

Câu 1. Có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh từ một nhóm có 5 học sinh.**A.** $5!$.**B.** A_5^3 .**C.** C_5^3 .**D.** 5^3 .**Lời giải**

Số cách chọn 3 học sinh từ một nhóm gồm 5 học sinh là tổ hợp chập 3 của 5 phần tử có C_5^3 cách.

Hoán vị – Tổ hợp – Chỉnh hợp

① Sắp xếp vị trí n phần tử $\Rightarrow$ Sử dụng hoán vị $P_n = n!$. (casio : n SHIFT x^{-1}).

② Chọn k trong n tùy ý $\Rightarrow$ Sử dụng tổ hợp $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. (casio : n SHIFT $\div k$).

③ Chọn k trong n và sắp xếp $\Rightarrow$ Sử dụng chỉnh hợp $C_n^k \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!} = A_n^k$. (n SHIFT $\times k$).

Bài tập tương tự và mở rộng**Câu 1.1.** Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là**A.** A_{30}^3 .**B.** 3^{30} .**C.** 10.**D.** C_{30}^3 .**Lời giải****Chọn D**

Số cách chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người là tổ hợp chập 3 của 30 phần tử có C_{30}^3 cách.

Câu 1.2. Cho 8 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 8 điểm trên ?**A.** 336.**B.** 56.**C.** 168.**D.** 84.**Lời giải****Chọn B**

Số tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 8 điểm là tổ hợp chập 3 của 8 phần tử có $C_8^3 = 56$ tam giác.

Câu 1.3. Có n ($n > 0$) phần tử lấy ra k ($0 < k < n$) phần tử đem đi sắp xếp theo một thứ tự nào đó, mà khi thay đổi thứ tự ta được cách sắp xếp mới. Khi đó số cách sắp xếp là**A.** C_n^k .**B.** A_k^n .**C.** A_n^k .**D.** P_n .**Lời giải****Chọn C**

Số cách sắp xếp là chỉnh hợp chập k của n phần tử có A_n^k cách.

Câu 1.4. Một tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 2 học sinh từ tổ đó để giữ hai chức vụ tổ trưởng và tổ phó.**A.** A_{10}^2 .**B.** C_{10}^2 .**C.** A_{10}^8 .**D.** 10^2 .**Lời giải****Chọn A**

Số cách chọn ra 2 học sinh từ tổ có 10 học sinh để giữ hai chức vụ tổ trưởng và tổ phó là chỉnh hợp chập 2 của 10 phần tử có A_{10}^2 cách.

Câu 1.5. Cho A là tập hợp gồm 20 điểm phân biệt. Số đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là**A.** 170.**B.** 160.**C.** 190.**D.** 360.

Lời giải**Chọn C**

Số đoạn thẳng có hai đầu mút phân biệt thuộc tập A là tổ hợp chập 2 của 20 phần tử có $C_{20}^2 = 190$ đoạn thẳng.

- Câu 1.6.** Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là
A. P_6 . **B.** C_6^2 . **C.** A_6^2 . **D.** 36.

Lời giải**Chọn C**

Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là chính hợp chập 2 của 6 phần tử có C_6^2 vectơ.

- Câu 1.7.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc ?
A. 5^5 . **B.** $5!$. **C.** $4!$. **D.** 5.

Lời giải**Chọn B**

Số cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc là hoán vị của 5 phần tử có $5!$ cách.

- Câu 1.8.** Từ tập $X = \{2; 3; 4; 5; 6\}$ có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau ?
A. 60. **B.** 125. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải**Chọn A**

Số các nhiều số tự nhiên có ba chữ số mà các chữ số đôi một khác nhau được lấy từ tập X là chính hợp chập 3 của 5 phần tử có $A_5^3 = 60$ số.

- Câu 1.9.** Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ?
A. C_{38}^2 . **B.** A_{38}^2 . **C.** $C_{20}^2 C_{18}^1$. **D.** $C_{20}^1 C_{18}^1$.

Lời giải**Chọn D**

Chọn 1 nam từ 20 nam có C_{20}^1 cách.

Chọn 1 nữ từ 18 nữ có C_{18}^1 cách.

Vậy chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ có $C_{20}^1 C_{18}^1$ cách.

- Câu 1.10.** Một tổ có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh đi lao động trong đó có 2 học sinh nam ?
A. $C_9^2 \cdot C_6^3$. **B.** $C_6^2 + C_9^3$. **C.** $A_6^2 \cdot A_9^3$. **D.** $C_6^2 \cdot C_9^3$.

Lời giải**Chọn D**

Chọn 2 nam từ 6 nam có C_6^2 cách.

Chọn 3 nữ từ 9 nữ có C_9^3 cách.

Vậy chọn 5 học sinh đi lao động trong đó có 2 học sinh nam có $C_6^2 \cdot C_9^3$ cách.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$. Giá trị của u_3 bằng

- A. 6. B. 9. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $d = u_2 - u_1 = 3 - 1 = 2$. Suy ra $u_3 = u_1 + 2d = 1 + 2.2 = 5$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 2.1. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$, $u_6 = 27$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- A. 7. B. 5. C. 8. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $u_6 = u_1 + 5d \Rightarrow -3 + 5.d = 27$. Suy ra $d = 6$

Câu 2.2. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Tìm số hạng u_{10} .

- A. $u_{10} = -2.3^9$. B. $u_{10} = 25$. C. $u_{10} = 28$. D. $u_{10} = -29$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_{10} = u_1 + 9d \Rightarrow -2 + 9.3 = 25$. Suy ra $u_{10} = 25$

Câu 2.3. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99} .

- A. 401. B. 403. C. 402. D. 404.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_{99} = u_1 + 98d \Rightarrow 11 + 98.4 = 403$. Suy ra $u_{10} = 25$

Câu 2.4. Biết bốn số 5, x, 15, y theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của biểu thức $3x + 2y$ bằng

- A. 50. B. 70. C. 30. D. 80.

Lời giải

Chọn B

Ta có $5 + 15 = 2.x$. Suy ra $x = 10$. Mặt khác $x + y = 2.15 \Rightarrow y = 30 - 10 \Rightarrow y = 20$

Từ đó $3x + 2y = 3.10 + 2.20 = 70$

Câu 2.5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$ và $u_{20} = 60$. Tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

- A. 600. B. 60. C. 250. D. 500.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} u_5 = -15 \\ u_{20} = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = -15 \\ u_1 + 19d = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 5 \\ u_1 = -35 \end{cases} \text{.Suy ra } S_{20} = (u_1 + u_{20}) \frac{20}{2} = (-35 + 60)10 = 250$$

Câu 2.6. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy số (u_n) là $S_n = 253$. Giá trị của n bằng

- A. 9. B. 11. C. 12. D. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_n = [2u_1 + (n-1)d] \cdot \frac{n}{2} \Rightarrow 253 = [2.3 + (n-1)4] \frac{n}{2} \Rightarrow 2n^2 + n - 253 = 0 \Rightarrow n = 11$

Câu 2.7. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 1$ và $u_4 = 64$. Công bội của cấp số nhân bằng

- A. 21. B. ± 4 . C. 4. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_4 = u_1 q^3 \Rightarrow 64 = 1q^3 \Rightarrow q = 4$

Câu 2.8. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -2$ và công bội $q = 3$. Số hạng u_2 bằng

- A.** -6. **B.** 6. **C.** 1. **D.** -18.

Lời giải

Chọn A

$u_2 = u_1 q = -2.3 = -6$

Câu 2.9. Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân có $u_4 - u_2 = 54$ và $u_5 - u_3 = 108$.

- A.** $u_1 = 3$ và $q = 2$. **B.** $u_1 = 9$ và $q = 2$. **C.** $u_1 = 9$ và $q = -2$. **D.** $u_1 = 3$ và $q = -2$.

Lời giải

Chọn B

$u_4 - u_2 = 54 \Rightarrow u_1 q^3 - u_1 q = 54 \Rightarrow u_1 q (q^2 - 1) = 54 \quad (1)$

$u_5 - u_3 = 108 \Rightarrow u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \Rightarrow u_1 q^2 (q^2 - 1) = 108 \quad (2)$

Lấy (2) chia (1) về theo vế ta được $q = 2$.

Thay $q = 2$ vào (1) ta được $u_1 = 9$

Câu 2.10. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 765$. Giá trị của n bằng

- A.** 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

$S_n = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Suy ra $765 = 3 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow n = 8$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	1	-1	1	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng sau đây?

- A.** $(-2; 2)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên, suy ra $y' > 0$ khi $x \in (-\infty; -2)$, $x \in (0; 2)$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

- A.** $(0; 1)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên suy ra $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 1)$

Câu 3.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		1	4	$-\infty$

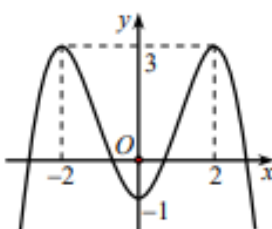
- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-2; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên suy ra $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 3)$

Câu 3.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng



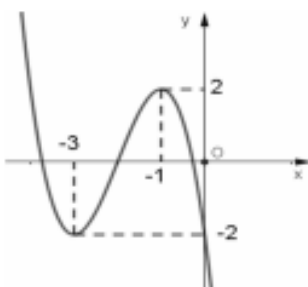
- A. $(-1; 3)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(-2; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị suy ra $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$

Câu 3.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



- A. $(-\infty; -3)$. B. $(-3; -1)$. C. $(-2; 2)$. D. $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị suy ra $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -1)$

Câu 3.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 3.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Lời giải**Chọn C**Từ bảng xét dấu suy ra $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$ **Câu 3.7.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải**Chọn C**Ta có $y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.**Câu 3.8.** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có

$$y = x^4 - 2x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$$

nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.**Câu 3.9.** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có

$$y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0 \forall x \neq -1$$

nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 3.10. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y = \sqrt{2x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow x < 0, \quad y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A.** $x = -3$.
- B.** $x = 1$.
- C.** $x = 2$.
- D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, thấy y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x = -2$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Câu 4.1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			3		-2		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
- B.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
- C.** Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.
- D.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên, thấy y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x = 2$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 2$

Câu 4.2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-3	0	-3	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** Hàm số có đúng hai điểm cực trị.
- B.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 và 1 .

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, thấy y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$

Câu 4.3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-3	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .

B. Hàm số có đúng một cực trị.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

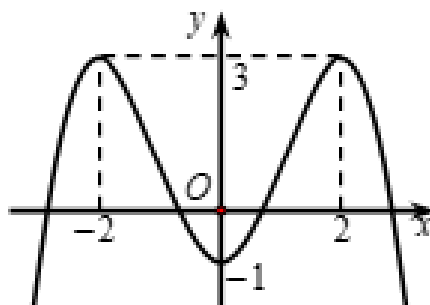
Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên, thấy y' đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi qua $x=0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$

Đồng thời y' đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua $x=1$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 4.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị cực đại của hàm số là

A. $x = \pm 2$.

B. $y_{\text{CB}} = -1$.

C. $y_{\text{CB}} = 3$.

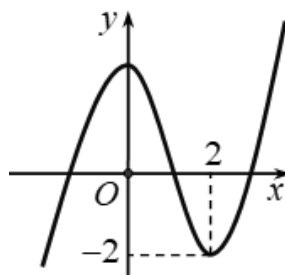
D. $M(2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị, thấy giá trị cực đại của hàm số là $y_{\text{CB}} = 3$.

Câu 4.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

D. Hàm số có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị, thấy hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.

Câu 4.6. Gọi x_1 là điểm cực đại, x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Giá trị $x_1 + 2x_2$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 3$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				4		$-\infty$

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x_1 = 1$, đạt cực tiểu tại $x_2 = -1$.

Vậy $x_1 + 2x_2 = 1 + 2(-1) = -1$.

Câu 4.7. Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ có tọa độ là

A. $(-1; 1)$.

B. $(2; 0)$.

C. $(1; 1)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$.

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				2		1		$+\infty$

Do đó điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ có tọa độ là $(0; 2)$.

Câu 4.8. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi

A. $m > 0$.

B. $m = 0$.

C. $m < 0$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Hàm số có cực trị tại $x = 2$ thì $y'(2) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa điều kiện $m < 3$).

Mặt khác $y'' = 6x - 6$ nên có $y''(2) = 12 - 6 = 6 > 0$ cho nên tại $x = 2$ hàm số đạt cực tiểu.

Vậy với $m = 0$ thì hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 4.9. Cho hàm số $y = x^4 + ax^2 + b$. Biết rằng đồ thị hàm số nhận điểm $A(-1; 4)$ là điểm cực tiểu. Tổng $2a + b$ bằng

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $f(x) = x^4 + ax^2 + b$. Ta có $f'(x) = 4x^3 + 2ax$.

Do đồ thị hàm số nhận điểm $A(-1; 4)$ là điểm cực tiểu nên có

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f(-1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(-1)^3 + 2a(-1) = 0 \\ (-1)^4 + a(-1) + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Vậy $2a + b = -4 + 5 = 1$.

Câu 4.10. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = -2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$. Khi đó $\Delta' = 9 - 3m$

Ta có hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Lúc này $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3}$.

Do đó $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot \frac{m}{3} = 3 \Leftrightarrow 12 - 2m = 9 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn $m < 3$).

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)$ đổi dấu 4 lần nên hàm số $f(x)$ có 4 cực trị.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 5.1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng xét dấu ta có $f'(x)$ đổi dấu 2 lần, suy ra hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 5.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới. Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$		

A. $y_{CD} = 3, y_{CT} = -2$.

B. $y_{CD} = 3, y_{CT} = 0$.

C. $y_{CD} = -2, y_{CT} = 2$.

D. $y_{CD} = 3, y_{CT} = 0$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng xét dấu $y_{CD} = 3, y_{CT} = 0$.

Câu 5.3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn nên

hàm số $y = f(x)$ có ba cực trị.

Câu 5.4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = -2(x-1)^2(x+1)$. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng về hàm số $y = f(x)$.

A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = -2(x-1)^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Ta có $x = 1$ là một nghiệm kép nên ta có bảng xét dấu của $f'(x) = -2(x-1)^2(x+1)$ là:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

Vậy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Câu 5.5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (e^x - 1)(x^2 - x - 2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

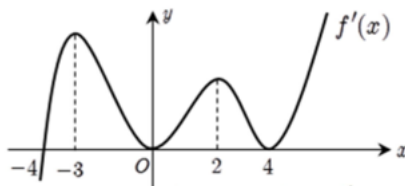
Ta có $f'(x) = (e^x - 1)(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn nên

hàm số $y = f(x)$ có ba cực trị. Bảng xét dấu của $f'(x) = (e^x - 1)(x^2 - x - 2)$.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực tiểu.

Câu 5.6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ của nó trên khoảng K như hình vẽ. Khi đó trên K , hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị.



A. 1.

B. 4.

C. 3.

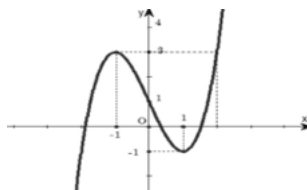
D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có đồ thị $f'(x)$ đổi dấu 1 lần nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 5.7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x) - 3x + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1.

B. 4.

C. 3.

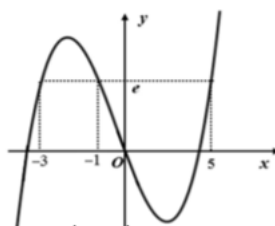
D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = f'(x) - 3$ đổi dấu 1 lần nên hàm số $y = f(x) - 3x + 2019$ có một điểm cực trị.

Câu 5.8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x) - ex + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 0.

B. 1.

C. 2.

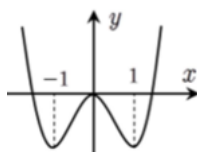
D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = f'(x) - e$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $y = f(x) - ex + 2019$ có ba điểm cực trị.

Câu 5.9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 4.

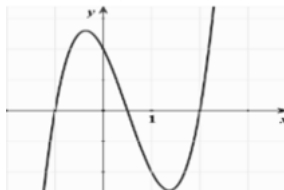
D. 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$. Nên đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm uốn. Vậy đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 5.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Nên đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm uốn. Vậy đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-1}$ là đường thẳng

A. $x = 1$.

B. $x = -1$.

C. $x = 2$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+4}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+4}{x-1} = -\infty$. Vậy $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

ĐƯỜNG TIỆM CẬN

1. Tìm đường tiệm cận ngang $\rightarrow$ tính $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \text{một số cụ thể } \alpha \Rightarrow y = \alpha$ là tiệm cận ngang.

2. Tìm đường tiệm cận đứng $\rightarrow$ tính $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} y = \pm\infty \Rightarrow x = x_0$ là tiệm cận đứng.

Đối với hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow$ tiệm cận đứng cho mẫu $cx+d=0$ và tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 6.1. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x}{2x-1}$ là đường thẳng

A. $y = 2$.

B. $y = 4$.

C. $y = \frac{1}{2}$.

D. $y = -2$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x}{2x-1}$ có tiệm cận ngang $y = \frac{-4}{2} = -2$.

- Câu 6.2.** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình
A. $y = 5$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $y = 0$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = \frac{5}{x-1}$ có tiệm cận ngang $y = \frac{0}{1} = 0$.

- Câu 6.3.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) là
A. $I(-2; 2)$. **B.** $I(2; 2)$. **C.** $I(2; -2)$. **D.** $I(-2; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng $x = -2$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

Vậy $I(-2; 2)$.

- Câu 6.4.** Khoảng cách từ gốc tọa độ đến giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ bằng
A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2$.

Vậy giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-1; 2) \Rightarrow OI = \sqrt{5}$.

- Câu 6.5.** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ là
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = +\infty$.

Vậy $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Câu 6.6.** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3-3x-2}{x^2+3x+2}$ là đường thẳng
A. $x = -2$. **B.** $y = -2$. **C.** $x = -1; x = -2$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = 0$.

Vậy $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 6.7. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 2x}}{x - 1}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = [0; 2] \setminus \{1\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x}}{x - 1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{-x^2 + 2x}}{x - 1} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và có tiệm cận đứng là $x = 1$.

Câu 6.8. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2 - 2x - 8}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = [-3; 3] \setminus \{-2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2 - 2x - 8} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2 - 2x - 8} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và có tiệm cận đứng là $x = -2$.

Câu 6.9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-		- 0 +		
$f(x)$	3	$+\infty$	$-\infty$	-2	5

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta có:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang $y = 3, y = 5$ và 1 tiệm cận đứng $x = 1$.

Câu 6.10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$	$+$
y	$-\infty$	1	$+\infty$	$+\infty$	3

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

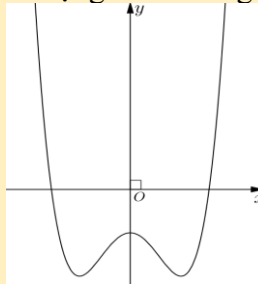
Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3.$$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 3$ và tiệm cận đứng $x = -1, x = 1$.

Câu 7. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên?



A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

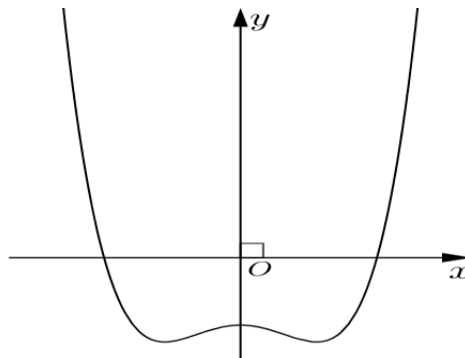
Chọn B

Đồ thị có dáng chữ W, suy ra đồ thị bậc bốn trùng phương và $a > 0$.

Chọn đáp án B.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 7.1. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = -x^3 + x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + x^2 - 1$.

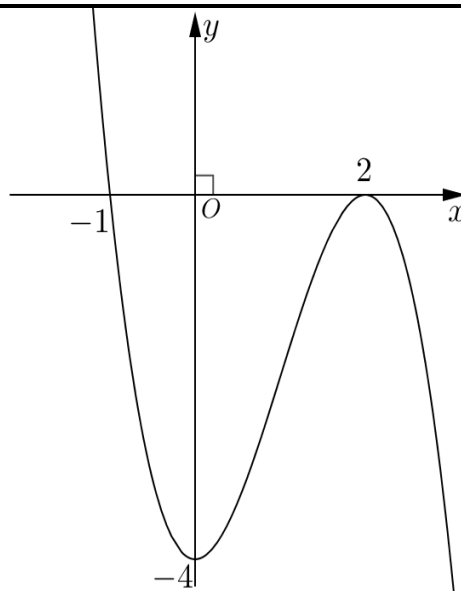
Lời giải

Chọn B

Đồ thị có dáng chữ W, suy ra đồ thị bậc bốn trùng phương và $a > 0$.

Chọn đáp án B.

