🔗 **Lời giải.**

$\log_{a^3} a = \frac{1}{3}\log_a a = \frac{1}{3}$.

🔍 Đáp án đúng **C**

□

🔗 **Ví dụ 13.** Tính $T = a^{\log_{a^2} 4}$.

A. $T = 2$. B. $T = 4$. C. $T = 8$. D. $T = \sqrt{2}$.

🔗 **Lời giải.**

Điều kiện $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1. \end{cases}$

$T = a^{\log_{a^2} 4} = a^{\log_a 2} = 2$.

🔍 Đáp án đúng **A**

□

✍ Ví dụ 14. Giá trị của $\log_a \frac{1}{a^3}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$ bằng

A. 3. B. $-\frac{3}{2}$. C. -3. D. $-\frac{2}{3}$.

🔗 Lời giải.

$$\log_a \frac{1}{a^3} = \log_a a^{-3} = -3.$$

🔍 Đáp án đúng **(C)**

□

✍ Ví dụ 15. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$

A. 1. B. $\frac{4}{3}$. C. 2. D. $\frac{3}{4}$.

🔗 Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20 = \log_8 \frac{12 \cdot 20}{15} = \log_8 16 = \frac{4}{3}.$$

🔍 Đáp án đúng **(B)**

□

✍ Ví dụ 16. Tính giá trị của biểu thức $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$.

A. $A = 8$. B. $A = 405$. C. $A = 15$. D. $A = 86$.

🔗 Lời giải.

Ta có

$$A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5} = 2^{\log_4 9} \cdot 2^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 9}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15.$$

🔍 Đáp án đúng **(C)**

□

✍ Ví dụ 17. Biết rằng $\log_6 \sqrt{a} = 2$. Tính $\log_6 a$.

A. $\log_6 a = 36$. B. $\log_6 a = 4$. C. $\log_6 a = 6$. D. $\log_6 a = 1296$.

🔗 Lời giải.

Từ $\log_6 \sqrt{a} = 2$ suy ra $a > 0$. Do đó: $\log_6 a = \log_6 (\sqrt{a})^2 = 2 \log_6 \sqrt{a} = 2 \cdot 2 = 4$.

🔍 Đáp án đúng **(B)**

□

✍ Ví dụ 18. Cho a là số thực dương tùy ý và $a \neq 1$. Tính $P = \log_{\frac{a}{2}} \frac{a^3}{8}$.

A. $P = \frac{1}{3}$. B. $P = -\frac{1}{3}$. C. $P = 3$. D. $P = -3$.

🔗 Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \log_{\frac{a}{2}} \frac{a^3}{8} = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2}\right)^3 = 3.$$

🔍 Đáp án đúng **(C)**

□

✍ Ví dụ 19. Cho a là số thực dương tùy ý khác 3, giá trị của $\log_{\frac{a}{3}} \left(\frac{a^2}{9}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 2. D. -2.

🔗 Lời giải.

Ta có $\log_{\frac{a}{3}}\left(\frac{a^2}{9}\right) = \log_{\frac{a}{3}}\left(\frac{a}{3}\right)^2 = 2$.

🔍 Đáp án đúng **C** □

✍ **Ví dụ 20.** Tính giá trị của biểu thức $P = 49^{\log_7 6} + 10^{1+\log_3} - 3^{\log_9 25}$.

- A. $P = 61$. B. $P = 35$. C. $P = 56$. D. $P = 65$.

✍ **Lời giải.**

$$P = 6^{\log_7 49} + 10 \cdot 10^{\log_3} - 3^{\log_3 5} = 6^2 + 10 \cdot 3 - 5 = 36 + 30 - 5 = 61.$$

🔍 Đáp án đúng **A** □

✍ **Ví dụ 21.** Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 18. B. 24. C. 12. D. 6.

✍ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = (6 \log_a b) \cdot (4 \log_b a) = 24.$$

🔍 Đáp án đúng **B** □

✍ **Ví dụ 22.** Giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(a^{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}} \right)$ bằng

- A. 3. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

✍ **Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \log_a \left(a^{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}} \right) \\ &= \log_a \left(a^{\sqrt[3]{a \cdot a^{\frac{1}{2}}}} \right) \\ &= \log_a \left(a^{\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}} \right) \\ &= \log_a \left(a^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \log_a a^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

🔍 Đáp án đúng **C** □

✍ **Ví dụ 23.** Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2 \log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

- A. $I = 4$. B. $I = 0$. C. $I = \frac{5}{4}$. D. $I = \frac{3}{2}$.