Câu 7.2. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = -x^3 - 4$. B. $y = x^3 - 3x^2 - 4$. C. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

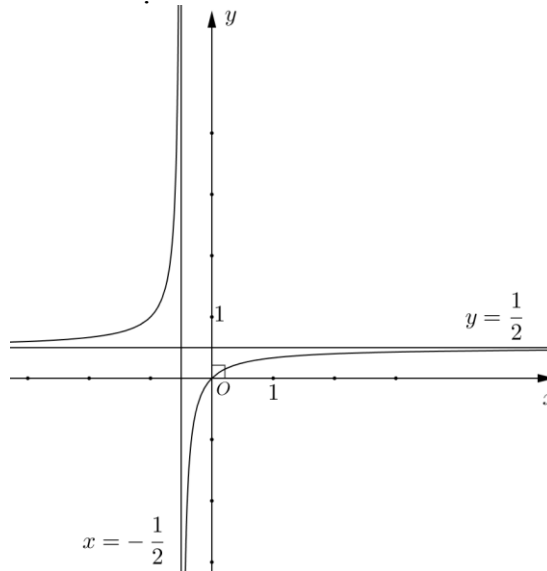
Lời giải

Chọn C

Đồ thị có dáng chữ $\mathcal{N}$, suy ra đồ thị bậc ba và $a < 0$.

Chọn đáp án C.

Câu 7.3. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = \frac{x+1}{2x+1}$. B. $y = \frac{x}{2x+1}$. C. $y = \frac{x-1}{2x+1}$. D. $y = \frac{x+3}{2x+1}$.

Lời giải

Chọn B

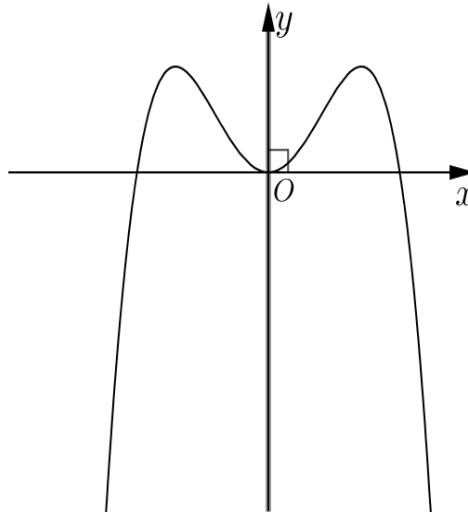
Đồ thị hàm số có:

- Tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{2}$.
- Tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$.

Đồ thị đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

Suy ra chọn đáp án B.

Câu 7.4. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = x^4 - 2x^2$. B. $y = x^4 + 2x^2$. C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Chọn D

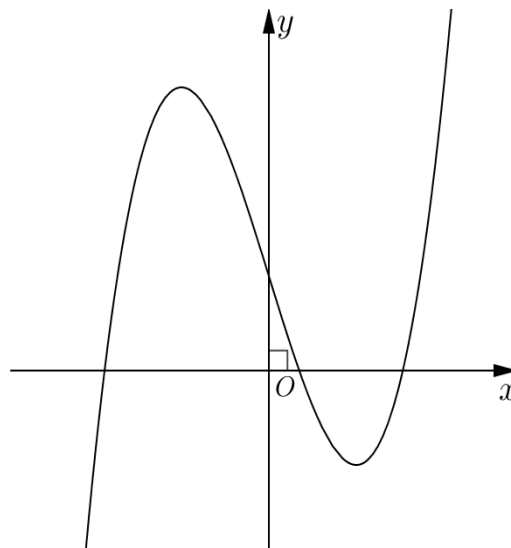
Đồ thị có dáng chữ M, suy ra đồ thị bậc bốn trùng phương và $a < 0$.

Loại đáp án A, B.

Đồ thị đi qua gốc tọa độ nên $c = 0$.

Chọn đáp án D.

Câu 7.5. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = -x^2 + x - 1$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$. C. $y = x^4 - x^2 + 1$. D. $y = x^3 - 3x + 1$.

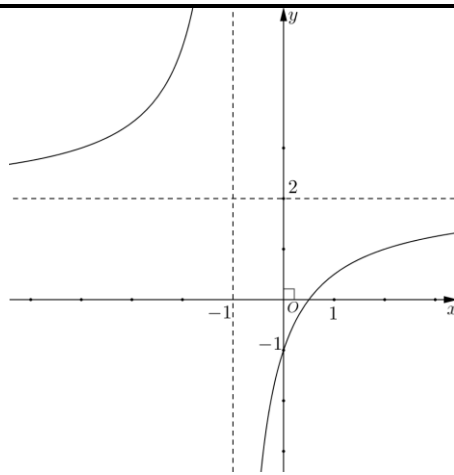
Lời giải

Chọn D

Đồ thị có dáng chữ N, suy ra đồ thị bậc ba và $a > 0$.

Chọn đáp án D.

Câu 7.6. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

D. $y = \frac{1-2x}{x-1}$.

Lời giải

Chọn A

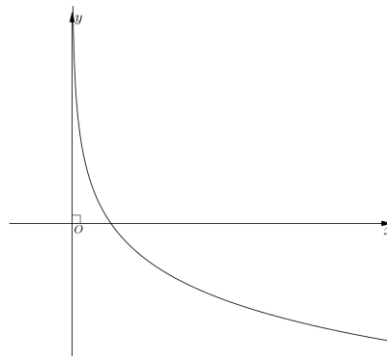
Đồ thị hàm số có:

- Tiệm cận đứng $x = -1$.
- Tiệm cận ngang $y = 2$.

Suy ra loại đáp án B, D.

Lại có, đồ thị đi qua điểm $(0; -1)$ nên ta chọn đáp án A.

Câu 7.7. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = 2^x$.

B. $y = \log_2 x$.

C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

D. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

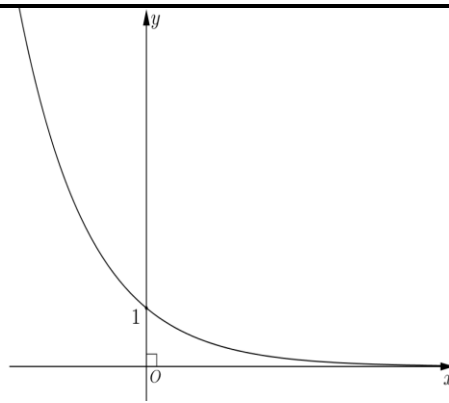
Lời giải

Chọn D

Vì đồ thị nằm bên phải trục Oy nên đây là đồ thị hàm số lôgarít. Loại A, C.

Đồ thị hàm số đi xuống từ trái qua phải nên $0 < a < 1$. Suy ra chọn đáp án D.

Câu 7.8. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



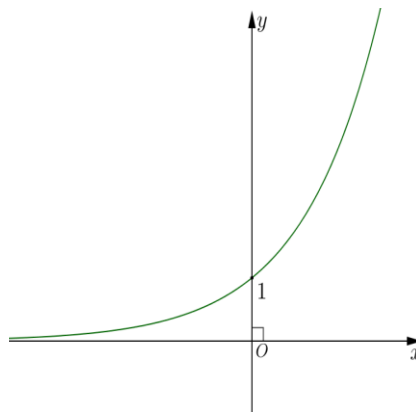
- A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. B. $y = \log_2 x$. C. $y = \frac{1}{2^x}$. D. $y = 2^x$.

Lời giải

Chọn C

Vì đồ thị nằm phía trên trục Ox nên đây là đồ thị hàm số mũ. Loại A, B.
Đồ thị đi xuống từ trái qua phải nên $0 < a < 1$. Suy ra chọn đáp án C.

Câu 7.9. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



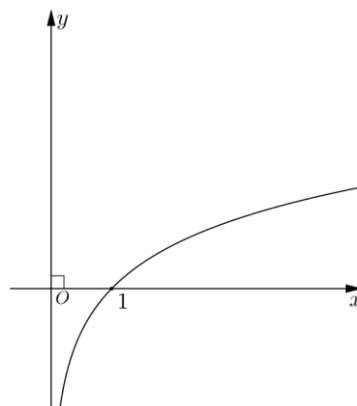
- A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. B. $y = \log_{\frac{2}{5}} x$. C. $y = \log_3 x$. D. $y = 2^x$.

Lời giải

Chọn D

Vì đồ thị nằm phía trên trục Ox nên đây là đồ thị hàm số mũ. Loại B, C.
Đồ thị đi lên từ trái qua phải nên $a > 1$. Suy ra chọn đáp án D.

Câu 7.10. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào?



- A. $y = e^x$. B. $y = \log_{\sqrt{e}} x$. C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. D. $y = \frac{1}{e^x}$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị nằm phía bên phải trục Oy nên đây là đồ thị hàm số lôgarit. Loại A, D.
Đồ thị đi lên từ trái qua phải nên $a > 1$. Suy ra chọn đáp án B.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. -2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y = x^3 - 3x + 2 \\ Oy: x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2.$$

Tương giao của hai đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) .

- Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là số điểm chung của hai đồ thị (C_1) và (C_2) .
- Phương trình $f(x) = g(x)$ được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 8.1 Đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y = x^4 - 2x^2 \\ Ox: y = 0 \end{cases} \text{ suy ra } x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Câu 8.2 Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ và $y = -x^2 + 4$ là

- A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y = x^4 - 2x^2 + 2 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases} \text{ suy ra } x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Câu 8.3 Biết đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại một điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = 4$. B. $y_0 = 0$. C. $y_0 = 2$. D. $y_0 = -1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = x^3 + x + 2 \end{cases} \text{ suy ra } x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Vậy } y_0 = 2.$$

Câu 8.4 Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$.

A. $A(4;3), B(0;-1)$.

B. $C(-1;3)$.

C. $D(3;-1)$.

D. $I(-1;0), J(3;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} y = x+1 \\ y = \frac{x+1}{x-2} \end{cases}$ suy ra $\frac{x+1}{x-2} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$. Vậy $I(-1;0), J(3;4)$.

Câu 8.5 Tìm tập hợp m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = 1-x$ tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty; 2]$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là $\frac{2x+m}{x+1} = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 2x+m = (x+1)(1-x) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 2x+m = x+1-x^2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + 2x + m - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $f(x) = x^2 + 2x + m - 1$.

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng (d) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có 2 nghiệm phân

$$\text{biệt khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \neq 0 \\ \Delta_{(*)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+m \neq 0 \\ 2-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2.$$

Câu 8.6 Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 2x+1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$.

A. $-\frac{3}{2} < m \neq -1$.

B. $m \geq -\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{3}{2} \leq m \neq -1$.

D. $m > -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) là $\frac{x+m}{x-1} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+m = (2x+1)(x-1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x+m = 2x^2 - 2x + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x^2 - 2x - m - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $f(x) = 2x^2 - 2x - m - 1$.

Để đồ thị (C) cắt đường thẳng (d) tại khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \Delta_{(*)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-m \neq 0 \\ 2m+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 8.7 Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = x^3 + (m-1)x + 5$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 ?

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = \frac{15}{2}$.

D. $m = -\frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} y = x^3 + (m-1)x + 5 \\ Ox: y = 0 \end{cases}$ suy ra $x^3 + (m-1)x + 5 = 0 \quad (*)$

Đề đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 suy ra $(-2)^3 + (m-1)(-2) + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow 2m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 8.8 Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = 2m - 3$ tại ba điểm phân biệt ?

A. $0 < m < 4$.

B. $0 < m \leq 2$.

C. $-3 < m < 1$.

D. $0 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:
$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 1 \\ y = 2m - 3 \end{cases}$$

Xét $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		1	-3	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ cắt đường thẳng $y = 2m - 3$ tại ba điểm phân biệt khi $-3 < 2m - 3 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 2$.

Câu 8.9 Tìm tập hợp m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2m^2 + 2m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $(-2; -2) \cup (-1; 1)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(-2; 0)$.

D. $(-1; 0) \cup (1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:
$$\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 - 2m^2 + 2m \\ Ox: y = 0 \end{cases}$$
 suy ra $x^3 + 3x^2 - 2m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 2m^2 - 2m$ (*)

Xét $f(x) = x^3 + 3x^2$ suy ra $f'(x) = 3x^2 + 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2m^2 + 2m$ cắt trục hoành tại ba điểm

phân biệt khi $0 < 2m^2 - 2m < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 2m > 0 \\ 2m^2 - 2m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hay } m > 1 \\ -1 < m < 2 \end{cases}$.

Vậy $m \in (-1; 0) \cup (1; 2)$.

Câu 8.10 Tìm tập hợp m để đường thẳng $y = mx + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có 3 điểm chung.**A.** $m > -3$.**B.** $m > 3$.**C.** $m < -3$.**D.** $m < 3$.**Lời giải****Chọn A**Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) : $x^3 - 3x + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow x^3 - (3+m)x = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 3 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 3 \end{cases} \quad (2)$$

Để đường thẳng $y = mx + 1$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có 3 điểm chung thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và khác 0

$$\Leftrightarrow m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -3.$$

Câu 8.11 Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hai hàm số $y = x^3 - 2x^2 - mx + 2$ và $y = x^2 - m$ có một điểm chung duy nhất.**A.** $m = -3$.**B.** $m < -3$.**C.** $m \leq 3$.**D.** $m \leq -3$.**Lời giải****Chọn D**Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) :

$$x^3 - 2x^2 - mx + 2 = x^2 - m \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx + m + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để hai hàm số $y = x^3 - 2x^2 - mx + 2$ và $y = x^2 - m$ có một điểm chung duy nhất thì (1) có một nghiệm duy nhất nên phương trình (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ \Delta = 0 \text{ và } x_1 = x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow 3 + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3.$$

Câu 8.12 Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - m^2 - 1$ với trục hoành (với m là tham số).**A.** 1.**B.** 2.**C.** 3.**D.** 4.**Lời giải****Chọn B**Ta xét hàm số $y = x^4 + 2x^2 - m^2 - 1$ có $a.b = 1.2 > 0$ suy ra đồ thị hàm số có 1 cực trị và đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ là $-m^2 - 1 < 0$. Vậy đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - m^2 - 1$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.**Câu 8.13** Tìm tập hợp m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + 2$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt.**A.** $(2; +\infty)$.**B.** $(-\infty; 1)$.**C.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.**D.** $(0; +\infty)$.**Lời giải****Chọn A**Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$.Đồ thị hàm số cắt Ox tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2mt + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm dương t_1, t_2 $t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ hay } m > 2 \\ m > -2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Câu 8.14 Tìm các giá trị của m để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ tại bốn điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m \neq 1 \end{cases}$ **B.** $-1 \leq m \leq 0$. **C.** $\begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m < 0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$.

Đồ thị hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ cắt đường thẳng $y = -1$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2 - (3m+2)t + 3m+1 = 0$ có 2 nghiệm dương t_1, t_2 $t_1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 > 0 \\ 3m+1 > 0 \\ 3m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \\ m > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Câu 8.15 Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 4m^2$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 6$.

A. $m = \frac{1}{4}$. **B.** $m > -\frac{1}{2}$. **C.** $m > -\frac{1}{4}$. **D.** $m \geq -\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) với trục hoành: $x^4 - 2(2m+1)x^2 + 4m^2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 2(2m+1)t + 4m^2 = 0$ (2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+1 > 0 \\ 4m+2 > 0 \\ 4m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m > -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$$

Khi đó, (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2 \Rightarrow$ (1) có 4 nghiệm $x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}; x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$.

Theo bài ra ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = t_1 + t_2 + t_1 + t_2 = 6$

$$\Leftrightarrow t_1 + t_2 = 3 \Leftrightarrow 4m+2 = 3 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*))}.$$

Vậy $m = \frac{1}{4}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 9. Với a là số thực tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_3 a$. B. $2\log_3 a$. C. $(\log_3 a)^2$. D. $2 + \log_3 a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3(9a) = \log_3 9 + \log_3 a = 2 + \log_3 a$.

Công thức mũ & logarit

Cho a và b là các số thực dương x và y là những số thực tùy ý.

- ① $a^n = \underbrace{a.a.a\dots a}_{n \text{ số } a}$ ⑥ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
 ② $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ⑦ $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$
 ③ $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ⑧ $[u(x)]^0 = 1, \forall u(x) \neq 0$
 ④ $a^{x \cdot y} = (a^x)^y = (a^y)^x$ ⑨ $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$.

- ① $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ ⑥ $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
 ② $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ ⑦ $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
 ③ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ⑧ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \Rightarrow \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$
 ④ $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$ ⑨ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow b = a^{\log_a b}$
 ⑤ $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ ⑩ $\log_e b = \ln b$ và $\log_{10} b = \log b$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 9.1. Cho b là số thực dương khác 1. Giá trị của $\log_b(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}})$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_b \left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \right) = \log_b (b^2) + \log_b \left(b^{\frac{1}{2}} \right) = 2\log_b b + \frac{1}{2}\log_b b = \frac{5}{2}$.

Câu 9.2. Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_a(a \cdot \sqrt[3]{a^2})$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. 3. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a^2} \right) = \log_a a + \log_a \sqrt[3]{a^2} = 1 + \frac{2}{3}\log_a a = \frac{5}{3}$.

Câu 9.3. Cho a là số thực dương khác 4. Giá trị của $\log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a^3}{64}\right)$ bằng

- A. 3. B. $\frac{1}{3}$. C. -3. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a^3}{64}\right) = \log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a^3}{4^3}\right) = \log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a}{4}\right)^3 = 3.$$

Câu 9.4. Cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Giá trị của $\log_a(x^2 y^3)$ bằng

- A. B B. 10. C. -14. D. 65.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_a(x^2 y^3) = \log_a x^2 + \log_a y^3 = 2 \log_a x + 3 \log_a y = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 10.$$

Câu 9.5. Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, giá trị của $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ bằng

- A. 18. B. 24. C. 12. D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = \log_{\frac{1}{a^2}} b^3 \cdot 4 \log_b a = 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \log_a b \cdot \log_b a = 24.$$

Câu 9.6. Cho a là số thực dương thỏa mãn $a \neq 10$, mệnh đề nào dưới đây **sai** ?

- A. $\log(10 \cdot a) = 1 + \log a$. B. $-\log\left(\frac{10}{a}\right) = \log a - 1$.
C. $\log(10^a) = a$. D. $\log(a^{10}) = a$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \log(a^{10}) = 10 \log a \neq a.$$

Câu 9.7. Với các số thực x, y dương bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

- A. $\log_2(x + y) = \log_2 x + \log_2 y$. B. $\log_2(xy) = \log_2 x \cdot \log_2 y$.
C. $\log_2\left(\frac{x^2}{y}\right) = 2 \log_2 x - \log_2 y$. D. $\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \log_2\left(\frac{x^2}{y}\right) = 2 \log_2 x - \log_2 y.$$

Câu 9.8. Cho a là một số thực dương. Khi đó $a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2}$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $a^{\frac{2}{5}}$. C. $a^{\frac{1}{15}}$. D. $a^{\frac{19}{15}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } a^{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{19}{15}}.$$

Câu 9.9. Cho các số thực x, y thỏa mãn $2^x = 3$ và $3^y = 4$. Giá trị biểu thức $8^x + 9^y$ bằng

A. 43.

B. 17.

C. 24.

D. $\log_2^3 3 + \log_3^2 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $8^x + 9^y = 2^{3x} + 3^{2y} = (2^x)^3 + (3^y)^2 = 3^3 + 4^2 = 43$.

Câu 9.10. Cho b là số thực dương khác 1. Giá trị của $\log_b(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}})$ bằng

A. $A = \sqrt[6]{ab}$.

B. $A = \sqrt[3]{ab}$.

C. $A = \frac{1}{\sqrt[3]{ab}}$.

D. $A = \frac{1}{\sqrt[6]{ab}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}}\right)}{b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{ab}$.

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y = 2^x$ là

A. $y' = 2^x \ln 2$.

B. $y' = 2^x$.

C. $y' = \frac{2^x}{\ln 2}$.

D. $y' = x \cdot 2^{x-1}$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ thì $y = 2^x$ có đạo hàm $y' = 2^x \ln 2$.

Đạo hàm của hàm số mũ và lôgarit

• $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$. • $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$. • $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.

Bài tập tương tự và phát triển

Câu 10.1. Hàm số $y = 2^{2x^2+x}$ có đạo hàm là

A. $y' = 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.

B. $y' = (4x+1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.

C. $y' = (2x^2+x) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.

D. $y' = (4x+1) \cdot \ln(2x^2+x)$.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ thì $y = 2^{2x^2+x}$ có đạo hàm $y' = (4x+1) \cdot 2^{2x^2+x} \cdot \ln 2$.

Câu 10.2. Hàm số $y = e^{1-2x}$ có đạo hàm là

A. $y' = 2e^{1-2x}$.

B. $y' = e^{1-2x}$.

C. $y' = -2e^{1-2x}$.

D. $y' = -2e^{1-2x}$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ thì $y = e^{1-2x}$ có đạo hàm $y' = -2e^{1-2x}$.

Câu 10.3. Hàm số $y = 2^{2x+3}$ có đạo hàm là

A. $y' = 2^{2x+2} \ln 4$.

B. $y' = 4^{x+2} \ln 4$.

C. $y' = 2^{2x+2} \ln 16$.

D. $y' = 2^{2x+3} \ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Theo công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ thì $y = 2^{2x+3}$ có đạo hàm
 $y' = 2 \cdot 2^{2x+3} \ln 2 = 4 \cdot 2^{2x+2} \ln 2 = 2^{2x+2} \ln 16$.

Câu 10.4. Hàm số $y = 8^{x^2+1}$ có đạo hàm là

- A.** $y' = 2x \cdot 8^{x^2}$. **B.** $y' = 2x \cdot 8^{x^2} \ln 4$. **C.** $y' = (x^2 + 1) \cdot 8^{x^2}$. **D.** $y' = 6x \cdot 8^{x^2+1} \cdot \ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ thì $y = 8^{x^2+1}$ có đạo hàm $y' = 2x \cdot 8^{x^2+1} \ln 8 = 6x \cdot 8^{x^2+1} \ln 2$.

Câu 10.5. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$ là

- A.** $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln x}$. **B.** $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$. **C.** $y' = \frac{2 \ln 2}{x+1}$. **D.** $y' = \frac{2}{(x+1) \ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ thì $y = \log_2(2x+1)$ có đạo hàm $y' = \frac{2}{(x+1) \ln 2}$.

Câu 10.6. Hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm là

- A.** $y' = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$. **B.** $y' = \frac{1}{(x^2 - 2x) \ln 2}$. **C.** $y' = \frac{(2x-2) \ln 2}{x^2 - 2x}$. **D.** $y' = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ thì $y = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm $y' = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.

Câu 10.7. Đạo hàm của hàm số $y = \log(x^2 - x)$ là

- A.** $y' = \frac{1}{(x^2 - x) \ln 10}$. **B.** $y' = \frac{2x-1}{x^2 - x}$. **C.** $y' = \frac{2x-1}{(x^2 - x) \log e}$. **D.** $y' = \frac{2x-1}{x^2 - x} \cdot \log e$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ thì $y = \log(x^2 - x)$ có đạo hàm

$$y' = \frac{2x-1}{(x^2 - x) \ln 10} = \frac{2x-1}{x^2 - x} \log e.$$

Câu 10.8. Cho hàm số $y = x^\pi$ Giá trị của $y''(1)$ bằng

- A.** $y''(1) = \ln^2 \pi$. **B.** $y''(1) = \pi \ln \pi$. **C.** $y''(1) = 0$. **D.** $y''(1) = \pi(\pi - 1)$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức $(u^\alpha)' = u' \cdot u^{\alpha-1}$ thì $y = x^\pi$ có đạo hàm $y' = \pi \cdot x^{\pi-1} \Rightarrow y'' = \pi(\pi-1) \cdot x^{\pi-2}$.

Vậy $y''(1) = \pi(\pi-1)$

Câu 10.9. Hãy tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^3}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

A. $y' = \frac{7}{6} \cdot \sqrt[6]{x}$.

B. $y' = \sqrt[6]{x}$.

C. $y' = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$.

D. $y' = \frac{6}{7\sqrt[7]{x}}$.

Lời giải

Chọn A

Theo công thức Theo công thức $(u^\alpha)' = u' \cdot u^{\alpha-1}$ thì $y = \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^3}} = x^{\frac{7}{6}}$ có đạo hàm

$$y' = \frac{7}{6} \cdot x^{\frac{7}{6}-1} = \frac{7}{6} \cdot x^{\frac{1}{6}}.$$

Câu 10.10. Đạo hàm của hàm số $y = \log_2^2(2x+1)$ là

A. $y' = \frac{2 \log_2(2x+1)}{(2x+1) \ln 2}$.

B. $y' = \frac{4 \log_2(2x+1)}{(2x+1) \ln 2}$.

C. $y' = \frac{4 \log_2(2x+1)}{2x+1}$.

D. $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$.

Lời giải

Chọn B

Theo công thức $(v^\alpha)' = \alpha \cdot v^{\alpha-1}$; $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ thì $y = \log_2^2(2x+1)$ có đạo hàm

$$y' = 2 \log_2(2x+1) (\log_2(2x+1))' = 2 \frac{2}{(2x+1) \ln 2} \cdot \log_2(2x+1) = \frac{4 \log_2(2x+1)}{(2x+1) \ln 2}.$$

Câu 11. Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

- A.** a^6 . **B.** $a^{\frac{3}{2}}$. **C.** $a^{\frac{2}{3}}$. **D.** $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

Theo công thức $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, ta có $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 11.1. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$

- A.** $P = x^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P = x^{\frac{2}{9}}$. **C.** $P = \sqrt{x}$. **D.** $P = x^2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$$

Câu 11.2. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$

- A.** $Q = b^2$. **B.** $Q = b^{\frac{5}{9}}$. **C.** $Q = b^{\frac{4}{3}}$. **D.** $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b} = b^{\frac{5}{3}} : b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{5}{3} - \frac{1}{3}} = b^{\frac{4}{3}}$.

Câu 11.3. Rút gọn biểu thức $P = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** $P = x^{\frac{1}{2}}$. **B.** $P = x^{\frac{13}{24}}$. **C.** $P = x^{\frac{1}{4}}$. **D.** $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x^2} \cdot x^{\frac{3}{2}}} = \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x^2}^{\frac{7}{2}}} = \sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{7}{6}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}} = x^{\frac{13}{24}}$

Câu 11.4. Tính giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} \cdot (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$.

- A.** $P = 1$. **B.** $P = 7 - 4\sqrt{3}$. **C.** $P = 7 + 4\sqrt{3}$. **D.** $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2016}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} \cdot (4\sqrt{3} - 7)^{2016} = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot (7 + 4\sqrt{3})^{2016} \cdot (4\sqrt{3} - 7)^{2016}$

$$P = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot \left[(7 + 4\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3} - 7) \right]^{2016} = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot \left[-(4\sqrt{3} + 7) \cdot (4\sqrt{3} - 7) \right]^{2016}$$
$$P = (7 + 4\sqrt{3}) \cdot [-1]^{2016} = (7 + 4\sqrt{3})$$

Câu 11.5. Giá trị của biểu thức $P = (1 + \sqrt{3})^{2016} \cdot (3 - \sqrt{3})^{2016}$ bằng

- A.** $P = 12^{1008}$. **B.** $P = 4^{1008}$. **C.** $P = (1 + \sqrt{3})^{1008}$. **D.** $P = (3 - \sqrt{3})^{1008}$.

Lời giải

Chọn A

$$P = (1 + \sqrt{3})^{2016} \cdot (3 - \sqrt{3})^{2016} = (1 + \sqrt{3})^{2016} \cdot [\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)]^{2016}$$

$$P = (1 + \sqrt{3})^{2016} \cdot (\sqrt{3} - 1)^{2016} \cdot (\sqrt{3})^{2016} = [(1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)]^{2016} \cdot 3^{1008}$$

$$P = (-2)^{2016} \cdot 3^{1008} = 4^{1008} \cdot 3^{1008} = 12^{1008}$$

Câu 11.6. Với a và b là hai số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{\sqrt{a}}(a\sqrt{b})$ bằng

- A. $\frac{1}{2} + \log_a b$. B. $2 + \frac{1}{2} \log_a b$. C. $2 + \log_a b$. D. $1 + 2 \log_a b$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{\sqrt{a}}(a\sqrt{b}) = \log_{\sqrt{a}} a + \log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a + \log_{a^{\frac{1}{2}}} b^{\frac{1}{2}} = 2 + \log_a b$$

Câu 11.7. Với $a, b > 0$ và $a \neq 1$, $\log_{\sqrt[3]{a}}(a^2\sqrt{b})$ bằng

- A. $\frac{1}{6} \log_a b$. B. $\frac{3}{2} \log_a b$. C. $6 + \frac{3}{2} \log_a b$. D. $\frac{3}{2} + \frac{1}{6} \log_a b$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{\sqrt[3]{a}}(a^2\sqrt{b}) = \log_{\sqrt[3]{a}} a^2 + \log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt{b} = \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^2 + \log_{a^{\frac{1}{3}}} b^{\frac{1}{2}} = 6 + \frac{3}{2} \log_a b$$

Câu 11.8. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = 10$. Giá trị của $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 10. D. -1.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b = \log a^{\frac{1}{2}} + \log b^{\frac{1}{3}} = \log a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \log \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \log 10 = 1$$

Câu 11.9. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} \cdot b^3 = 27$. Giá trị của $\log_3 a + 6 \log_3 b$ bằng

- A. 3. B. 6. C. 9. D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3 a + 6 \log_3 b = \log_3 a + \log_3 b^6 = \log_3 a b^6 = 2 \log_3 \sqrt{a} \cdot b^3 = 2 \log_3 27 = 6$$

Câu 11.10. Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{9^b}{3^a} \right) = \log_{\frac{1}{27}} \sqrt[3]{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a - 2b = \frac{1}{18}$. B. $a + 2b = \frac{1}{18}$. C. $2b - a = \frac{1}{18}$. D. $2a - b = \frac{1}{18}$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{9^b}{3^a}\right) = \log_{\frac{1}{27}}\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3^2}}\left(\frac{9^b}{3^a}\right) = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow 2\log_3\left(\frac{9^b}{3^a}\right) = -\frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{9^b}{3^a}\right) = -\frac{1}{18} \Leftrightarrow \log_3 9^b - \log_3 3^a = -\frac{1}{18} \Leftrightarrow \log_3 3^{2b} - \log_3 3^a = -\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 2b - a = -\frac{1}{18} \Leftrightarrow a - 2b = \frac{1}{18}$$

Câu 12. Nghiệm của phương trình $5^{2x-4} = 25$ là

- A. $x=3$. B. $x=2$. C. $x=1$. D. $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 5^{2x-4} = 25 \Leftrightarrow 2x-4 = \log_5 25 \Leftrightarrow x=3.$$

Bài tập tương tự

Câu 12.1. Nghiệm của phương trình $3^{2x-1} = 27$ là

- A. $x=5$. B. $x=1$. C. $x=2$. D. $x=4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 3^{2x-1} = 27 \Leftrightarrow 2x-1 = \log_3 27 \Leftrightarrow 2x-1 = 3 \Leftrightarrow x=2.$$

Câu 12.2. Nghiệm của phương trình $5^{2x+1} = 125$ là

- A. $x = \frac{3}{2}$. B. $x = \frac{5}{2}$. C. $x=1$. D. $x=3$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 5^{2x+1} = 125 \Leftrightarrow 2x+1 = \log_5 125 \Leftrightarrow 2x+1 = 3 \Leftrightarrow x=1.$$

Câu 12.3. Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} = 1$ là

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}. \text{ Vậy phương trình có hai nghiệm.}$$

Câu 12.4. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4} = 4$ là

- A. 1. B. -1. C. $\frac{5}{2}$. D. $-\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 2^{2x^2+5x+4} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 4 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tổng các nghiệm của phương trình là } -\frac{5}{2}.$$

Câu 12.5. Tích số các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7}$ bằng

- A. -1. B. 1. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $7^{x^2-x+\frac{3}{2}} = 49\sqrt{7} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3}{2} = \log_7 49\sqrt{7} \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt. Theo định lý Vi-et tích các nghiệm của phương trình là -1 .

Câu 12.6. Tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $3^{x^2-x\ln 2+1} = 4$ bằng

- A.** $1+2\log_3 2$. **B.** $1-2\log_3 2$. **C.** $1-2\ln 2$. **D.** $1+2\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3^{x^2-x\ln 2+1} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x\ln 2 + 1 = \log_3 4 \Leftrightarrow x^2 - x\ln 2 + 1 - \log_3 4 = 0$

Phương trình có $ac = 1 - \log_3 4 < 0$ nên có hai nghiệm phân biệt. Theo định lý Vi-et tích các nghiệm của phương trình là $1 - \log_3 4 = 1 - 2\log_3 2$.

Câu 12.7. Nghiệm của phương trình $3^x \cdot 5^{x-1} = 7$ là

- A.** $x = \log_{15} 35$. **B.** $x = \log_{21} 5$. **C.** $x = \log_{21} 35$. **D.** $x = \log_{15} 21$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^x \cdot 5^{x-1} = 7 \Leftrightarrow \frac{3^x \cdot 5^x}{5} = 7 \Leftrightarrow 15^x = 35 \Leftrightarrow x = \log_{15} 35$.

Câu 12.8. Nghiệm của phương trình $3^{x+5} - 3^x = 121$ là

- A.** $x = \log_2 3$. **B.** $x = -\log_3 2$. **C.** $x = \log_3 2$. **D.** $x = -\log_2 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3^{x+5} - 3^x = 121 \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^5 - 3^x = 121 \Leftrightarrow 242 \cdot 3^x = 121 \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2$.

Câu 12.9. Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $9^{x-1} = 3^{x^2-2}$. Giá trị $2^{x_1} + 3^{x_2}$ bằng

- A.** 5. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 28.

Lời giải

Chọn B

Ta có $9^{x-1} = 3^{x^2-2} \Leftrightarrow 9^{x-1} = 3^{x^2-2} \Leftrightarrow 3^{2x-2} = 3^{x^2-2} \Leftrightarrow x^2 - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0, x_2 = 2$ suy ra $2^{x_1} + 3^{x_2} = 1 + 3^2 = 10$.

Câu 12.10. Tích số các nghiệm của phương trình $(3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} = (3-2\sqrt{2})^{x^2-2}$ bằng

- A.** 0. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} = (3-2\sqrt{2})^{x^2-2} \Leftrightarrow (3+2\sqrt{2})^{x^2-x+2} = (3+2\sqrt{2})^{2-x^2}$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Tích các nghiệm của phương trình là 0.

Câu 13.1. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-5) = 4$ là

- A.** $x = 3$. **B.** $x = 13$. **C.** $x = 21$. **D.** $x = 11$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$.

Khi đó $\log_2(x-5) = 4 \Leftrightarrow x-5 = 2^4 \Leftrightarrow x = 21$ (thỏa điều kiện $x > 5$).

Vậy nghiệm của phương trình $\log_2(x-5) = 4$ là $x = 21$.

Câu 13.2. Phương trình $\log_3(x^2 - 10x + 9) = 2$ có nghiệm là

- A.** $\begin{cases} x = 10 \\ x = 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -2 \\ x = 9 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 10 \\ x = 9 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x^2 - 10x + 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ x < 1 \end{cases}$ (*).

Khi đó $\log_3(x^2 - 10x + 9) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 0 \end{cases}$ (thỏa điều kiện (*)).

Vậy phương trình $\log_3(x^2 - 10x + 9) = 2$ có nghiệm là $\begin{cases} x = 10 \\ x = 0 \end{cases}$.

Câu 13.3. Nghiệm của phương trình $\ln(4 - x) = 100$ là

- A.** $x = e^{100} - 4$. **B.** $x = 4 - 10^{100}$. **C.** $x = 4 - e^{100}$. **D.** $x = 10^{100} - 4$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$ (*).

Khi đó $\ln(4 - x) = 100 \Leftrightarrow 4 - x = e^{100} \Leftrightarrow x = 4 - e^{100}$ (thỏa điều kiện (*)).

Vậy nghiệm của phương trình $\ln(4 - x) = 100$ là $x = 4 - e^{100}$.

Câu 13.4. Nghiệm của phương trình $\log(x - 1) = 2$ là

- A.** $x = 101$. **B.** $x = e^2 + 1$. **C.** $x = e^2 - 1$. **D.** $x = \pi^2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (*).

Khi đó $\log(x - 1) = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 101$ (thỏa điều kiện (*)).

Vậy nghiệm của phương trình $\log(x - 1) = 2$ là $x = 101$.

Câu 13.5. Nghiệm của phương trình $\log 10^{100x} = 250$ thuộc khoảng

- A.** $(0; 2)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -2)$. **D.** $(-2; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log 10^{100x} = 250 \Leftrightarrow 100x \cdot \log 10 = 250 \Leftrightarrow 100x = 250 \Leftrightarrow x = \frac{250}{100} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Khi đó $x = \frac{5}{2} \in (2; +\infty)$.

Câu 13.6. Nghiệm của phương trình $\log_3(\log_2 x) = 1$ là

- A.** $x = 8$. **B.** $x = 6$. **C.** $x = 9$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$ (*).

Khi đó $\log_3(\log_2 x) = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$ (thỏa điều kiện (*)).

Vậy nghiệm của phương trình $\log_3(\log_2 x) = 1$ là $x = 8$.

Câu 13.7. Nghiệm của phương trình $\log_2(3^{3x-1} - 1) = 3$ là

- A.** $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 8$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $3^{3x-1} - 1 \Leftrightarrow 3^{3x-1} > 1 \Leftrightarrow 3x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} (*)$.

Khi đó $\log_2(3^{3x-1} - 1) = 3 \Leftrightarrow 3^{3x-1} - 1 = 2^3 \Leftrightarrow 3^{3x-1} = 9 \Leftrightarrow 3x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa điều kiện (*)).

Vậy nghiệm của phương trình $\log_2(3^{3x-1} - 1) = 3$ là $x = 1$.

Câu 13.8. Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$ là

A. $x = 4$.

B. $x = 3$.

C. $x = -2$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 (*)$.

Khi đó $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = 3x-3 \Leftrightarrow x = 4$

(thỏa điều kiện (*)).

Vậy nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1$ là $x = 4$.

Câu 13.9. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

A. $S = \{-3; 3\}$.

B. $S = \{4\}$.

C. $S = \{3\}$.

D. $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 (*)$.

Khi đó $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3 \Leftrightarrow \log_2((x-1)(x+1)) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện $x > 1$, ta có tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$ là $S = \{3\}$.

Câu 13.10. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$ là

A. $\{5\}$.

B. $\{4; 5\}$.

C. $\{4\}$.

D. $\{2; 4\}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3 (*)$.

Khi đó $\log_2(x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x = 2 \Leftrightarrow \log_2(x-3) + 2\log_4 x = 2 \Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_2 x = 2$

$\Leftrightarrow \log_2((x-3)x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện $x > 3$, ta có tập nghiệm của phương trình $\log_2(x-3) + 2\log_4 3 \cdot \log_3 x = 2$ là $\{4\}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x) dx = 3x^2 - x + C$.

B. $\int f(x) dx = x^3 - x + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$.

D. $\int f(x) dx = x^3 - C$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản thì $\int f(x) dx = \int (3x^2 - 1) dx = x^3 - x + C$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp	
1. $\int 0 dx = C$	$\longrightarrow \int k dx = kx + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
4. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\longrightarrow \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\longrightarrow \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$	$\longrightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\longrightarrow \int a^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{a^{ax+b}}{\ln a} + C$

♦ **Nhận xét.** Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$

Một số công thức cần nhớ

- Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$, $\cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a$.
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$; $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$.

Câu 14.1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- A.** $x^4 + x^2 + C$. **B.** $3x^2 + 1 + C$. **C.** $x^3 + x + C$. **D.** $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int (x^3 + x) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 14.2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2$ là

- A.** $x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x$. **B.** $x^7 + \ln|x| + \frac{1}{x} - 2x + C$.
C. $x^7 + \ln x + \frac{1}{x} - 2x + C$. **D.** $x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int \left(7x^6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2 \right) dx = x^7 + \ln|x| - \frac{1}{x} - 2x + C.$

Câu 14.3. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$ là

- A. $5^x + C.$ B. $5^x \ln 5 + C.$ C. $\frac{5^x}{\ln 5} + C.$ D. $\frac{5^{x+1}}{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$

Câu 14.4. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{5x}$ là

- A. $e^{5x} \ln 5 + C.$ B. $\frac{1}{5} e^{5x} + C.$ C. $5e^{5x} + C.$ D. $e^{5x} + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$

Câu 14.5. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{4x-3}$ là

- A. $2 \ln \left(2x - \frac{3}{2} \right) + C.$ B. $\frac{1}{2} \ln \left| 2x - \frac{3}{2} \right| + C.$ C. $\frac{1}{2} \ln \left(2x - \frac{3}{2} \right) + C.$ D. $\frac{1}{4} \ln |4x-3| + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \frac{2}{4x-3} dx = 2 \cdot \frac{1}{4} \ln |4x-3| + C = \frac{1}{2} \ln |4x-3| + C.$

Câu 14.6. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ thỏa mãn $F(1) = 4$ là

- A. $x^3 - x^2 + 5x - 3.$ B. $x^3 + x^2 + 5x - 3.$ C. $x^3 + x^2 - 5x + 3.$ D. $x^3 + x^2 + 5x + 3.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int (3x^2 + 2x + 5) dx = x^3 + x^2 + 5x + C.$

$F(1) = 4 \Rightarrow 1 + 1 + 5 + C = 4 \Rightarrow C = -3$

$\Rightarrow F(x) = x^3 + x^2 + 5x - 3$

Câu 14.7. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1)^8$ là

- A. $\frac{(2x-1)^9}{9} + C.$ B. $\frac{(1-2x)^9}{18} + C.$ C. $\frac{(2x-1)^9}{18} + C.$ D. $\frac{(1-2x)^9}{9} + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (2x-1)^8 dx = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^9}{9} + C = \frac{(2x-1)^9}{18} + C.$

Câu 14.8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x$ là

- A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C.$ B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C.$ C. $84^x + C.$ D. $84^x \cdot \ln 84 + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x dx = \int (4 \cdot 3 \cdot 7)^x dx = \int 84^x dx = \frac{84^x}{\ln 84} + C.$

Câu 14.9. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+3}$ là

- A. $\frac{2}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$. B. $\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$.
 C. $-\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3} + C$. D. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+3} + C$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \int \sqrt{2x+3} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2x+3)\sqrt{2x+3} + C = \frac{1}{3} (2x+3)\sqrt{2x+3} + C.$$

Câu 14.10. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ là

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C$. B. $\sqrt{2x+1} + C$.
 C. $2\sqrt{2x+1} + C$. D. $\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } \int \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{2} \int (2x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2x+1} + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x+1} + C.$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. B. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + C$.
 C. $\int f(x) dx = 2 \sin 2x + C$. D. $\int f(x) dx = -2 \sin 2x + C$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Áp dụng công thức nguyên hàm cơ bản ta có } \int f(x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

Câu 15.1 Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ là

- A. $-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$. B. $\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$.
 C. $\cos 2x + \sin 3x + C$. D. $-\cos 2x - \sin 3x + C$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (\sin 2x - \cos 3x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

Câu 15.2 Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos 2x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ là

- A. $\frac{1}{2} \sin 2x + 2\pi$. B. $x + \sin 2x + \frac{3\pi}{2}$. C. $\sin x + 2\pi$. D. $2x + 2\pi$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có $\int f(x)dx = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Vì $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + C = 2\pi \Leftrightarrow C = 2\pi$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 2\pi$.