✍ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \log_3 a = 2 \Leftrightarrow a = 9; \quad \log_2 b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \sqrt{2}. \text{ Suy ra}$$

$$\begin{aligned} I &= 2\log_3[\log_3(3 \cdot 9)] + \log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{2})^2 = 2\log_3[\log_3 3^3] + \log_{2^{-2}} 2 \\ &= 2\log_3 3 - \frac{1}{2}\log_2 2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

🔍 Đáp án đúng **D**



🔍 Ví dụ 24. Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

- A. 6. B. -6. C. $\frac{1}{6}$. D. $-\frac{1}{6}$.

🔍 **Lời giải.**

Từ $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ ta có $\log_b x = \log_b a \log_a x \Rightarrow \log_b a = \frac{3}{2}$.

$$\text{Do đó: } P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \frac{\log_b x}{\log_b \left(\frac{a}{b^2}\right)} = \frac{\log_b x}{\log_b a - \log_b b^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 2} = -6.$$

🔍 Đáp án đúng **B**



🔍 Ví dụ 25. Tính $M = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{2017}{2018}$.

- A. $M = 2018$. B. $M = \ln 2017$. C. $M = \ln \frac{1}{2017}$. D. $M = -\ln 2018$.

🔍 **Lời giải.**

$$M = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \dots + \ln 2017 - \ln 2018 = -\ln 2018.$$

🔍 Đáp án đúng **D**



C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔍 Câu 1. Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

- A. $2\log a + \log b$. B. $2(\log a + \log b)$. C. $\log a + \frac{1}{2}\log b$. D. $\log a + 2\log b$.

🔍 Câu 2. Với x là số thực dương tùy ý, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A. $\log_{100} x = \frac{1}{2}\log x$. B. $\log_{100} x = 2\log x$. C. $\log_{100} x = \log x$. D. $\log_{100} x = -\log x$.

🔍 Câu 3. Với a, b là số thực dương, a khác 1 và m, n là hai số thực, m khác 0, ta có $\log_{a^m}(b^n)$ bằng

- A. $m \cdot n \log_a b$. B. $\frac{m}{n} \log_a b$. C. $-\frac{m}{n} \log_a b$. D. $\frac{n}{m} \log_a b$.

🔍 Câu 4. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng

- A. $3 + \log_3 a$. B. $3 \log_3 a$. C. $1 - \log_3 a$. D. $1 + \log_3 a$.

🔍 Câu 5. Cho a, b, c là ba số thực dương, khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a^{\log_b c} = b$. B. $\log_a \left(\frac{b}{a^3}\right) = \log_a b - 3$.
C. $\log_{a^a} b = a \log_a b$. D. $\log_a b = \log_b c \cdot \log_a b$.

🔍 Câu 6. Giá trị của biểu thức $A = 4^{\log_2 7}$ bằng

- A. 14. B. 28. C. 49. D. 2.

🔍 Câu 7. Cho a, b, c là ba số dương với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\log_a b = \frac{\log_b c}{\log_a c}$, ($b \neq 1, c \neq 1$). B. $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$, ($b \neq 1, c \neq 1$).

C. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (b \neq 1).$

D. $\log_a b = \frac{1}{a} \log_a b, (a \neq 0).$

Câu 8. Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương x, y ?

A. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$

B. $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y.$

C. $\log_a(xy) = \log_a x - \log_a y.$

D. $\log_a(xy) = \frac{\log_a x}{\log_a y}.$

Câu 9. Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_a(a^5 b)$ bằng

A. $5 + \log_a b.$

B. $\frac{1}{5} + \log_a b.$

C. $5(\log_a a + \log_a b).$

D. $5 \log_a b.$

Câu 10. Với a và b là các số thực dương. Biểu thức $\log_a(a^2 b)$ bằng

A. $2 \log_a b.$

B. $2 - \log_a b.$

C. $2 + \log_a b.$

D. $1 + 2 \log_a b.$

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(2a)$ bằng

A. $1 + \log_2 a.$

B. $2 + \log_2 a.$

C. $1 - \log_2 a.$

D. $2 - \log_2 a.$

Câu 12. $\ln(4e)$ bằng

A. $1 + 2 \ln 2.$

B. $1 + \ln 2.$

C. $2 \ln 2.$

D. $1 - 2 \ln 2.$

Câu 13. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\ln 3a = \ln 3 + \ln a.$