Câu 15.3 Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cos x$ là

- A.** $\frac{1}{4} \cos 2x + C$. **B.** $-\frac{1}{4} \cos 2x + C$. **C.** $\sin 2x + C$. **D.** $-\sin x \cos x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ do đó $\int f(x)dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$.

Câu 15.4 Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 4\cos^2 x - 5$ thỏa $F(\pi) = 0$. Hàm số $F(x)$ là

- A.** $-3x + \sin 2x + 3\pi$. **B.** $\frac{4}{3} \cos^3 x - 5x + \frac{4}{3} + 5\pi$.
C. $-3x - \sin 2x + 3\pi$. **D.** $\frac{4}{3} \sin^3 x - 5x + 5\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x) = 4\cos^2 x - 5 = 2\cos 2x - 3$ do đó $\int f(x)dx = \int (2\cos 2x - 3)dx = \sin 2x - 3x + C$.

Vì $F(\pi) = 0$ nên ta có $-3\pi + C = 0 \Leftrightarrow C = 3\pi$.

Vậy $F(x) = -3x + \sin 2x + 3\pi$.

Câu 15.5 Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x \sin 2x$ là

- A.** $\frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos 7x}{14} + C$. **B.** $\frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 7x}{14} + C$.
C. $\frac{\cos 3x}{6} + \frac{\cos 7x}{14} + C$. **D.** $\frac{\sin 3x}{6} - \frac{\cos 7x}{14} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \sin 5x \sin 2x = \frac{1}{2} (\cos 3x - \cos 7x)$ do đó

$\int f(x)dx = \frac{1}{2} \int (\cos 3x - \cos 7x)dx = \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C$.

Vậy $F(x) = \frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 7x}{14} + C$.

Câu 15.6 Họ nguyên hàm hàm số $f(x) = \sin 5x \cos x$ là

- A.** $-\frac{1}{5} \cos 5x + C$. **B.** $\frac{1}{5} \cos 5x + C$.

C. $-\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$

D. $\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{12} \cos 6x + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \sin 5x \cos x = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x)$ do đó

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} \int (\sin 6x + \sin 4x) dx = -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x + C.$$

Vậy $F(x) = -\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 4x + C.$

Câu 15.7 Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là

A. $\tan x + C.$

B. $\tan x - x + C.$

C. $x - \tan x + C.$

D. $\tan x + x + C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\tan^2 x = \tan^2 x + 1 - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ do đó $\int \tan^2 x dx = \tan x - x + C.$

Câu 15.8 Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

A. $-\cos x + \tan x + C.$

B. $-\cos x + \tan x - \sqrt{2} + 1.$

C. $\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$

D. $-\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(\tan x - \cos x)' = \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$ do đó $\int \left(\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx = \tan x - \cos x + C.$

Vì $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $C = \sqrt{2} - 1.$

Vậy $F(x) = -\cos x + \tan x + \sqrt{2} - 1.$

Câu 15.9 Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Khi đó hàm số $f(x)$ là

A. $\frac{x^2}{2} - \cos x + 2.$

B. $\frac{x^2}{2} - \cos x - 2.$

C. $\frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}.$

D. $\frac{x^2}{2} + \cos x.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = x + \sin x$ suy ra $f(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + C.$

Ta có $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 2.$

Vậy $F(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x + 2.$

Câu 15.10 Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 + \cos 2x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $f(0) = \pi$.

B. $f(x) = 2x + \frac{\sin 2x}{2} + \pi$.

C. $f(x) = 2x - \frac{\sin 2x}{2} + \pi$.

D. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 2 + \cos 2x$ suy ra $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Ta có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + C = 2\pi \Leftrightarrow C = \pi$.

Do đó $f(x) = 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + \pi$ vậy $\begin{cases} f(0) = \pi \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$ suy ra phương án sai là C.

Câu 16. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 5$ và $\int_2^3 f(x)dx = -2$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 3.

B. 7.

C. -10.

D. -7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: Ta có $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = 5 - 2 = 3$.

Tính chất của nguyên hàm và tích phân

- $F'(x) = f(x), \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.
- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx, \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
- $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(x)dx = \dots$
- $\int_a^b f'(x)dx = f(x)|_a^b, \int_a^b f''(x)dx = f'(x)|_a^b \dots$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 16.1. Cho $\int_1^3 f(x)dx = 2016$ và $\int_3^4 f(x)dx = 2017$, khi đó $\int_1^4 f(x)dx$ bằng

A. 4023.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^4 f(x)dx = \int_1^8 f(x)dx - \int_4^8 f(x)dx = 2016 - 2017 = -1$.

Câu 16.2. Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^2 [4f(x) - 3]dx$ bằng

- A. 8. B. 4. C. 2. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^2 [4f(x) - 3]dx = 4 \int_0^2 f(x)dx - \int_0^2 3dx = 4 \cdot 3 - 3x|_0^2 = 6$

Câu 16.3. Nếu $\int_0^9 f(x)dx = 37$ và $\int_9^0 g(x)dx = 16$ thì $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]dx$ bằng

- A. 58. B. 143. C. 26. D. 122.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]dx = 2 \int_0^9 f(x)dx + 3 \int_0^9 g(x)dx = 2 \cdot 37 - 3 \cdot 16 = 26$.

Câu 16.4 Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = -2$ thì $\int_0^2 [2x + f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

- A. 18. B. 5. C. 3. D. 11.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^2 [2x + f(x) - 2g(x)]dx = x^2|_0^2 + \int_0^2 f(x)dx - 2 \int_0^2 g(x)dx = 4 + 3 + 4 = 11$.

Câu 16.5 Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2;3]$, đồng thời $f(2) = 2$ và $f(3) = 5$. Khi đó

giá trị của tích phân $\int_2^3 f'(x)dx$ bằng

- A. -3. B. 7. C. 10. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_2^3 f'(x)dx = f(x)|_2^3 = f(3) - f(2) = 5 - 2 = 3$.

Câu 16.6 Cho hàm $f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên $[-1;3]$, $f(-1) = 3$ và $\int_{-1}^3 f'(x)dx = 10$. Giá trị của $f(3)$

bằng

- A. -13. B. -7. C. 13. D. 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $10 = \int_{-1}^3 f'(x)dx = f(x)|_{-1}^3 = f(3) - f(-1) = f(3) - 3 \Rightarrow f(3) = 13$.

Câu 16.7 Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 6$. Khi đó $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

- A. 8. B. 12. C. 36. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 2 + 6 = 8.$

Câu 16.8 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{ khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{ khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7}{2}.$

B. $\frac{5}{2}.$

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x)dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_1^2 \\ &= 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Câu 16.9 Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, nếu $\int_a^d f(t)dt = 5$ và $\int_b^d f(u)du = 2$ thì $\int_a^b f(x)dx$ bằng

A. 3.

B. 7.

C. 5.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2 = \int_b^d f(u)du = -\int_d^b f(u)du = -\int_d^b f(x)dx \Rightarrow \int_d^b f(x)dx = -2.$

$$\int_a^d f(t)dt = 5 \Rightarrow \int_a^d f(x)dx = 5.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx = 5 - 2 = 3.$$

Câu 16.10 Nếu $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$ và $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6$ thì $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 8.

B. 9.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx + 3\int_1^3 g(x)dx = 10 \quad (1).$

$$\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 2\int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx = 6 \Rightarrow 6\int_1^3 f(x)dx - 3\int_1^3 g(x)dx = 18 \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra $\int_1^3 f(x)dx = 4$ và $\int_1^3 g(x)dx = 2.$

$$\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 4 + 2 = 6.$$

Câu 17. Tích phân $\int_1^3 x^3 dx$ bằng

A. $\frac{15}{3}.$

B. $\frac{17}{4}.$

C. $\frac{7}{4}.$

D. $\frac{15}{4}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{2^4 - 1^4}{4} = \frac{15}{4}.$$

Câu 17.1. Với m là tham số thực, ta có $\int_1^2 (2mx+1)dx = 4$. Khi đó m thuộc tập nào sau đây?

- A. $(-3; -1)$. B. $[-1; 0)$. C. $[0; 2)$. D. $[2; 6)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^2 (2mx+1)dx = (mx^2 + x) \Big|_1^2 = 3m+1. \text{ Theo đề bài } 3m+1=4 \Leftrightarrow m=1. \text{ Vậy chọn C.}$$

Câu 17.2. Tích phân $\int_1^2 e^{3x-1}dx$ bằng

- A. $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$. B. $\frac{1}{5}e^5 - e^2$. C. $e^5 - e^2$. D. $e^5 + e^2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_1^2 e^{3x-1}dx = \frac{1}{3}e^{3x-1} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(e^5 - e^2).$$

Câu 17.3. Tích phân $\int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

- A. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$. B. $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$. C. $2^{2018} - 1$. D. 2^{2018} .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^{2018} 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^{2018} = \frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}.$$

Câu 17.4. Tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

- A. $2 \ln \frac{7}{5}$. B. $\frac{1}{2} \ln 35$. C. $\ln \frac{7}{5}$. D. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2} \ln |2x+3| \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}.$$

Câu 17.5. Giả sử $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó giá trị của $a - b$ bằng

- A. $-\frac{1}{6}$. B. 0 . C. $-\frac{3}{10}$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}; b = \frac{1}{3}. \text{ Do đó } a - b = 0.$$

Câu 17.6. Biết $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \frac{\sqrt{a}}{3} - \frac{b}{c}$ với $a > 0$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $a + b^2 + c^3$ bằng

- A. 32. B. 63. C. 96. D. 134.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{32}}{3} - \frac{2}{3} \Rightarrow a=32, b=2, c=3$. Do đó $a+b^2+c^3=63$.

Câu 17.7. Nếu $\int_{-4}^{-2} \frac{3}{\sqrt{1-3x}} dx = a\sqrt{13} + b\sqrt{7}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ thì $2a^2 - b^3$ bằng

- A.** 13. **B.** 29. **C.** -5. **D.** -13.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_{-4}^{-2} \frac{3}{\sqrt{1-3x}} dx = \int_{-4}^{-2} 3 \cdot (1-3x)^{-\frac{1}{2}} dx = 3 \cdot 2 \cdot \frac{-1}{3} \cdot (1-3x)^{\frac{1}{2}} \Big|_{-4}^{-2} = -2\sqrt{1-3x} \Big|_{-4}^{-2} = -2\sqrt{7} + 2\sqrt{13}$.

Suy ra $a=2; b=-2 \Rightarrow 2a^2 - b^3 = 16$.

(không giống đáp án trong file)

Câu 17.8. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=2$ và $f'(x) = (e^{-x}+1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A.** $1 + \frac{1}{2} \ln 2$. **B.** $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$. **C.** $e - \frac{1}{2}$. **D.** $e + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = (e^{-x}+1)e^x \Rightarrow f'(x) = 1 + e^x$.

Mà $\int (1+e^x) dx = x + e^x + C$ suy ra $f(x) = x + e^x + C$, do $f(0)=2 \Rightarrow C=1$. Vì vậy

$f(x) = x + e^x + 1$, suy ra $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x + x + 1) dx = \left(e^x + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = e + \frac{1}{2}$.

Câu 17.9. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=1$ và $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

- A.** $1 + \frac{1}{2} \ln 2$. **B.** $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{1}{2} \ln 3$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Mà $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ suy ra $f(x) = \tan x + C$, do $f(0)=1 \Rightarrow C=1$. Vì vậy

$f(x) = \tan x + 1$, suy ra

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = (-\ln |\cos x| + x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$.

Câu 17.10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{ khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{ khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Khi đó $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

- A.** $6 + \ln 4$. **B.** $4 + \ln 4$. **C.** $6 + \ln 2$. **D.** $2 + 2 \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx + \int_1^3 (2x-1) dx = 2 \ln |x+1| \Big|_0^1 + (x^2 - x) \Big|_1^3 = 6 + \ln 4$

CÂU 18 ĐỀ THAM KHẢO TN THPT 2021

Câu 18.1. Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

A. $\bar{z} = -2 + i$.

B. $\bar{z} = -2 - i$.

C. $\bar{z} = 2 - i$.

D. $\bar{z} = 2 + i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\bar{z} = \overline{(a+bi)} = a-bi$ nên $\bar{z} = 2-i$.

Câu 18.2. Tìm số phức liên hợp của $z = i(3i+1)$.

A. $3-i$.

B. $-3+i$.

C. $3+i$.

D. $-3-i$.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z = i(3i+1) = 3i^2 + i = -3+i$.

Ta có $\bar{z} = \overline{(a+bi)} = a-bi$ nên $\bar{z} = -3-i$.

Câu 18.3. Số phức liên hợp của $z = (1-i)(3+2i)$ là

A. $1+i$.

B. $5+i$.

C. $5-i$.

D. $1-i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $z = (1-i)(3+2i) = 3+2i-3i-2i^2 = 3-i+2 = 5-i$.

Ta có $\bar{z} = \overline{(a+bi)} = a-bi$ nên $\bar{z} = 5+i$.

Câu 18.4. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{z}{3+2i} = 1-i$. Tìm số phức liên hợp $\bar{z}$.

A. $-5-i$.

B. $1-5i$.

C. $5+i$.

D. $-1+5i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $\frac{z}{3+2i} = 1-i \Rightarrow z = (3+2i)(1-i) = 3-3i+2i-2i^2 = 5-i$.

Ta có $\bar{z} = \overline{(a+bi)} = a-bi$ nên $\bar{z} = 5+i$.

Câu 18.5. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{(i-1)z+2}{1-2i} = 2+3i$. Đặt $\bar{z} = a+bi$, khi đó $a+b$ bằng

A. -1 .

B. 1 .

C. -6 .

D. 6 .

Lời giải

Chọn A

Số phức $\frac{(i-1)z+2}{1-2i} = 2+3i \Rightarrow (i-1)z+2 = (2+3i)(1-2i)$

$$\Leftrightarrow (i-1)z+2 = 8-i \Leftrightarrow (i-1)z = 6-i \Leftrightarrow z = \frac{6-i}{i-1} = \frac{(6-i)(i+1)}{i^2-1} = \frac{5i+7}{-2} = -\frac{7}{2} - \frac{5}{2}i$$

Ta có $\bar{z} = \overline{(a+bi)} = a-bi$ nên $\bar{z} = -\frac{7}{2} + \frac{5}{2}i$ nên $a = -\frac{7}{2}, b = \frac{5}{2} \Rightarrow a+b = -1$.

Câu 18.6. Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 14-2i$. Biết $\bar{z} = a+bi$. Giá trị của $a+b$ bằng.

A. -4 .

B. 14 .

C. 4 .

D. -14 .

Lời giải

Chọn B

Số phức $(1+i)z = 14-2i \Leftrightarrow z = \frac{14-2i}{1+i} = \frac{(14-2i)(1-i)}{1-i^2} = \frac{12-16i}{2} = 6-8i$

Ta có $\bar{z} = \overline{(a+bi)} = a-bi$ nên $\bar{z} = 6+8i$ nên $a = 6, b = 8 \Rightarrow a+b = 14$.

Câu 18.7. Cho số phức $z = 2+i$. Tìm $|z|$.

A. $|z| = 3$.

B. $|z| = 5$.

C. $|z| = 2$.

D. $|z| = \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z = 2 + i$ có môđun là $|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Câu 18.8. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$.

- A.** $|z| = \sqrt{34}$. **B.** $|z| = 34$. **C.** $|z| = \frac{5\sqrt{34}}{3}$. **D.** $|z| = \frac{\sqrt{34}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Số phức } z(2-i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z(2-i) = 1 - 13i \Leftrightarrow z = \frac{1-13i}{2-i} = \frac{(1-13i)(2+i)}{4-i^2} = \frac{15-25i}{5} = 3-5i$$

$$\text{Số phức } z = 3-5i \text{ có môđun là } |z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}.$$

Câu 18.9. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm môđun của số phức $w = (1+i)z - \bar{z}$

- A.** $|w| = 3$. **B.** $|w| = 5$. **C.** $|w| = -4$. **D.** $|w| = \sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \bar{z} = 2 + 3i$$

$$\text{Số phức } w = (1+i)z - \bar{z} = (1+i)(2-3i) - (2+3i) = (5-i) - (2+3i) = 3-4i$$

$$\text{Số phức } w = 3-4i \text{ có môđun là } |w| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Câu 18.10. Tìm tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa điều kiện $3x + yi = 2y + 1 + (2-x)i$.

- A.** $(1; 1)$. **B.** $(1; 1), (0; -1)$. **C.** $(1; 0), (-1; -1)$. **D.** $(-1; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Từ điều kiện: $3x + yi = 2y + 1 + (2-x)i$, đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases} 3x = 2y + 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy cặp số thực thỏa mãn là $(x; y) = (1; 1)$.

CÂU 19 ĐỀ THAM KHẢO TN THPT 2021

Câu 19. Cho hai số phức $z = 3 + i$ và $w = 2 + 3i$. Số phức $z - w$ bằng

- A.** $1 + 4i$. **B.** $1 - 2i$. **C.** $5 + 4i$. **D.** $5 - 2i$.

Lời giải tham khảo

Chọn B

$$\text{Ta có } z - w = 3 + i - (2 + 3i) = 1 - 2i.$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ MỞ RỘNG

Câu 19.1. Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (1 + 3i) = 3 + 4i.$$

Suy ra phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng 3.

Câu 19.2. Cho hai số phức $z = 1 + 2i$ và $w = 2 + i$. Hỏi số phức $u = z \cdot \bar{w}$ có đặc điểm nào?

- A.** Phần thực là 4 và phần ảo là 3. **B.** Phần thực là 0 và phần ảo là 3.
C. Phần thực là 0 và phần ảo là $3i$. **D.** Phần thực là 4 và phần ảo là $3i$.

Lời giải

Chọn A

$$u = z \cdot \bar{w} = (1+2i) \cdot (2-i) = 2-i+4i-2i^2 = 4+3i.$$

Suy ra số phức u có phần thực là 4 và phần ảo là 3.**Câu 19.3.** Cho hai số phức $z_1 = 1-3i$ và $z_2 = -2-5i$. Phần ảo của số phức $z_1 - z_2$ bằng

- A. -2. B. 2. C. 3. D. -3.

Lời giải

Chọn B

$$z_1 - z_2 = (1-3i) - (-2-5i) = 3+2i.$$

Suy ra phần ảo của số phức $z_1 - z_2$ bằng 2.**Câu 19.4.** Cho hai số phức $z_1 = 5-7i$ và $z_2 = 2+3i$. Tính số phức $z = z_1 + z_2$.

- A. $z = 7-4i$. B. $z = 2+5i$. C. $z = -2+5i$. D. $z = 3-10i$.

Lời giải

Chọn A

$$z = z_1 + z_2 = (5-7i) + (2+3i) = 7-4i.$$

Câu 19.5. Cho hai số phức $z = 1+3i$ và $w = 2-i$. Phần ảo của số phức $u = \bar{z} \cdot w$ bằng

- A. -7. B. 5i. C. 5. D. -7i.

Lời giải

Chọn A

$$u = \bar{z} \cdot w = (1-3i) \cdot (2-i) = 2-i-6i+3i^2 = -1-7i.$$

Suy ra phần ảo của số phức $u = \bar{z} \cdot w$ bằng -7.**Câu 19.6.** Cho số phức $z = 3+2i$. Phần thực của số phức z^2 bằng

- A. 9. B. 12. C. 5. D. 13.

Lời giải

Chọn C

$$z^2 = (3+2i)^2 = 9+12i+4i^2 = 5+12i.$$

Suy ra phần thực của số phức z^2 bằng 5.**Câu 19.7.** Cho số phức $z = 1-2i$. Phần thực của số phức $w = z^3 - \frac{2}{z} + z \cdot \bar{z}$ là

- A. $-\frac{33}{5}$. B. $-\frac{31}{5}$. C. $-\frac{32}{5}$. D. $\frac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$w = z^3 - \frac{2}{z} + z \cdot \bar{z} = (1-2i)^3 - \frac{2}{1-2i} + (1-2i)(1+2i)$$

$$= (-11+2i) - \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \right) + 5 = -\frac{32}{5} + \frac{6}{5}i.$$

Suy ra phần thực của số phức w bằng $-\frac{32}{5}$.**Câu 19.8.** Cho số phức z thỏa $(1+i)\bar{z} - 1 - 3i = 0$. Phần ảo của số phức $w = 1-iz + z$ bằng

- A. 1. B. -3. C. -2. D. -1.

Lời giải

Chọn B

$$(1+i)\bar{z}-1-3i=0 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1+3i}{1+i}=2+i.$$

Suy ra số phức $z=2-i$. Do đó số phức $w=1-iz+z=1-i(2-i)+2-i=2-3i$.

Vậy phần ảo của số phức $w=1-iz+z$ bằng -3 .

Câu 19.9. Tìm phần thực a và phần ảo b của số phức $z=(1+i)^{10}$.

- A.** $a=0, b=32$. **B.** $a=0, b=32i$. **C.** $a=0, b=-32$. **D.** $a=32, b=0$.

Lời giải

Chọn A

$$z=(1+i)^{10}=\left[(1+i)^2\right]^5=(1+2i+i^2)^5=2^5 \cdot i^5=32i.$$

Suy ra phần thực $a=0$ và phần ảo $b=32$.

Câu 19.10. Cho số phức $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1+i)z+2\bar{z}=3+2i$. Giá trị $a+b$ bằng

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}(1+i)z+2\bar{z}=3+2i &\Leftrightarrow (1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i \\ &\Leftrightarrow (a-b+2a)+(a+b-2b)i=3+2i.\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 3a-b=3 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy giá trị $a+b$ bằng -1 .

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $3-2i$ có tọa độ là

- A.** $(2;3)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(3;2)$. **D.** $(3;-2)$.

Lời giải

Điểm biểu diễn của $z=a+bi$ có tọa độ là $(a;b)$ nên $3-2i$ biểu diễn bởi $(3;-2)$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 20.1. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=3-2i$?

- A.** $P(-3;2)$. **B.** $Q(2;-3)$. **C.** $N(3;-2)$. **D.** $M(-2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Điểm biểu diễn của $z=a+bi$ có tọa độ là $(a;b)$ nên $z=3-2i$ biểu diễn bởi $N(3;-2)$.

Câu 20.2. Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1;2)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Phần thực của z bằng

- A.** 1 . **B.** 2 . **C.** -2 . **D.** -1 .

Lời giải

Chọn D

Điểm biểu diễn của $z=a+bi$ có tọa độ là $(a;b)$ với phần thực là a nên phần thực của z bằng -1 .

Câu 20.3. Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng

- A.** 1 . **B.** -3 . **C.** -1 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn B

Điểm biểu diễn của $z = a + bi$ có tọa độ là $(a; b)$ với phần thực là a nên phần thực của z bằng -3 .

Câu 20.4. Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

- A. $(5; -1)$. B. $(-1; 5)$. C. $(5; 0)$. D. $(0; 5)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $w = 2z_1 + z_2 = 5 - i$ có điểm biểu diễn là $(5; -1)$.

Câu 20.5. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 + i$. Trên mặt phẳng Oxy , điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là

- A. $(2; 5)$. B. $(3; 5)$. C. $(5; 2)$. D. $(5; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $w = z_1 + 2z_2 = 5 + 3i$ có điểm biểu diễn là $(5; 3)$.

Câu 20.6. Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là

- A. $(4; -1)$. B. $(-1; 4)$. C. $(4; 1)$. D. $(1; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $w = 3z_1 + z_2 = 4 - i$ có điểm biểu diễn là $(4; -1)$.

Câu 20.7. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

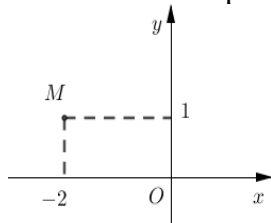
- A. $P(-3; 4)$. B. $Q(5; 4)$. C. $N(4; -3)$. D. $M(5; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$ có điểm biểu diễn là $P(-3; 4)$.

Câu 20.8. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



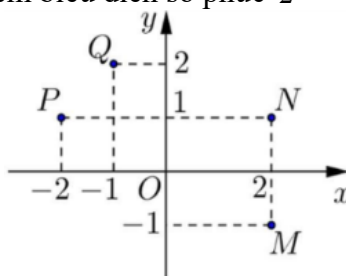
- A. $z = -2 + i$. B. $z = 1 - 2i$. C. $z = 2 + i$. D. $z = 1 + 2i$.

Lời giải

Chọn A

Điểm biểu diễn của $z = a + bi$ có tọa độ là $(a; b)$ nên $M(-2; 1)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = -2 + i$.

Câu 20.9. Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

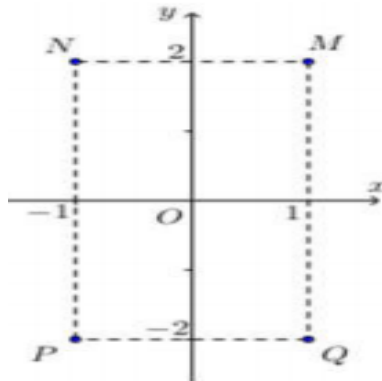


- A. N . B. P . C. M . D. Q .

Lời giải**Chọn D**

Điểm biểu diễn của $z = a + bi$ có tọa độ là $(a; b)$ nên $z = -1 + 2i$ biểu diễn bởi $Q(-1; 2)$.

Câu 20.10. Cho số phức z thỏa $(1+i)z = 3-i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm sau?



A. Điểm P .

B. Điểm Q .

C. Điểm M .

D. Điểm N .

Lời giải**Chọn B**

Ta có $(1+i)z = 3-i \Rightarrow z = \frac{3-i}{1+i} = 1-2i$ nên $z = 1-2i$ biểu diễn bởi $Q(1; -2)$.

Câu 21. Một khối chóp có diện tích đáy bằng 6 và chiều cao bằng 5. Thể tích của khối chóp đó bằng

- A. 10. B. 30. C. 90. D. 15.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S.h$ với S là diện tích đáy, h là chiều cao nên $V = \frac{6 \times 5}{3} = 10$.

Câu 21.1. Cho tứ diện $O.ABC$ có các cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau. Biết $OA = 2\text{cm}$, $OB = 3\text{cm}$, $OC = 6\text{cm}$. Thể tích của khối tứ diện $O.ABC$ bằng

- A. 6cm^3 . B. 36cm^3 . C. 12cm^3 . D. 18cm^3 .

Lời giải

Chọn A

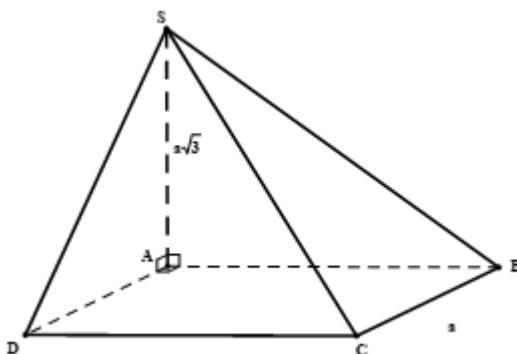
Thể tích khối tứ diện là $V = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}2.3.6 = 6$

Câu 21.2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Đáy là hình vuông cạnh a . có diện tích $S = a^2$

Chiều cao $SA = a\sqrt{3}$.

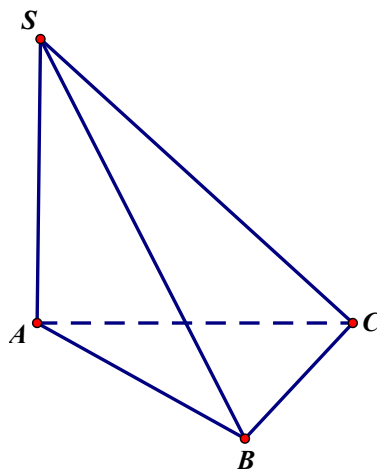
Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}a^2.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 21.3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{3a^3}{8}$. D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Đáy là tam giác đều cạnh a , có diện tích $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Chiều cao $SA = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$

Câu 21.4. Cho $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{3a^3}{2}$.

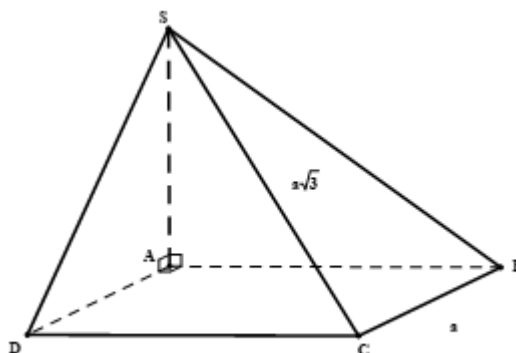
B. $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Đáy là hình vuông cạnh a , có diện tích $S = a^2$

Chiều cao $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}a^2 \cdot a = \frac{a^3}{3}$

Câu 21.5. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và hai mặt bên (SAB) , (SAC) cùng vuông góc với đáy. Biết $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$.

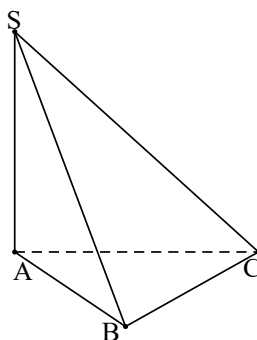
B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Đáy là tam giác đều cạnh a . có diện tích $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Hai mặt bên (SAB) , (SAC) cùng vuông góc với đáy nên đường cao là SA

$$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp là } V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$$

Câu 21.6. Thể tích của khối tứ diện đều có cạnh là 3 bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

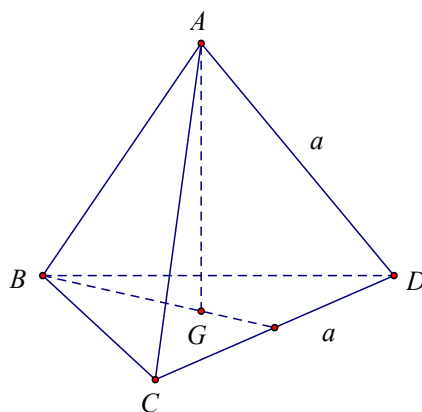
B. $2\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi tứ diện đều cạnh 3 là $ABCD$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Ta có: $AG \perp (ABC)$.

$$\text{Xét } \triangle ABG \text{ vuông tại } G, \text{ ta có: } AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}.$$

$$\text{Thể tích của khối tứ diện đều là: } V = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot AG = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 21.7. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

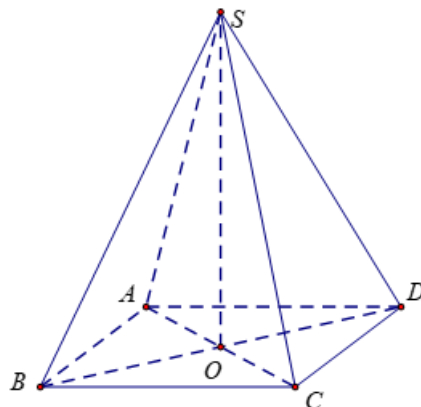
B. $\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

C. $\frac{\sqrt{14}a^3}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{14}a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Đáy là hình vuông cạnh a , có diện tích $S = a^2$

$$\text{Chiều cao } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp là } V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{14}}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}$$

Câu 21.8. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{\sqrt{35}a^3}{24}$.

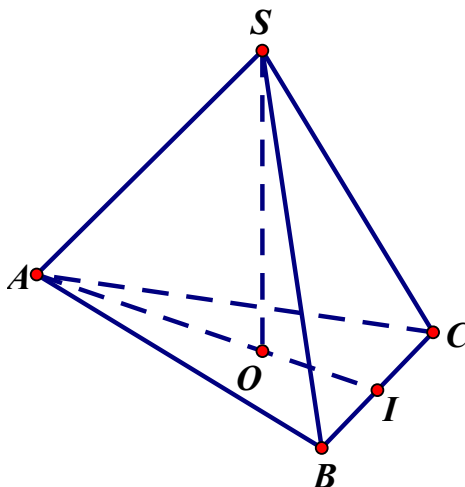
B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Đáy là tam giác đều cạnh } a, \text{ có diện tích } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Chiều cao $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$. Thể tích khối chóp là

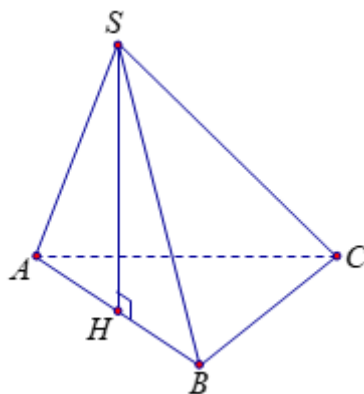
$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Câu 21.9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác SAB vuông cân tại S . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó:
$$\begin{cases} SH \perp AB \\ (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$$

Vì $\triangle SAB$ vuông cân tại S nên $SH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

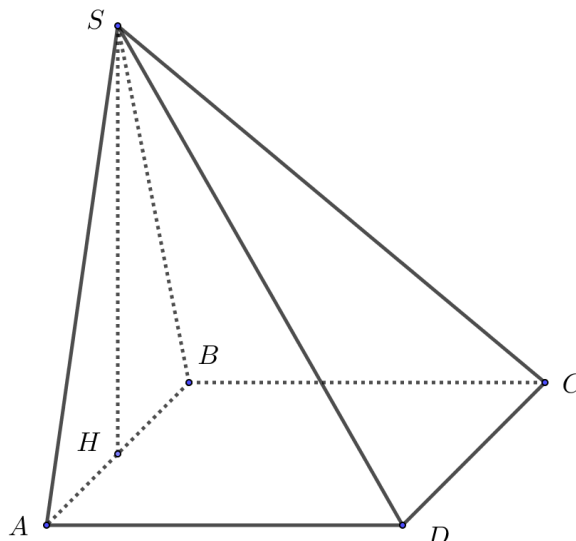
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 21.10. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $3a$. Tam giác SAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Thể tích hình chóp đã cho bằng

- A. $9a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $9a^3$. D. $\frac{9a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó:
$$\begin{cases} SH \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

Vì $\triangle SAB$ vuông cân tại S nên $SH = \frac{1}{2}AB = \frac{3a}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3} \cdot (3a)^2 \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9a^3}{2}$.

Câu 22. Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước 2; 3; 7 bằng

A. 14.

B. 42.

C. 126.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

Thể tích cần tìm là $V = 2 \times 3 \times 7 = 42$.

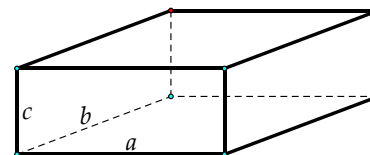
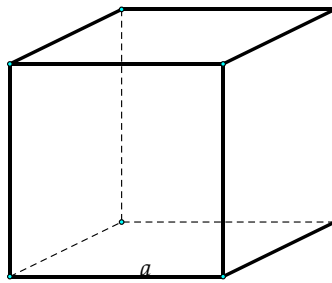
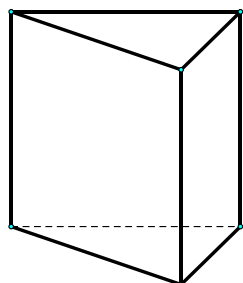
Thể tích khối lăng trụ, hộp chữ nhật và lập phương

Thể tích của khối lăng trụ $V = B.h$ với B là diện tích đáy và h là chiều cao.

Đặc biệt:

+ Thể tích khối hộp chữ nhật $V = abc$ với a là chiều dài, b là chiều rộng và c là chiều cao.

+ Thể tích khối lập phương $V = a^3$ với a là cạnh.



Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 22.1. Thể tích khối lập phương có cạnh $3a$ là

A. $2a^3$.

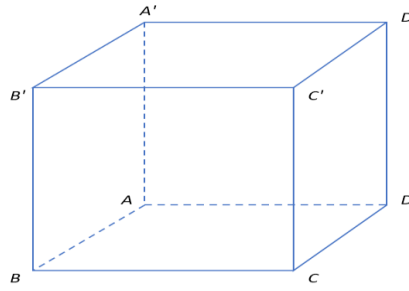
B. $27a^3$.

C. $8a^3$.

D. $3a^3$.

Lời giải

Chọn B

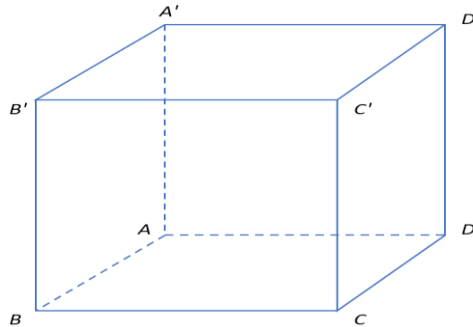


Thể tích cần tìm là $V = (3a)^3 = 27a^3$.

Câu 22.2. Diện tích toàn phần của một khối lập phương là 150 cm^2 . Thể tích của khối lập phương bằng
A. 125 cm^3 . **B.** 100 cm^3 . **C.** 25 cm^3 . **D.** 75 cm^3 .

Lời giải

Chọn A



Gọi a là cạnh của hình lập phương.

Diện tích toàn phần của hình lập phương là: $S_{tp} = 6.a^2$

Ta có phương trình: $6.a^2 = 150 \Leftrightarrow a = 5$

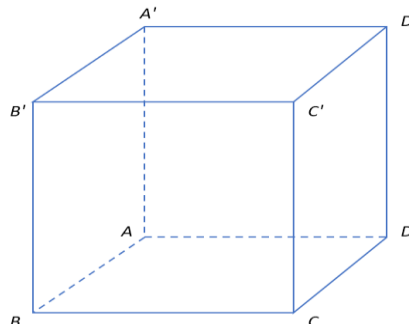
Thể tích cần tìm là $V = (5)^3 = 125$.

Câu 22.3. Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích V . Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $V = AB.BC.AA'$. **B.** $V = \frac{1}{3} AB.BC.AA'$. **C.** $V = AB.AC.AA'$. **D.** $V = AB.AC.AD$.

Lời giải

Chọn A



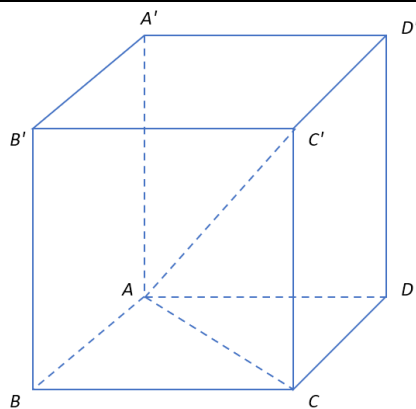
Thể tích cần tìm là $V = AB.AD.AA' = V = AB.BC.AA'$.

Câu 22.4. Tính thể tích của khối chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng $AB = a$, $AD = 2a$, $AC' = a\sqrt{14}$.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{3}$. **B.** $2a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** $a^3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$.

Do đó $AA' = \sqrt{(AC')^2 - AC^2} = 3a$.

Thể tích cần tìm là $V = AB \cdot AD \cdot AA' = a \cdot 2a \cdot 3a = 6a^3$.

Câu 22.5. Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

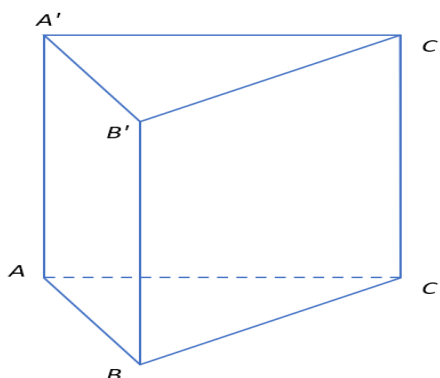
B. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Đáy là tam giác đều có cạnh là 3 nên có diện tích bằng $S = 3^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích cần tìm là $V = S \cdot h = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Câu 22.6. Thể tích của khối lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh là a bằng

A. $3a^3$.

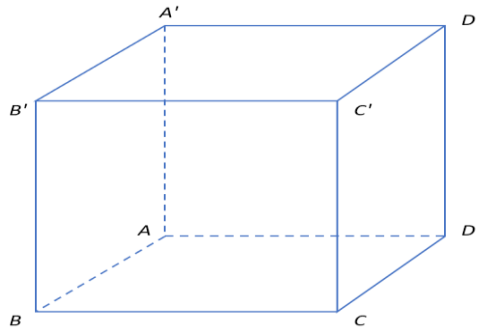
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Lăng trụ tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là hình lập phương có cạnh bằng a

Thể tích cần tìm là $V = a^3$.

Câu 22.7. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{2}$.

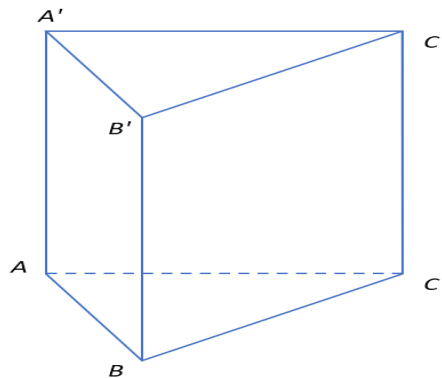
B. $\frac{a^3}{6}$.

C. $\frac{a^3}{3}$.

D. a^3 .

Lời giải

Chọn A



Diện tích đáy $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} a^2$.