B. $\ln \frac{a}{3} = \frac{1}{3} \ln a.$

C. $\ln(3+a) = \ln 3 + \ln a.$

D. $\ln a^5 = \frac{1}{5} \ln a.$

Câu 14. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

A. $\ln(4a).$

B. $\frac{\ln 7}{\ln 3}.$

C. $\frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}.$

D. $\ln \frac{7}{3}.$

Câu 15. Cho a là số thực dương khác 1. Giá trị của biểu thức $\log_a \left(\frac{a^2 \sqrt[3]{a^2} \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right)$ bằng

A. $\frac{9}{5}.$

B. $\frac{12}{5}.$

C. 2.

D. 3.

Câu 16. Cho $0 < a \neq 1$ và $x > 0, y > 0$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y.$

B. $\log_a(x+y) = \log_a x \cdot \log_a y.$

C. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$

D. $\log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y.$

Câu 17. Biết $\log_6 a = 2$ ($0 < a \neq 1$). Tính $I = \log_a 6$.

A. $I = \frac{1}{4}.$

B. $I = 64.$

C. $I = 36.$

D. $I = \frac{1}{2}.$

Câu 18. Biết $\log_2 a = x$ và $\log_2 b = y$, biểu thức $\log_2(4a^2 b^3)$ bằng

A. $2x + 3y + 2.$

B. $6xy.$

C. $x^3 y^2.$

D. $x^2 + y^3 + 4.$

Câu 19. Rút gọn biểu thức $P = 2^{\log_2 a} + \log_a a^b$, ($a > 0, a \neq 1$).

A. $P = a - b.$

B. $P = a + b.$

C. $P = 2a + b.$

D. $P = 2^a + b.$

Câu 20. Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a - 2 \log_4 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a = 8b.$

B. $a = 6b.$

C. $a = 8b^4.$

D. $a = 8b^2.$

Câu 21. Với a, b là các số thực dương, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng.