Thể tích cần tìm là $V = S_{ABC} \cdot BB' = \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{2}$.

Câu 22.8. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. a^3 .

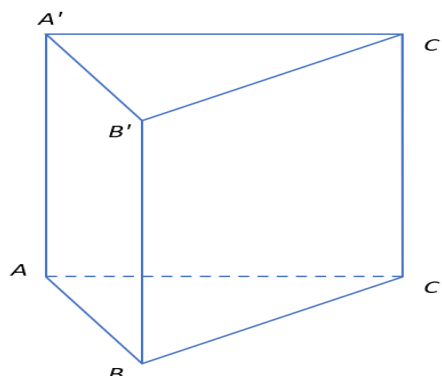
B. $\frac{a^3}{4}$.

C. $3a^3$.

D. $\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Lăng trụ tam giác đều là lăng trụ đứng và có đáy là tam giác đều.

$$\text{Diện tích đáy } S_{ABC} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}.$$

$$\text{Thể tích cần tìm là } V = S_{ABC} \cdot AA' = a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = 3a^3.$$

Câu 22.9. Tính thể tích của một khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AC' = 5a$ và đáy là tam giác đều cạnh $4a$.

A. $12a^3$.

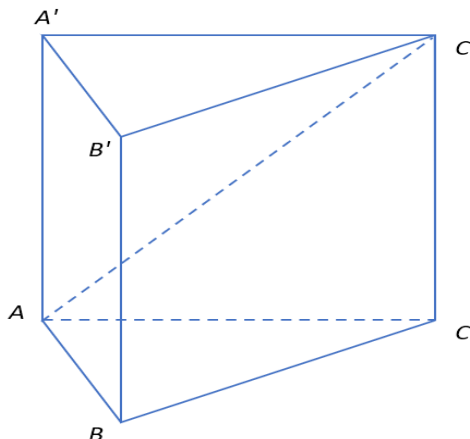
B. $\frac{20a^3}{3}$.

C. $20a^3\sqrt{3}$.

D. $12a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Lăng trụ tam giác đều là lăng trụ đứng và có đáy là tam giác đều.

$$\text{Diện tích đáy } S_{\triangle ABC} = (4a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4a^2 \sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có : } AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = 3a.$$

$$\text{Thể tích cần tìm là } V = S_{ABC} \cdot AA' = 4a^2 \sqrt{3} \cdot 3a = 12a^3 \sqrt{3}.$$

Câu 22.10. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích 1. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

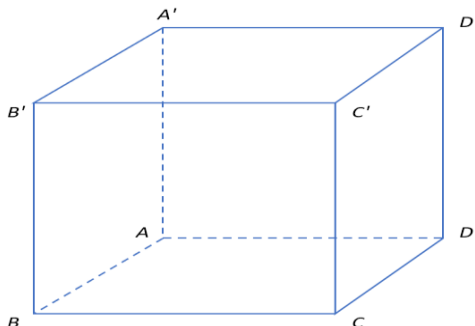
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}.$$

Câu 23. Công thức tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h là

- A. $V = \pi rh$. B. $V = \pi r^2 h$. C. $V = \frac{1}{3} \pi rh$. D. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

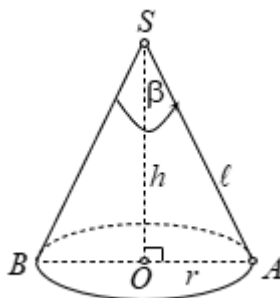
Lời giải

Chọn D

Theo công thức sách giáo khoa thì $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Xác định các yếu tố cơ bản của khối nón

Các yếu tố cơ bản cần nắm vững của khối nón



- ① $S_{\text{xq nón}} = \pi r \ell$
- ② $S_{\text{tp}} = S_{\text{xq}} + S_{\text{đáy}} = \pi r \ell + \pi r^2$.
- ③ $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} S_{\text{đáy}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

- ℓ : đường sinh.
- h : chiều cao.
- r : bán kính đáy.
- β : góc ở đỉnh.

Mối liên hệ: $\ell^2 = h^2 + r^2$.

Bài tập tương tự và mở rộng.

Câu 23.1. Cho khối nón có chiều cao $h = 3$ và bán kính đáy $r = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 16π . B. 48π . C. 36π . D. 4π .

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 16\pi$.

Câu 23.2. Thể tích khối nón có bán kính đáy là 3 cm và độ dài đường sinh là 5 cm bằng

A. $12\pi \text{ cm}^3$. B. $15\pi \text{ cm}^3$. C. $36\pi \text{ cm}^3$. D. $45\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ cm}$.

Vậy thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 12\pi \text{ cm}^3$.

Câu 23.3. Cho khối nón có đường sinh là 5 và diện tích đáy là 9π . Thể tích của khối nón đã cho bằng
A. 12π . **B.** 24π . **C.** 36π . **D.** 45π .

Lời giải

Chọn A

Diện tích đáy là $S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{9\pi}{\pi}} = 3$.

Ta có $l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ cm}$.

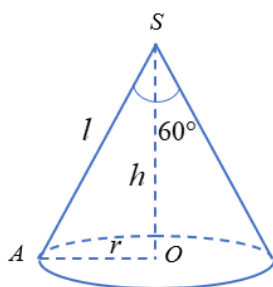
Vậy thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 12\pi$.

Câu 23.4. Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 và góc ở đỉnh bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 8π . **B.** 16π . **C.** $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\angle ASO = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

$\Rightarrow \sin \angle ASO = \frac{OA}{SA} \Rightarrow SA = \frac{OA}{\sin \angle ASO} = \frac{r}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow l = 4$.

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 2 \cdot 4 = 8\pi$.

Câu 23.5. Cho hình nón bán kính đáy bằng a và thể tích khối nón bằng $\frac{\sqrt{3}}{3} \pi a^3$. Diện tích toàn phần của hình nón đó bằng

A. $3\pi a^2$. **B.** $4\pi a^2$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** πa^2 .

Lời giải

Chọn A

Ta có: Thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \pi a^3}{\pi \cdot a^2} = \sqrt{3} a$.

Mặt khác ta lại có: $l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

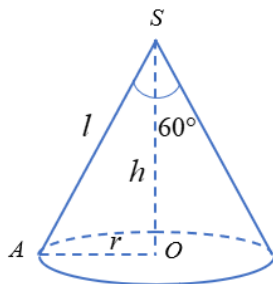
Diện tích toàn phần của hình nón là $S_p = \pi r l + \pi r^2 = \pi 2a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2$.

Câu 23.6. Cho hình nón có bán kính bằng 5 và góc ở đỉnh bằng 60° . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

- A. 50π . B. 100π . C. $\frac{50\pi\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{100\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\angle ASO = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

$$\Rightarrow \sin \angle ASO = \frac{OA}{SA} \Rightarrow SA = \frac{OA}{\sin \angle ASO} = \frac{r}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10 \Rightarrow l = 10.$$

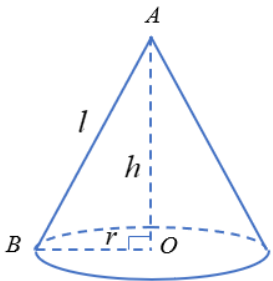
Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 50\pi$.

Câu 23.7. Trong không gian, cho tam giác OAB vuông tại O có $OA = 3$, $OB = 4$. Diện tích toàn phần của hình nón tạo thành khi quay tam giác OAB quanh OA bằng

- A. 36π . B. 20π . C. 26π . D. 52π .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

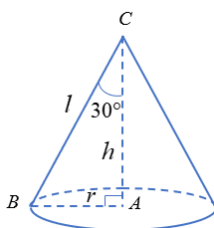
Diện tích toàn phần của hình nón là $S_p = \pi rl + \pi r^2 = \pi \cdot 4 \cdot 5 + \pi \cdot 4^2 = 36\pi$.

Câu 23.8. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$ và $\angle ACB = 30^\circ$. Thể tích của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. C. $\sqrt{3}\pi a^3$. D. πa^3 .

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có } \tan ACB = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AB}{\tan ACB} = \frac{a}{\tan 30^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = a\sqrt{3} \Rightarrow h = a\sqrt{3}.$$

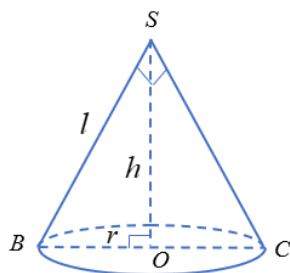
$$\text{Thể tích của hình nón đã cho là } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}.$$

Câu 23.9. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón bằng

- A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{\pi a^3}{12}$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tam giác $\triangle SBC$ vuông cân tại S có cạnh huyền $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = OB = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

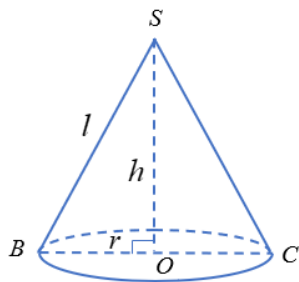
$$\text{Thể tích của khối nón đã cho là } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}.$$

Câu 23.10. Cắt một khối nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối nón bằng

- A. $\pi\sqrt{3}a^3$. B. πa^3 . C. $2\pi\sqrt{3}a^3$. D. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tam giác $\triangle SBC$ là tam giác đều cạnh bằng $2a$, suy ra $h = SO = \frac{SB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ và

$$r = BO = \frac{BC}{2} = a.$$

$$\text{Thể tích của khối nón đã cho là } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}.$$

Câu 24. Một khối trụ có bán kính đáy $r = 4\text{ cm}$ và độ dài đường sinh $l = 3\text{ cm}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đó bằng

A. $12\pi(\text{m}^2)$.

B. $48\pi(\text{m}^2)$.

C. $24\pi(\text{m}^2)$.

D. $36\pi(\text{m}^2)$.

Lời giải

Chọn C

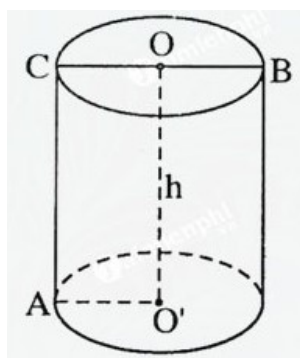
Ta có: $s_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 4 \cdot 3 = 24\pi(\text{m}^2)$.

Hình trụ

1. $s_{xq} = 2\pi rh$

2. $s_{tp} = s_{xq} + 2s_{đáy} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

3. $V_{tru} = S_{đáy} \cdot h = \pi r^2 h$.



$l = h$: chiều cao = đường sinh

r : bán kính đáy

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 24.1. Cho khối trụ có độ dài đường sinh bằng a và bán kính đáy bằng R . Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. πaR^2 .

B. $2\pi aR^2$.

C. $\frac{1}{3}\pi aR^2$.

D. aR^2 .

Lời giải

Chọn A

Ta có $V = \pi R^2 h = \pi aR^2$.

Câu 24.2. Một hình trụ có chiều cao bằng 6 cm và diện tích đáy bằng 4cm^2 . Thể tích của khối trụ bằng

A. 8cm^2 .

B. 12cm^2 .

C. 24cm^2 .

D. 7cm^2 .

Lời giải

Chọn C

Ta có $V = S_{đáy} \cdot h = 4 \cdot 6 = 24\text{cm}^2$.

Câu 24.3. Một hình trụ có bán kính đáy bằng 3 cm, độ dài đường cao bằng 4 cm. Diện tích xung quanh của hình trụ này bằng

A. $24\pi\text{cm}^2$.

B. $22\pi\text{cm}^2$.

C. $26\pi\text{cm}^2$.

D. $20\pi\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $s_{xq} = 2\pi rl = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi\text{cm}^2$.

Câu 24.4. Diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$ bằng

- A. $2\pi a^2(\sqrt{3}-1)$. B. $\pi a^2\sqrt{3}$. C. $\pi a^2(\sqrt{3}+1)$. D. $2\pi a^2(\sqrt{3}+1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $s_{tp} = s_{xq} + 2s_{đáy} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi a.a\sqrt{3} + 2\pi a^2 = 2\pi a^2(\sqrt{3}+1)$.

Câu 24.5. Cho hình trụ (T) có chiều cao là 5 và diện tích xung quanh là 30π . Thể tích khối trụ (T) bằng

- A. 30π . B. 75π . C. 15π . D. 45π .

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.R.5 = 30\pi \Rightarrow R = 3$.

Vậy $V = \pi R^2 h = \pi.3^2.5 = 45\pi$.

Câu 24.6. Cho khối trụ có chi vi đáy bằng $4\pi a$ và độ dài đường cao bằng a . Thể tích của khối trụ bằng

- A. πa^2 . B. $3\pi a^3$. C. $4\pi a^3$. D. $16\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $C = 4\pi a \Leftrightarrow 2\pi R = 4\pi a \Rightarrow R = 2a$.

Vậy $V = \pi R^2 h = \pi.(2a)^2.a = 4\pi a^3$.

Câu 24.7. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a . Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

- A. $2\sqrt{2}a$. B. $3a$. C. $\frac{2a}{3}$. D. $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn B

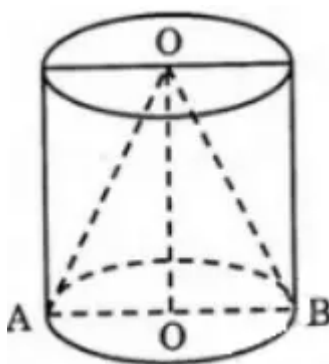
Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi Rl \Leftrightarrow 3\pi a^2 = \pi.a.l \Leftrightarrow l = 3a$.

Câu 24.8. Một hình trụ có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $2a$. Một hình nón có đáy trùng với đáy của hình trụ và đỉnh trùng với tâm của đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

- A. $a\sqrt{5}$. B. $2a$. C. a . D. $3a$.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết hình trụ có: $R = a$, $h = 2a$.

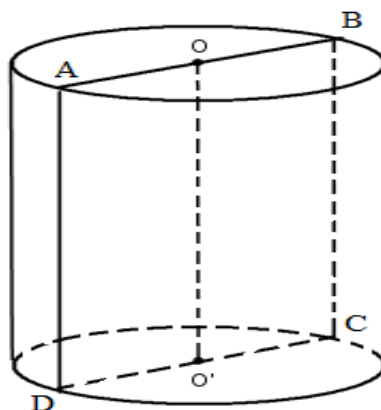
Độ dài đường sinh của hình nón ngoại tiếp hình trụ là $l = \sqrt{h^2 + R^2} = a\sqrt{5}$.

Câu 24.9. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $2a$. Một mặt phẳng đi qua trục của hình trụ cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

- A. $18\pi a^3$. B. $4\pi a^3$. C. $8\pi a^3$. D. $16\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có bán kính đáy bằng $2a$ khi đó đường kính đáy bằng $4a$.

Vì thiết diện cắt bởi hình trụ là hình vuông suy ra chiều cao của hình trụ bằng $4a$.

Vậy $V = \pi R^2 h = \pi (2a)^2 \cdot 4a = 16\pi a^3$.

Câu 24.10. Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có AB và CD thuộc hai đáy của hình trụ với $AB = 4a$ và $AC = 5a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $16\pi a^3$.

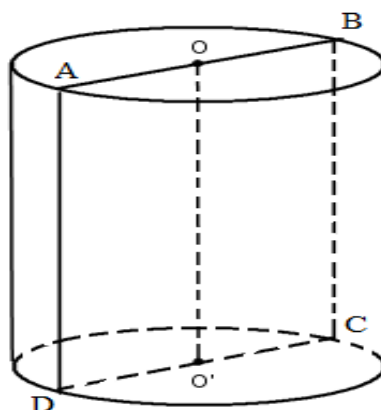
B. $12\pi a^3$.

C. $4\pi a^3$.

D. $8\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Chiều cao của hình trụ đã cho là $h = BC = 3a$.

Bán kính của hình trụ là: $R = \frac{AB}{2} = 2a$.

Vậy thể tích của khối trụ đã cho là: $V = \pi R^2 h = \pi (2a)^2 \cdot 3a = 12\pi a^3$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. $(4;2;2)$

B. $(2;1;1)$.

C. $(2;0;-2)$.

D. $(1;0;-1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Trung điểm } I \text{ của } AB \text{ có tọa độ là } \begin{cases} x_I = \frac{3+1}{2} = 2 \\ y_I = \frac{1+1}{2} = 1 \\ z_I = \frac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$$

Vậy $I(2;1;1)$.

Định nghĩa: $M(a;b;c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k} = (a;b;c)$

Cần nhớ: $\begin{cases} M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0, M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0, M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0 \\ M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0, M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0, M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0 \end{cases}$

Tính chất: cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$

① $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

② Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

③ Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 25.1. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $M(1;2;3)$ và $N(3;4;7)$ Tọa độ của vector $\overrightarrow{MN}$ là

- A. $(4;6;10)$. B. $(2;3;5)$. C. $(2;2;4)$ D. $(-2;-2;-4)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{MN} = (2;2;4)$.

Câu 25.2. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;1)$. Độ dài đoạn AB bằng

- A. 2. B. $\sqrt{6}$. C. $\sqrt{2}$. D. 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;2;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

Câu 25.3. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{u} = (1;-2;3)$ và $\vec{v} = (-1;2;-3)$. Độ dài của vector $\vec{u} - 2\vec{v}$ bằng

- A. $\sqrt{26}$. B. $\sqrt{126}$. C. $\sqrt{85}$. D. $\sqrt{185}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2\vec{v} = (-2;4;-6) \Rightarrow \vec{u} - 2\vec{v} = (3;-6;9) \Rightarrow |\vec{u} - 2\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 9^2} = \sqrt{126}$.

Câu 25.4. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(-2;2;1)$. B. $I(1;0;4)$. C. $I(2;0;8)$. D. $I(2;-2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 0 \\ z_I = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 4).$$

Câu 25.5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 4)$ và $B(2; 4; -1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB .

- A. $G(6; 3; 3)$. B. $G(2; 1; 1)$. C. $G(2; 1; 1)$. D. $G(1; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_G = \frac{x_O + x_A + x_B}{3} \\ y_G = \frac{y_O + y_A + y_B}{3} \\ z_G = \frac{z_O + z_A + z_B}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 2 \\ z_I = 1 \end{cases} \Rightarrow G(1; 2; 1).$$

Câu 25.6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $M(3; 0; 0)$. B. $N(0; -1; 1)$. C. $P(0; -1; 0)$. D. $Q(0; 0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x = 0 \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là $N(0; -1; 1)$.

Câu 25.7. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Điểm A' đối xứng với A qua trục Oy là

- A. $A'(2; 3; 5)$. B. $A'(2; -3; -5)$. C. $A'(-2; -3; 5)$. D. $A'(-2; -3; -5)$.

Lời giải

Chọn D

A' đối xứng với A qua $Oy \Rightarrow A'(-2; -3; -5)$.

Câu 25.8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Nếu A, B, M thẳng hàng thì tổng $x + y$ bằng

- A. 11. B. -11. C. -3. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$ và $\overrightarrow{AM} = (x - 2; y + 1; -4)$.

Khi đó A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = -4 \\ y+1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow x + y = 3.$$

Câu 25.9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

- A.** $M(9;-5;7)$. **B.** $M(9;5;7)$. **C.** $M(-9;5;-7)$. **D.** $M(9;-5;-5)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $M(a;b;c)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (a;b-1;c+2)$; $\overrightarrow{AB} = (3;-2;3) \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} = (9;-6;9)$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b-1 = -6 \\ c+2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -5 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow M(9;-5;7).$$

Câu 25.10. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;2;3)$, $N(2;-3;1)$, $P(3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm Q sao cho $MNPQ$ là hình bình hành.

- A.** $Q(2;-6;4)$. **B.** $Q(4;-4;0)$. **C.** $Q(2;6;4)$. **D.** $Q(-4;-4;0)$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $Q(a;b;c)$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (1;-5;-2)$, $\overrightarrow{QP} = (3-a;1-b;2-c)$.

$$MNPQ \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3-a \\ -5 = 1-b \\ -2 = 2-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow Q(2;6;4).$$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

- A.** 9. **B.** 3. **C.** 81. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt cầu là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên $R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.

Câu 26.1 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là ?

- A.** $I(-1;2;1)$ và $R = 3$. **B.** $I(1;-2;-1)$ và $R = 3$.
C. $I(-1;2;1)$ và $R = 9$. **D.** $I(1;-2;-1)$ và $R = 9$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên $I(-1;2;1)$ và $R = 3$.

Câu 26.2 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là ?

- A.** $I(0;-2;2)$ và $R = 64$. **B.** $I(0;2;-2)$ và $R = 4$.
C. $I(0;-2;2)$ và $R = 2\sqrt{2}$. **D.** $I(0;2;-2)$ và $R = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình mặt cầu là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên $I(0; -2; 2)$ và $R = 2\sqrt{2}$.

Câu 26.3 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là ?

A. $I(1; -2; 3)$ và $R = 2$.

B. $I(-1; 2; -3)$ và $R = 2$.

C. $I(-1; 2; -3)$ và $R = 4$.

D. $I(1; -2; 3)$ và $R = 4$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$ có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ nên $I(1; -2; 3)$ và $R = 2$.