A. $\log \frac{a}{b} = \frac{\log a}{\log b}.$

B. $\log(ab) = \log a \cdot \log b.$

C. $\log(ab) = \log a + \log b.$

D. $\log \frac{a}{b} = \log_b a.$

- Câu 22.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^3)$ bằng
 A. $3\log_2 a$. B. $3 + \log_2 a$. C. $\frac{3}{2}\log_2 a$. D. $\frac{1}{3}\log_2 a$.
- Câu 23.** Cho $a = \log 3, b = \ln 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
 A. $10^b = e^a$. B. $10^a = e^b$. C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10}$. D. $\frac{a}{b} = \frac{e}{10}$.
- Câu 24.** Cho $a > 0, a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
 A. $\log_a 2a = 2$. B. $\log_{a^2} a = \frac{1}{2}$.
 C. $\log_a 2a = 1 + \log_a 2$. D. $\log_a a^2 = 2$.
- Câu 25.** Tính giá trị của biểu thức $I = a \log_2 \sqrt{8}$.
 A. $I = \frac{3}{2}$. B. $I = \frac{2}{3}$. C. $I = \frac{2a}{3}$. D. $I = \frac{3a}{2}$.
- Câu 26.** Cho a là số thực khác 0, mệnh đề nào sau đây là đúng?
 A. $\log_2^2 a^2 = \frac{1}{4} \log_2^2 |a|$. B. $\log_2^2 a^2 = 4 \log_2^2 a$.
 C. $\log_2^2 a^2 = 4 \log_2^2 |a|$. D. $\log_2^2 a^2 = \log_2^2 a$.
- Câu 27.** Cho $a = \log_3 15$ và $P = \log_{25} 15$. Khẳng định nào sau đây đúng?
 A. $P = \frac{a}{2(a-1)}$. B. $P = \frac{2a}{a-1}$. C. $P = \frac{a}{2(1-a)}$. D. $P = \frac{a}{2(a+1)}$.
- Câu 28.** Với a, b là hai số thực dương khác 1, ta có $\log_b a$ bằng
 A. $\frac{1}{\log_a b}$. B. $\log_a b$. C. $\log a - \log b$. D. $-\log_a b$.
- Câu 29.** Biết $\log 3 = m, \log 5 = n$, tìm $\log_9 45$ theo m, n .
 A. $2 + \frac{n}{2m}$. B. $1 + \frac{n}{m}$. C. $1 + \frac{n}{2m}$. D. $1 - \frac{n}{2m}$.
- Câu 30.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \left(\frac{3}{a}\right)$ bằng
 A. $3 - \log_3 a$. B. $1 + \log_3 a$. C. $1 - \log_3 a$. D. $\frac{1}{\log_3 a}$.
- Câu 31.** Cho a là số thực dương khác 4. Giá trị của biểu thức $\log_{\frac{a}{4}} \left(\frac{a^3}{64}\right)$ bằng
 A. 3. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. -3.
- Câu 32.** Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 b^3 = 16$. Giá trị của $2\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng
 A. 4. B. 8. C. 2. D. 16.
- Câu 33.** Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a} \neq b; a \neq 1; \log_a b = 2$. Tính $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba}$.
 A. $T = -\frac{2}{5}$. B. $T = \frac{2}{3}$. C. $T = \frac{2}{5}$. D. $T = -\frac{2}{3}$.
- Câu 34.** Đặt $\log_2 5 = a, \log_3 2 = b$. Tính $\log_{15} 20$ theo a và b .
 A. $\log_{15} 20 = \frac{2b+a}{1+ab}$. B. $\log_{15} 20 = \frac{2b+a}{1+ab}$.
 C. $\log_{15} 20 = \frac{2b+1}{1+ab}$. D. $\log_{15} 20 = \frac{b+ab+1}{1+ab}$.
- Câu 35.** Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a (b^2 c^3)$?
 A. $P = 108$. B. $P = 13$. C. $P = 31$. D. $P = 30$.

Câu 36. Với a và b là hai số thực dương tùy ý và $a \neq 1, \log_{\sqrt{a}}(a\sqrt{b})$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_a b$. B. $2 + \frac{1}{2} \log_a b$. C. $2 + \log_a b$. D. $1 + 2 \log_a b$.

Câu 37. Cho $\log_{12} 27 = a$. Tính $T = \log_{36} 24$ theo a .

- A. $T = \frac{9+a}{6+2a}$. B. $T = \frac{9-a}{6-2a}$. C. $T = \frac{9-a}{6+2a}$. D. $T = \frac{9+a}{6-2a}$.

Câu 38. Cho $x > 0$ thỏa mãn $\log_3(\log_9 x) = 0$. Tính $(\log_3 x)^2$.

- A. 0. B. 9. C. 1. D. 4.

Câu 39. Cho $\log_2(a+1) = 3$. Tính $3^{\log_9(a-3)}$.

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 40. Cho hai số thực dương a và b tùy ý. Giá trị của $\log a b^{10}$ bằng

- A. $10 \log a + \log b$. B. $\log a + 10 \log b$. C. $10 + \log(ab)$. D. $10 \log(ab)$.

Câu 41. Câu 2. Cho $a > 0, a \neq 1$, giá trị của biểu thức $A = a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$ bằng bao nhiêu?

- A. 8. B. 16. C. 4. D. 2.

Câu 42. Câu 13. Cho $a = \log_2 7$. Hãy tính $\log_{14} 49$ theo a .

- A. $\log_{14} 49 = \frac{2a}{2-a}$. B. $\log_{14} 49 = \frac{2a}{2+a}$. C. $\log_{14} 49 = \frac{2}{1+a}$. D. $\log_{14} 49 = \frac{2a}{1+a}$.

Câu 43. Cho $\log_2 5 = a$. Khi đó $P = \log_4 500$ được tính theo a là

- A. $6a - 2$. B. $3a + 2$. C. $2(5a + 4)$. D. $\frac{3a+2}{2}$.

Câu 44. Câu 17. Cho $a = \log_{20} 50$. Hãy biểu diễn $\log_2 5$ theo a .

- A. $\log_2 5 = \frac{2a+1}{2-a}$. B. $\log_2 5 = \frac{2a+1}{a-2}$. C. $\log_2 5 = \frac{2a-1}{2-a}$. D. $\log_2 5 = \frac{2a-1}{a+2}$.