Câu 26.4 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 16 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là ?

A. $I(-2; -1; 2)$ và $R = 5$.

B. $I(-2; -1; 2)$ và $R = 5$.

C. $I(2; 1; -2)$ và $R = 5$.

D. $I(4; 2; -4)$ và $R = 13$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$ có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ nên $I(2; 1; -2)$ và $R = 5$.

Câu 26.5 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - m = 0$ có bán kính $R = 5$. Tìm tham số thực m ?

A. $m = -16$.

B. $m = 16$.

C. $m = 4$.

D. $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu có tâm $I(1; -2; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{9 + m} = 5 \Rightarrow m = 16$

Câu 26.6 Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m \leq 6$.

B. $m > 6$.

C. $m < 6$.

D. $m \geq 6$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow 1 + 1 + 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$.

Câu 26.7 Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm $A(0; 4; -1)$?

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overline{IA} = (1; 2; -2)$.

Bán kính: $R = IA = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.

Phương trình mặt cầu có tâm $I(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm $A(0; 4; -1)$: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Câu 26.8 Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;4;1)$. Phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB là:

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 12$.

B. $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3$.

C. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 12$.

D. $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 12$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là tâm mặt cầu (S) có đường kính $AB \Rightarrow I$ là trung điểm $AB \Rightarrow I(0;3;2)$.

Bán kính: $R = IA = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB là: $x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3$

Câu 26.9 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và điểm $M(1;1;1)$.

Tìm khẳng định đúng?

A. Điểm M nằm bên ngoài (S) .

B. Điểm M nằm bên trong (S) .

C. Điểm M nằm thuộc mặt cầu (S) .

D. Đường kính mặt cầu bằng 5.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính: $R = 5$.

$\overline{IM} = (2; -1; -2) \Rightarrow IM = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1} = 3 < R$ do đó điểm M nằm bên trong (S) .

Câu 26.10 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$ và điểm $M(2;2;4)$.

. Tìm khẳng định đúng?

A. Điểm M nằm bên ngoài (S) .

B. Điểm M nằm bên trong (S) .

C. Điểm M nằm thuộc mặt cầu (S) .

D. Đường kính mặt cầu bằng 6.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm $M(2;2;4)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta được:

$(2-1)^2 + (2-1)^2 + (4-2)^2 = 6 \Leftrightarrow 6 = 6$, suy ra điểm M nằm thuộc mặt cầu (S) .

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua điểm $M(1;-2;1)$?

A. $(P_1): x + y + z = 0$.

B. $(P_2): x + y + z - 1 = 0$.

C. $(P_3): x - 2y + z = 0$.

D. $(P_4): x + 2y + z - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ điểm $M(1;-2;1)$ trực tiếp vào các phương trình mặt phẳng để kiểm tra. Ta có $M \in (P_1)$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 27.1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n}_4 = (1; 0; -1)$.

B. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$.

C. $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$.

D. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (3; 0; -1)$.

Câu 27.2. Trong không gian Oxy , tọa độ vectơ pháp tuyến của (Oxy) là

A. $\vec{n}_1 = (0; 1; 0)$.

B. $\vec{n}_2 = (1; 1; 0)$.

C. $\vec{n}_3 = (0; 0; 1)$.

D. $\vec{n}_4 = (1; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là $\vec{n} = (0; 0; 1)$.

Câu 27.3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$ và $C(-10; 5; 3)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ?

A. $\vec{n}_1 = (1; 8; 2)$.

B. $\vec{n}_2 = (1; 2; 0)$.

C. $\vec{n}_3 = (1; 2; 2)$.

D. $\vec{n}_4 = (1; -2; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-12; 6; 0)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; 24; 24) = 12(1; 2; 2).$$

Do đó vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n} = (1; 2; 2)$.

Câu 27.4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z = 5$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

A. $Q(2; -1; 5)$.

B. $P(0; 0; -5)$.

C. $N(-5; 0; 0)$.

D. $M(1; 1; 6)$.

Lời giải

Chọn D

Thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt phẳng (P) . Ta có $M \in (P)$.

Câu 27.5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(m; 1; 6)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) khi giá trị của tham số m bằng

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = 3$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (P) \Leftrightarrow m - 2 + 6 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 27.6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2017)$ và mặt phẳng $(P): mx - 2y + mz + 2016 = 0$.

Tìm tham số m để điểm A thuộc mặt phẳng (P) ?

A. $m = -1007$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1009$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A \in (P) \Leftrightarrow m + 2 + 2017m + 2016 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 27.7. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 4 = 0$. Khoảng cách từ điểm $M(1; 2; 1)$ đến (P) bằng

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 1.$$

Câu 27.8. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + z = 0$ và $(Q): 2x - y + z - 7 = 0$. Khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng

- A. 7. B. $7\sqrt{6}$.
C. $6\sqrt{7}$. D. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } O \in (P). \text{ Do đó } d((P), (Q)) = d(O, (Q)) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + 0 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 27.9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 8x - 4y - 8z - 11 = 0$ và $(Q): \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 7 = 0$. Góc giữa (P) và (Q) bằng

- A. 45° . B. 90° .
C. 30° . D. 60° .

Lời giải

Chọn A

Ta có mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P = (8; -4; -8)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

$$\text{Khi đó } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{|8\sqrt{2} - 4(-\sqrt{2})|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + (-8)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $\varphi = 45^\circ$.

Câu 27.10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 5x + 11y + 2z - 4 = 0$. Góc giữa d và (P) bằng

- A. 90° . B. 30° .
C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn B

Ta có đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; 11; 2)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi đó $\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{|1 \cdot 5 - 2 \cdot 11 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{5^2 + 11^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\varphi = 30^\circ$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và điểm $M(1; -2; 1)$?

- A. $\vec{u}_1 = 1; 1; 1$ B. $\vec{u}_2 = 1; 2; 1$ C. $\vec{u}_3 = 0; 1; 0$ D. $\vec{u}_4 = 1; -2; 1$

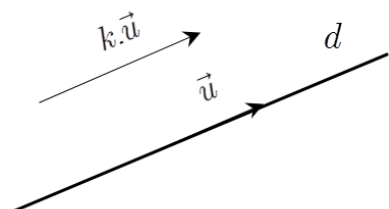
Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{OM} = 1; -2; 1$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng OM .

Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng

- Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d là vectơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d . Nếu d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ thì $k\vec{u}$ cũng là một vectơ chỉ phương của d .
- Nếu có hai vectơ $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng vuông góc với d thì d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.
- Để viết phương trình đường thẳng d , ta cần tìm điểm đi qua và một vectơ chỉ phương.



Nếu đường thẳng $d: \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP: } \vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3) \end{cases}$ thì ta có hai dạng phương trình đường thẳng:

+ Phương trình đường thẳng d **dạng tham số** $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

+ Phương trình đường thẳng d **dạng chính tắc** $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, (a_1 a_2 a_3 \neq 0).$

- Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \in d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_0 + a_1 t \\ y_M = y_0 + a_2 t \\ z_M = z_0 + a_3 t \end{cases}$ luôn đúng (các giá trị t giống nhau).

Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \in d: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \Leftrightarrow \frac{x_M - x_0}{a_1} = \frac{y_M - y_0}{a_2} = \frac{z_M - z_0}{a_3}$: đúng.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 28.1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc d ?

- A.** $Q(1; 0; 2)$. **B.** $N(1; -2; 0)$. **C.** $P(1; -1; 3)$. **D.** $M(-1; 2; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Thay tọa độ điểm trong các phương án đã cho vào phương trình chính tắc của d ta thấy tọa độ điểm $M(-1; 2; 0)$ thỏa mãn.

Câu 28.2. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A.** $M(-1; 2; 3)$. **B.** $N(3; 2; 1)$. **C.** $P(1; 2; 3)$. **D.** $Q(0; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Thay tọa độ điểm trong các phương án đã cho vào phương trình chính tắc của d ta thấy tọa độ điểm $P(1; 2; 3)$ thỏa mãn.

Câu 28.3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2; m; n)$. Giá trị

$m+n$ bằng

A. -1 .

B. 7 .

C. 3 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x=t \\ y=-2-t \\ z=1+3t \end{cases}$.

Theo giả thiết $M(2; m; n) \in \Delta$ và $x_M = 2 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = y = -4 \\ n = z = 7 \end{cases}$.

Khi đó: $m+n=3$.

Câu 28.4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Biết $A(m; m+2; 1) \in d$. Tìm

khẳng **đúng** trong các khẳng định sau ?

A. $m \in (-\infty; -4)$.

B. $m \in [-4; 2)$.

C. $m \in (6; +\infty)$.

D. $m \in [2; 6]$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có phương trình tham số $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Theo giả thiết $A(m; m+2; 1) \in d$ và $z_A = 1 \Rightarrow -2+t = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow m = x = 1+2t = 7$.

Khi đó: $m \in (6; +\infty)$.

Câu 28.5. Trong không gian $Oxyz$, một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ là

A. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

B. $\vec{u} = (2; 1; 0)$.

C. $\vec{u} = (-1; 2; 0)$.

D. $\vec{u} = (2; 1; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

Câu 28.6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -4)$ và $B(4; -1; -2)$. Vectơ nào dưới đây là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng AB ?

A. $\vec{u} = (6; 2; -3)$.

B. $\vec{u} = (3; 1; -3)$.

C. $\vec{u} = (1; -2; 1)$.

D. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -4; 2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $AB \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (1; -2; 1)$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB .

Câu 28.7. Trong không gian $Oxyz$, cho một vectơ chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=2 \\ z=1-2t \end{cases}$ là

A. $\vec{u} = (1; 0; -2)$.

B. $\vec{u} = (1; 2; 0)$.

C. $\vec{u} = (-1; 2; 0)$.

D. $\vec{u} = (1; 2; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u} = (1; 0; -2)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

Câu 28.8. Trong không gian $Oxyz$, gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của $M(2;5;4)$ lên trục Ox và mặt phẳng (Oyz) . Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 .

- A. $\vec{u}_3 = (2;0;4)$. B. $\vec{u}_2 = (-2;5;4)$. C. $\vec{u}_4 = (0;-3;4)$. D. $\vec{u}_1 = (-2;0;4)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của $M(2;5;4)$ lên trục Ox là $M_1(2;0;0)$.

Hình chiếu vuông góc của $M(2;5;4)$ lên mặt phẳng (Oyz) là $M_2(0;5;4)$.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (-2;5;4)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

Câu 28.9. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x + y - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - 2y + z - 3 = 0$. Đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (1;1;0)$. B. $\vec{u} = (1;-2;1)$. C. $\vec{u} = (1;1;-3)$. D. $\vec{u} = (1;-1;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng $(P): x + y - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (1;1;0)$.

Mặt phẳng $(Q): x - 2y + z - 3 = 0$ có một vector pháp tuyến $\vec{n}_q = (1;-2;1)$.

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên nhận $\vec{u} = [\vec{n}_p, \vec{n}_q] = (1;-1;-3)$ làm một vector chỉ phương.

Câu 28.10. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P): 4x - z + 3 = 0$.

Véc tơ nào dưới đây là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- A. $\vec{u} = (4;1;3)$. B. $\vec{u} = (4;0;-1)$. C. $\vec{u} = (4;1;-1)$. D. $\vec{u} = (4;-1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng $(P): 4x - z + 3 = 0$ có một vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (4;0;-1)$.

Vì đường thẳng d là vuông góc với mặt phẳng (P) nên nhận $\vec{n}_p = (4;0;-1)$ làm một vector chỉ phương.

Câu 29. Chọn ngẫu nhiên một số trong 15 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được số chẵn bằng

- A. $\frac{7}{8}$. B. $\frac{8}{15}$. C. $\frac{7}{15}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Trong số 15 số nguyên dương đầu tiên đếm được 7 số chẵn nên xác suất bằng $\frac{7}{15}$.

Câu 29.1 Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng

- A. $\frac{13}{27}$. B. $\frac{14}{27}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{365}{729}$.

Lời giải

Chọn A

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{27}^2$.

Mỗi cách chọn số thỏa mãn đề bài gồm một cặp số chẵn hoặc một cặp số lẻ, số phần tử của biến cố là $n(A) = C_{14}^2 + C_{13}^2$.

Xác suất của biến cố là $\frac{C_{14}^2 + C_{13}^2}{C_{27}^2} = \frac{13}{27}$.

Câu 29.2 Gọi S là tập các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được tạo từ tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn?

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = A_5^4 = 120$.

Số số chẵn được lập từ E trong Ω là $n(A) = 2 \cdot A_4^3 = 48$.

Xác suất của biến cố là $\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$.

Câu 29.3 Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi, rồi cộng các số trên các bi lại với nhau. xác suất để kết quả thu được là 1 số lẻ bằng

- A. $\frac{31}{32}$. B. $\frac{11}{32}$. C. $\frac{16}{33}$. D. $\frac{21}{32}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{11}^4 = 330$.

Tổng các chữ số là lẻ khi có 1 số lẻ hoặc 3 số lẻ trong 4 số được chọn, do vậy số phần tử của biến cố là $C_6^1 \cdot C_5^3 + C_6^3 \cdot C_5^1 = 160$.

Xác suất của biến cố là $\frac{160}{330} = \frac{16}{33}$.

Câu 29.4 Cho 14 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 14. Chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Xác suất để tích 3 số ghi trên 3 tấm thẻ này chia hết cho 3 bằng

- A. $\frac{30}{91}$. B. $\frac{61}{91}$. C. $\frac{31}{91}$. D. $\frac{12}{17}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{14}^3 = 364$.

Tích của 3 số tự nhiên chia hết cho 3 khi có một số trong đó chia hết cho 3 do vậy số phần tử của biến cố là $C_{14}^3 - C_{10}^3 = 244$.

Xác suất của biến cố là $\frac{244}{364} = \frac{61}{91}$.

Câu 29.5 Gọi S là tất cả các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau lập từ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập S . Tính xác suất để tích hai số được chọn là số chẵn?

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Số các số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau được lập từ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 là $6.6 = 36$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{36}^2 = 630$.

Số các số lẻ trong Ω là $3.5 = 15$ số, do đó số các số chẵn là 21 số.

Tích hai số trong Ω là một số chẵn khi chỉ khi trong hai số đó có ít nhất một số chẵn, do vậy số phần tử của biến cố là $C_{36}^2 - C_{15}^2 = 525$.

Xác suất của biến cố là $\frac{525}{630} = \frac{5}{6}$.

Câu 29.6 Gọi A là tập hợp các số có ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên ba số từ tập hợp A , xác suất để trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4 bằng

A. $\frac{2484}{8555}$.

B. $\frac{5}{17}$.

C. $\frac{2518}{8555}$.

D. $\frac{4}{17}$.

Lời giải

Chọn A

Số các số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau được lập từ 1, 2, 3, 4, 5 là $3.4.5 = 60$.

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{60}^3 = 34220$.

Trong 60 số trên có 36 số có mặt chữ số 4.

Do vậy số phần tử của biến cố trong ba số được chọn có đúng một số có mặt chữ số 4 là $36.C_{24}^2 = 9936$.

Xác suất của biến cố là $\frac{9936}{34220} = \frac{2484}{8555}$.

Câu 29.7 Chọn ngẫu nhiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là chẵn bằng

A. $\frac{61}{81}$.

B. $\frac{4}{9}$.

C. $\frac{41}{81}$.

D. $\frac{16}{81}$.

Lời giải

Chọn C

Số các số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau $9.9.8 = 648$.

Tổng các chữ số của một số có 3 chữ số là số chẵn nếu số đó có 3 chữ số chẵn hoặc có 2 chữ số lẻ và một chữ số chẵn.

Số các số có 3 chữ số chẵn là $4.A_4^2 = 48$.

Số các số có 2 chữ số lẻ và một số chẵn là $C_5^2.C_5^1.3! - 1.C_5^2.2! = 280$

Xác suất của biến cố là $\frac{48+280}{648} = \frac{41}{81}$.

Câu 29.8 Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau và luôn có mặt chữ số 5 được lập từ các chữ số thuộc tập A . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , xác suất để số được chọn chia hết cho 5 bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{2}{9}$.

C. $\frac{9}{26}$.

D. $\frac{11}{26}$.

Lời giải

Chọn C

Số các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau được lập từ A luôn có chữ số 5 là $6.A_6^4 - 5.A_5^4 = 1560$.

Số chia hết cho 5 được lập theo cách trên là $5.A_5^3 + 4.A_5^3 = 540$.

Xác suất của biến cố là $\frac{540}{1560} = \frac{9}{26}$.

Câu 29.9 Cho tập $S = \{1; 2; 3; 4; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành một cấp số cộng bằng

A. $\frac{7}{38}$.

B. $\frac{3}{38}$.

C. $\frac{5}{38}$.

D. $\frac{1}{114}$.

Lời giải

Chọn B

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140$.

Mỗi cách chọn ra 2 số lẻ (hoặc chẵn) bất kỳ chúng ta chọn được duy nhất một số (trung bình cộng) để 3 số ấy lập thành một cấp số cộng.

Số cách chọn ra 3 số lập thành một cấp số cộng là $n(A) = 2.C_{10}^2 = 90$.

Xác suất của biến cố là $\frac{90}{1140} = \frac{3}{38}$.

Câu 29.10 Có 11 cái ghế (mỗi ghế chỉ ngồi được một người) được sắp xếp trên một hàng ngang. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh ngồi vào, mỗi học sinh ngồi đúng một ghế. Xác suất sao cho không có hai ghế trống nào kề nhau bằng

A. $\frac{4}{85}$.

B. $\frac{1}{22}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{11}$.

Lời giải

Chọn B

Số cách sắp xếp 6 học sinh vào ngồi trong 11 cái ghế (thành một hàng ngang) là $A_{11}^6 = 332640$.

Sắp xếp sao cho không có 2 ghế nào liên tiếp là trống ta làm như sau:

Xếp tùy ý 6 học sinh thành một hàng có $6! = 720$ cách.

Ở giữa và hai đầu dãy 6 học sinh trên ta thấy có 7 ô trống, bây giờ ta chọn ra 5 ô trống và xếp vào mỗi ô trống đó một chiếc ghế, sau đó lấy 6 chiếc ghế còn lại cho 6 bạn ấy ngồi xuống ta sẽ được một cách xếp thỏa mãn yêu cầu của biến cố. Do vậy số cách sắp xếp sao cho không có hai ghế trống nào kề nhau bằng $6!.C_7^5 = 15120$

Xác suất của biến cố là $\frac{15120}{332640} = \frac{1}{22}$.

Câu 30. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

B. $y = x^2 + 2x$.

C. $y = x^3 - x^2 + x$.

D. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ trước hết phải có tập xác định $D = \mathbb{R}$, loại câu A, xét các câu khác.

Chỉ có $(x^3 - x^2 + x)' = 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = x^3 - x^2 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu 30.1. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x^2$.

B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

C. $y = -x^3 + 3x + 1$.

D. $y = x^3 + 2018$.

Lời giải**Chọn B**

Ta thấy các hàm số đã cho đều là hàm bậc ba nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ trước hết phải có hệ số $a < 0$, loại câu A, D, xét các câu khác. Chỉ có $(-x^3 + 3x^2 - 3x + 2)' = -3x^2 + 6x - 3 \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 30.2 Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = 3x^3 + 3x - 2$.

B. $y = 2x^3 - 5x + 1$.

C. $y = x^4 + 3x^2$.

D. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Lời giải**Chọn A**

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ tức là đồng biến trên $\mathbb{R}$, trước hết phải có tập xác định $D = \mathbb{R}$, loại câu D và C (hàm trùng phương không đồng biến trên $\mathbb{R}$), xét các câu khác. Chỉ có $(3x^3 + 3x - 2)' = 9x^2 + 3 > 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$ nên $y = 3x^3 + 3x - 2$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 30.3 Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = x^3 + 2x^2 + 1$.

B. $y = 7x - 2 \sin 3x$.

C. $y = \frac{4x+1}{x+2}$.

D. $y = \tan x$.

Lời giải**Chọn B**

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ tức là đồng biến trên $\mathbb{R}$, trước hết phải có tập xác định $D = \mathbb{R}$, loại câu C và D, xét các câu khác. Chỉ có $(7x - 2 \sin 3x)' = 7 - 6 \cos 3x > 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$ nên $y = 7x - 2 \sin 3x$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 30.4. Hàm số nào dưới đây thỏa mãn với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$?

A. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$.

B. $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

C. $f(x) = x^3 + x^2 + 1$.

D. $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1$.

Lời giải**Chọn D**

Ta có $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$ tức là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Loại được đáp án B và A (hàm trùng phương). Xét các đáp án còn lại. Chỉ có

$(x^3 + x^2 + 3x + 1)' = 3x^2 + 2x + 3 > 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$ nên $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 30.5. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của chúng?

- A.** $y = \ln x$. **B.** $y = e^{-x}$. **C.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **D.** $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Lời giải

Chọn A

Các hàm số $y = e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ đều có cơ số nhỏ hơn 1 nên các hàm số này nghịch biến trên tập xác định của chúng. Hàm số $y = \ln x$ có $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0$.

Câu 30.6. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$. **B.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$. **C.** $y = \log_{0.5} x$. **D.** $y = \log_5 x$.