Câu 45. Đặt $\log_3 2 = a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng

- A. $\frac{4a}{3}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{3}{4a}$. D. $\frac{4}{3a}$.

Câu 46. Cho $\log_{ab} b = 3$ (với $a > 0, b > 0, ab \neq 1$). Tính $\log_{\sqrt{ab}} \left(\frac{a}{b^2} \right)$.

- A. -16. B. -10. C. 5. D. -4.

Câu 47. Với a là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log a^3 = \frac{1}{3} \log a$. B. $\log(3a) = \frac{1}{3} \log a$. C. $\log(3a) = 3 \log a$. D. $\log a^3 = 3 \log a$.

Câu 48. Tính giá trị của biểu thức $K = \log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$ với $0 < a \neq 1$.

- A. $K = \frac{3}{4}$. B. $K = \frac{3}{2}$. C. $K = \frac{4}{3}$. D. $K = -\frac{3}{4}$.

Câu 49. Câu 1. Cho a là số thực dương và khác 1. Tính giá trị biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} a$.

- A. $P = 2$. B. $P = 0$. C. $P = -2$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Câu 50. Cho a, b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = 2$, tính giá trị của $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

- A. -4. B. -2. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 51. Cho $\log_a c = x > 0$ và $\log_b c = y > 0$. Khi đó giá trị của $\log_{ab} c$ là

- A. $\frac{xy}{x+y}$. B. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. C. $x+y$. D. $\frac{1}{xy}$.

Câu 52. Cho $\log_2 x = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $P = \frac{\log_2(4x) + \log_2 \frac{x}{2}}{x^2 - \log_{\sqrt{2}} x}$ bằng

A. 1. B. 2. C. $\frac{4}{7}$. D. $\frac{8}{7}$.

Câu 53. Đặt $\log_2 a = x, \log_2 b = y$. Biết $\log_{\sqrt{8}} \sqrt[3]{ab^2} = mx + ny$. Tìm $T = m + n$

A. $T = \frac{2}{3}$. B. $T = \frac{8}{9}$. C. $T = \frac{2}{9}$. D. $T = \frac{3}{2}$.

Câu 54. Cho b là số thực dương khác 1. Giá trị của biểu thức $\log_b \left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \right)$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. 1. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 55. Câu 34. Cho $\log_a b = 2; \log_a c = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\log_a x$, biết rằng $x = \frac{a\sqrt{b^3}}{c^2}$.

A. $\log_a x = -2$. B. $\log_a x = -4$. C. $\log_a x = -6$. D. $\log_a x = -1$.

Câu 56. Với các số thực x, y dương bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2(x + y) = \log_2 x + \log_2 y$. B. $\log_2 \left(\frac{x^2}{y} \right) = 2\log_2 x - \log_2 y$.

C. $\log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}$. D. $\log_2(xy) = \log_2 x \cdot \log_2 y$.

Câu 57. Cho $\log_2 3 = a$ và $\log_2 5 = b$, khi đó $\log_{15} 8$ bằng

A. $\frac{a+b}{3}$. B. $3(a+b)$. C. $\frac{3}{a+b}$. D. $\frac{1}{3(a+b)}$.

Câu 58. Với các số thực dương a, b và $a \neq 1$, $a^{3-2\log_a b}$ bằng

A. $a^3 b$. B. $a^2 b^2$. C. ab^2 . D. $a^3 b^{-2}$.

Câu 59. Câu 38. Cho các số thực dương $x; y > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 14xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_2(x + y) = 2 + \frac{\log_2 xy}{2}$. B. $\log_2 \frac{x+y}{16} = \log_2 x + \log_2 y$.

C. $\log_2(x + y) = \frac{\log_2 x + \log_2 y}{2}$. D. $\log_2 \frac{x+y}{14} = \log_2 x + \log_2 y$.

Câu 60. Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$ thỏa mãn hệ thức $a^2 + b^2 = 4ab$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\log_a(4ab) = 2\log_a(a + b)$. B. $2\log_a(a - b) = \log_a(2ab)$.

C. $2\log_a(a + b) = 1 + \log_a 6b$. D. $\log_a(4ab) = \log_a a^2 + \log_a b^2$.