Lời giải

Chọn A

Các hàm số $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, $y = \log_5 x$ đều có cơ số lớn hơn 1 nên các hàm số này đồng biến trên tập xác định của chúng.

Hàm số $y = \log_{0.5} x$ có cơ số nhỏ hơn 1 nên hàm số này nghịch biến $\forall x > 0$.

Hàm số $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$ và có cơ số $\frac{e}{3} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 30.7. Điều kiện của a để hàm số $f(x) = (1 + \ln a)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- A.** $e^{-1} < a < 1$. **B.** $a > 1$. **C.** $a > 0$. **D.** $a > e$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $a > \frac{1}{e}, a \neq 1$.

Hàm số $f(x) = (1 + \ln a)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $1 + \ln a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$ kết hợp với điều kiện xác định chọn đáp án B.

Câu 30.8. Hỏi với giá trị nào của a thì hàm số $y = (3 - a)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $2 < a < 3$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a > 2$. **D.** $a < 0$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = (3 - a)^x$ khi nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < 3 - a < 1 \Leftrightarrow 2 < a < 3$.

Câu 30.9. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến $\mathbb{R}$ trên khi nào?

- A.** $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0, b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0, b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0, b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$$

Câu 30.10. Cho hàm số $y = \frac{mx - 1 - m^2}{x + 1}$. Với m là tham số. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.
- D. Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{m^2 + m + 1}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \neq -1 \text{ suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.}$$

Câu 31. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$. Tổng $M + m$ bằng

- A. 11. B. 14. C. 5. D. 13.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét: } f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 0 \in [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Xét: } f(0) = 3, f(1) = 2, f(2) = 11.$$

$$\text{Khi đó: } M = \max_{x \in [0; 2]} f(x) = f(2) = 11 \text{ và } m = \min_{x \in [0; 2]} f(x) = f(1) = 2.$$

$$\text{Suy ra: } M + m = 11 + 2 = 13.$$

Bài tập tương tự

Câu 31.1. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$ lần lượt là M và m . Tổng $M + m$ bằng

- A. $-\frac{28}{3}$. B. $-\frac{17}{3}$. C. -5 . D. 5 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét: } y' = x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in [-4; 0] \\ x = -1 \in [-4; 0] \end{cases}.$$

$$\text{Xét: } y(-4) = \frac{-16}{3}, y(-3) = -4, y(-1) = \frac{-16}{3}, y(0) = -4.$$

$$\text{Khi đó: } M = \max_{x \in [-4; 0]} y = y(-3) = y(0) = -4 \text{ và } m = \min_{x \in [-4; 0]} y = y(-4) = y(-1) = \frac{-16}{3}.$$

$$\text{Suy ra: } M + m = -4 - \frac{16}{3} = \frac{-28}{3}.$$

Câu 31.2. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+3}{1-x}$ trên đoạn $[-1; 0]$ lần lượt là M và m . Tổng $M + m$ bằng

- A. -2 . B. 4 . C. 3 . D. 1 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\text{Xét: } y' = \frac{4}{(1-x)^2} > 0, \forall x \in D. \text{ Khi đó: } y \text{ đồng biến trên từng khoảng xác định nên } y \text{ đồng biến trên đoạn } [-1; 0].$$

$$\text{Suy ra: } M = \max_{x \in [-1; 0]} y = y(0) = 3 \text{ và } m = \min_{x \in [-1; 0]} y = y(-1) = 1.$$

$$\text{Suy ra: } M + m = 3 + 1 = 4.$$

Câu 31.3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 5x}$ bằng

- A. 0. B. $\frac{5}{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } -x^2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 5.$$

$$\text{Tập xác định: } D = [0; 5].$$

$$\text{Xét: } y' = \frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \in [0; 5].$$

$$\text{Xét: } y(0) = 0, y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}, y(5) = 0.$$

$$\text{Vậy: } \max_{x \in D} y = y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

Câu 31.4. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x$ bằng

A. $\max y = \frac{58}{27}$.

B. $\max y = \frac{1}{3}$.

C. $\max y = 2$.

D. $\max y = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x = \cos^3 x - 2\cos^2 x + \cos x + 2.$$

Đặt $t = \cos x$, với $-1 \leq t \leq 1$. Khi đó hàm số trở thành: $y = t^3 - 2t^2 + t + 2$ và xác định trên $D = [-1; 1]$.

$$\text{Xét: } y' = 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \in D \\ t = 1 \in D \end{cases}.$$

$$\text{Xét: } y(-1) = -2, y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}, y(1) = 2.$$

$$\text{Suy ra: } \max_{t \in D} y = \max_{t \in D} y(t) = y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}.$$

Câu 31.5. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{-2\cos x + 2}{\cos x - 2}$ bằng

A. $\max y = 0, \min y = \frac{-4}{3}$.

B. $\max y = \frac{4}{3}, \min y = 0$.

C. $\max y = 1, \min y = 0$.

D. $\max y = 0, \min y = -1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \cos x$, với $-1 \leq t \leq 1$. Khi đó hàm số trở thành: $y = \frac{-2t+2}{t-2}$ và xác định trên $D = [-1; 1]$.

Xét: $y' = \frac{2}{(t-2)^2} > 0, \forall x \in D$. Khi đó: Hàm số $y(t)$ đồng biến trên $[-1; 1]$.

$$\text{Suy ra: } \max_{t \in D} y = \max_{t \in D} y(t) = y(1) = 0 \text{ và } \min_{t \in D} y = \min_{t \in D} y(t) = y(-1) = \frac{-4}{3}.$$

Câu 31.6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $\min_{(0; +\infty)} y = 1$.

B. $\min_{(0; +\infty)} y = 2$.

C. $\min_{(0; +\infty)} y = 3$.

D. $\min_{(0; +\infty)} y = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét: } y' = 2x - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
y'		-	0
y			

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min_{(0; +\infty)} y = y(1) = 3$.

Câu 31.7. Trên khoảng $(0; 1)$, hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x^3}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

C. $\frac{1}{2}$.

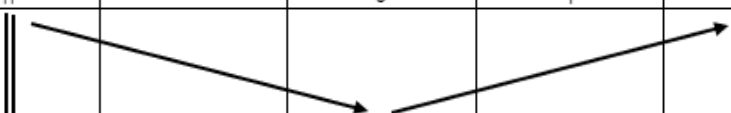
D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét: } y' = 3x^2 - \frac{1}{x^3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \in (0; 1).$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
y'		-	0	+	
y					

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Câu 31.8. Cho hàm số $y = x^3 + 3m^2x + 6$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0 ; 3]$ bằng 42.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = \pm 1$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn C

Xét: $y' = 3x^2 + 3m^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $[0 ; 3]$

Suy ra: $\max_{[0;3]} y = y(3) = 42 \Leftrightarrow 33 + 9m^2 = 42 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Câu 31.9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0 ; 4]$ bằng

A. $f(0)$.

B. $f(2)$.

C. $f(3)$.

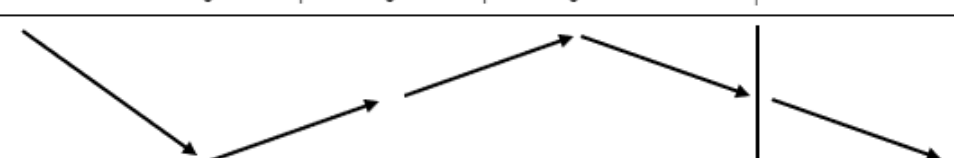
D. $f(4)$.

Lời giải

Chọn C

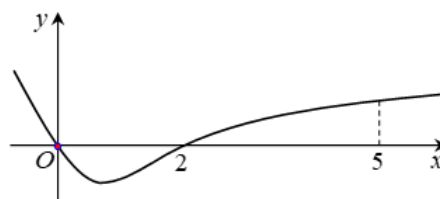
Xét: $f'(x) = -x(x-2)^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	-
$f(x)$						

Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\max_{[0;4]} f(x) = f(3)$.

Câu 31.10. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0 ; 5]$ lần lượt là



A. $f(0), f(5)$.

B. $f(2), f(0)$.

C. $f(1), f(3)$.

D. $f(5), f(2)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta được bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	0	2	5	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên, ta được: $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$.

Theo đề, ta có:

$$f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) - f(0) = f(3) - f(2) > 0 \Leftrightarrow f(5) > f(0) \\ \Rightarrow \max_{[0;5]} f(x) = f(5)$$

Câu 32. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{4-x^2} \geq 27$ là

- A.** $[-1; 1]$. **B.** $(-\infty; 1]$. **C.** $[-\sqrt{7}; \sqrt{7}]$. **D.** $[1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{4-x^2} \geq 27 \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq \log_3 27 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-1; 1]$.

Bài tập tương tự

Câu 32.1. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13} < 27$ là

- A.** $(4; +\infty)$. **B.** $(-4; 4)$. **C.** $(-\infty; 4)$. **D.** $(0; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $3^{x^2-13} < 27 \Leftrightarrow x^2 - 13 < \log_3 27 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 4$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-4; 4)$.

Câu 32.2. Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23} < 9$ là

- A.** $(-5; 5)$. **B.** $(-\infty; 5)$. **C.** $(5; +\infty)$. **D.** $(0; 5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3^{x^2-23} < 9 \Leftrightarrow x^2 - 23 < \log_3 9 \Leftrightarrow x^2 - 25 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 5$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-5; 5)$.

Câu 32.3 Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

- A.** $[0; 1)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2^{\sqrt{x}} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [0; 1)$.

Câu 32.4 Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > 2^{x-4}$ là

- A.** $S = (-2; +\infty)$. **B.** $S = (2; +\infty)$.
C. $S = (-2; 2)$. **D.** $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > 2^{x-4} \Leftrightarrow 2^{x-x^2} > 2^{x-4} \Leftrightarrow x - x^2 > x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-2; 2)$.

Câu 32.5 Hỏi bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 3.

Lời giải**Chọn D**

Ta có: $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10} \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+4} \leq 2^{10-2x} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 \leq 10 - 2x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$. Do $x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}$.

Câu 32.6 Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

- A. $[-2; 4]$. B. $[-4; 2]$. C. $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$. D. $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x - 1 \geq x^2 - x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-2; 4]$.

Câu 32.7 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36 - x^2) \geq 3$ là

- A. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3]$. C. $[-3; 3]$. D. $(0; 3]$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có: $\log_3(36 - x^2) \geq 3 \Leftrightarrow 36 - x^2 \geq 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-3; 3]$.

Câu 32.8 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31 - x^2) \geq 3$ là

- A. $(-\infty; 2]$. B. $[-2; 2]$. C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $(0; 2]$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $\log_3(31 - x^2) \geq 3 \Leftrightarrow 31 - x^2 \geq 3^3 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [-2; 2]$.

Câu 32.9 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right) < 1$ là

- A. $S = (0; 1)$. B. $S = \left(\frac{1}{8}; 1\right)$. C. $S = (1; 8)$. D. $S = (1; 3)$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{2}}x < 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x < 1$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(\frac{1}{8}; 1\right)$.

Câu 32.10 Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{6}}[\log_3(x - 2)] > 0$ là khoảng $(a; b)$. Giá trị $b - a$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $\log_{\frac{\pi}{6}}[\log_3(x - 2)] > 0 \Leftrightarrow 0 < \log_3(x - 2) < \left(\frac{\pi}{6}\right)^0 \Leftrightarrow 3^0 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow 3 < x < 5 \Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (3; 5) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow b - a = 2$.

CÂU 33 PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO**Câu 33.1.** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f(x) + 2x]dx = \int_0^1 f(x)dx + 2 \int_0^1 xdx = \int_0^1 f(x)dx + 1 = 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x)dx = 2 - 1 = 1.$$

Câu 33.2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 [f(x) + 3x^2]dx = 10$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. 18.

D. -18.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_0^2 [f(x) + 3x^2]dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 3x^2dx = \int_0^2 f(x)dx + 8 = 10.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^2 f(x)dx = 10 - 8 = 2.$$

Câu 33.3. Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10$ và $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6$. Khi đó $\int_1^3 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 7.

B. 6.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \int_1^3 [f(x) + 3g(x)]dx = 10 \\ \int_1^3 [2f(x) - g(x)]dx = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)dx + 3 \int_1^3 g(x)dx = 10 \\ 2 \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \int_1^3 f(x)dx = 4 \\ \int_1^3 g(x)dx = 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_1^3 [f(x) + g(x)]dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 4 + 2 = 6.$$

Câu 33.4. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)]dx$ bằng

A. 20.

B. 22.

C. 26.

D. 28.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int_1^3 [1 + f(x)]dx = \int_1^3 1dx + \int_1^3 f(x)dx = (x)|_1^3 + (x^3)|_1^3 = 2 + 26 = 28.$$

Câu 33.5. Nếu $\int_0^1 [xf'(x) - 2x]dx = f(1)$ thì $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\int_0^1 [xf'(x) - 2x]dx = \int_0^1 xf'(x)dx - \int_0^1 2xdx = \int_0^1 xf'(x)dx - 1 = f(1) \Rightarrow \int_0^1 xf'(x)dx = f(1) + 1. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 f(x)dx.$$

$$\text{Suy ra } f(1) - \int_0^1 f(x)dx = f(1) + 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = -1.$$

Câu 33.6. Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int f(x)dx = x^2 + x + C$ và $\int g(x)dx = x^4 + x^3 + C$. Khi đó $\int_0^1 [f(x)g(x)]dx$ bằng

A. $\frac{51}{10}$.

B. $\frac{71}{105}$.

C. 4.

D. $\frac{77}{60}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\int f(x)dx = x^2 + x + C \Rightarrow f(x) = 2x + 1.$$

$$\int g(x)dx = x^4 + x^3 + C \Rightarrow g(x) = 4x^3 + 3x^2.$$

Khi đó $\int_0^1 [f(x)g(x)]dx = \int_0^1 [(2x+1)(4x^3+3x^2)]dx = \frac{51}{10}$.

Câu 33.7. Nếu $\int_1^2 xf(x^2+1)dx = 2$ thì $\int_2^5 f(x)dx$ bằng.

- A. 2. B. 1. C. 4. D. -1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$
 $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó: $\int_1^2 xf(x^2+1)dx = \int_2^5 f(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_2^5 f(x)dx = 2$. Suy ra $\int_2^5 f(x)dx = 2.2 = 4$.

Câu 33.8. Nếu $\int_1^2 f(3x-1)dx = 20$ thì $\int_2^5 f(x)dx$ bằng

- A. 20. B. 40. C. 10. D. 60.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3x - 1 \Rightarrow dt = 3dx$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$
 $x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Khi đó: $\int_1^2 f(3x-1)dx = \frac{1}{3} \int_2^5 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_2^5 f(x)dx = 20$. Suy ra $\int_2^5 f(x)dx = 3.20 = 60$.

Câu 33.9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int f(-2x)dx = x^2 + 3x + C$. Khi đó $\int_0^3 f(x)\sqrt{x+1}dx$ bằng

- A. $\frac{94}{15}$. B. $\frac{442}{15}$. C. $-\frac{22}{15}$. D. $\frac{326}{15}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int f(-2x)dx = x^2 + 3x + C \Leftrightarrow f(-2x) = 2x + 3 \Leftrightarrow f(t) = -t + 3 \Leftrightarrow f(x) = -x + 3.$$

Khi đó $\int_0^3 f(x)\sqrt{x+1}dx = \int_0^3 (-x+3)\sqrt{x+1}dx = \frac{94}{15}$.

Câu 33.10. Biết hàm số $F(x) = \sqrt{2x-1} + x + 2021$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và tích phân $\int_1^2 f(2x+1)dx = \frac{a}{b} - \frac{\sqrt{5}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a^2b - b$ bằng

- A. 8. B. -8. C. 48. D. -48.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2x + 1 \Rightarrow dt = 2dx$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(2x+1)dx &= \frac{1}{2} \int_3^5 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_3^5 f(x)dx = \frac{1}{2} F(x) \Big|_3^5 = \frac{1}{2} [F(5) - F(3)] \\ &= \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a^2b - b = 5^2.2 - 2 = 48$.

Câu 34. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Môđun của số phức $(1+i)z$ bằng

- A. 50. B. 10. C. $\sqrt{10}$. D. $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Dùng tính chất môđun của tích: $|(1+i)z| = |1+i|.|3+4i| = \sqrt{2}.5 = 5\sqrt{2}$.

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 34.1. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Môđun của số phức $(z_1 + 2)z_2$ bằng

- A. 15. B. $5\sqrt{5}$. C. $\sqrt{65}$. D. $\sqrt{137}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|(z_1 + 2)z_2| = |z_1 + 2| \cdot |z_2| = |4 - 3i| \cdot |1 + 2i| = 5 \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

Câu 34.2. Cho hai số phức $z_1 = 3 - 4i$ và $z_2 = 4 + 3i$. Môđun của số phức $\frac{2z_1}{3z_2}$ bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{2z_1}{3z_2} = \frac{2(3-4i)}{3(4+3i)} = \frac{6-8i}{12+9i} \Rightarrow \left| \frac{2z_1}{3z_2} \right| = \frac{|2z_1|}{|3z_2|} = \frac{|6-8i|}{|12+9i|} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Câu 34.3. Cho số phức $z = -3 - 4i$. Tính môđun của số phức $w = iz + \frac{25}{z}$.

- A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. 5. D. $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $w = iz + \frac{25}{z} = \frac{iz^2 + 25}{z} = \frac{i(-3-4i)^2 + 25}{-3-4i} = \frac{i(9+24i-16) + 25}{-3-4i} = \frac{1-7i}{-3-4i}$.

$\Rightarrow |w| = \left| \frac{1-7i}{-3-4i} \right| = \frac{|1-7i|}{|3-4i|} = \frac{\sqrt{50}}{5} = \sqrt{2}$.

Câu 34.4. Tìm môđun của số phức $w = (1 + z)\bar{z}$, biết z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$.

- A. 2. B. $\sqrt{10}$. C. $\sqrt{8}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức z thỏa mãn đề bài có dạng $z = a + bi$.

Ta có: $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i \Leftrightarrow (3 + 2i)(a + bi) + 4 - 4i - 1 = 4 + i$

$\Leftrightarrow 3a - 2b + (2a + 3b)i = 1 + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 1 \\ 2a + 3b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = 1 + i$.

Vậy $|w| = |(1 + z)\bar{z}| = |1 + z| \cdot |\bar{z}| = |1 + 1 + i| \cdot |1 - i| = |2 + i| \cdot |1 - i| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$.

Câu 34.5. Cho hai số phức $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Môđun của số phức $(z_1 + 2)z_2$ bằng

- A. 15. B. $5\sqrt{5}$. C. $\sqrt{65}$. D. $\sqrt{137}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|(z_1 + 2)z_2| = |z_1 + 2| \cdot |z_2| = |4 - 3i| \cdot |1 + 2i| = 5 \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$.

Câu 34.6. Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm môđun của số phức $w = (1 + i)z - \bar{z}$.

- A. 3. B. 5. C. -4. D. $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $w = (1 + i)z - \bar{z} = (1 + i)(2 - 3i) - (2 + 3i) = (5 - i) - (2 + 3i) = 3 - 4i$.

$\Rightarrow |w| = |3 - 4i| = 5$.

Câu 34.7. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tìm môđun của số phức $z_1 + z_2$.

- A. $\sqrt{13}$. B. $\sqrt{5}$. C. 1. D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1 + z_2 = (1 + i) + (2 - 3i) = 3 - 2i \Rightarrow |z_1 + z_2| = |3 - 2i| = \sqrt{13}$.

Câu 34.8. Cho hai số phức $z = 1 + 3i$ và $w = 1 + i$. Môđun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

- A. $2\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{2}$. C. 20. D. 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z \cdot \bar{w} = (1 + 3i) \cdot (1 - i) = 4 + 2i \Rightarrow |z \cdot \bar{w}| = |4 + 2i| = 2\sqrt{5}$.

Câu 34.9. Tìm môđun của số phức $z = 1 + i^2 + i^4 + \dots + i^{2n} + \dots + i^{2016}$, $n \in \mathbb{N}$.

- A. $|z| = 2$. B. $|z| = 1$. C. $|z| = 1008$. D. $|z| = 2006$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z = 1 + i^2 + i^4 + \dots + i^{2n} + \dots + i^{2016}$, $n \in \mathbb{N}$

z là tổng của cấp số nhân có 1009 số hạng với $u_1 = 1, q = i^2 \Rightarrow z = \frac{1(1-i^{2018})}{1-i^2} = \frac{1-i^{2018}}{2} = 1$.

Vậy $|z| = 1$.

Câu 34.10. Cho số phức z thỏa $(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5-i$. Tìm môđun của số phức $w = 1 + 2z + z^2$.

- A. $|w| = 4$. B. $|w| = 2\sqrt{7}$. C. $|w| = 10$. D. $|w| = 100$.

Lời giải

Chọn C

Gọi số phức z thỏa mãn đề bài có dạng $z = a + bi$.

Ta có: $(2+i)z + \frac{1-i}{1+i} = 5-i \Leftrightarrow (2+i)(a+bi) + \frac{1-i}{1+i} = 5-i$

$\Leftrightarrow [2a-b+(a+2b)i](1+i) + 1-i = (5-i)(1+i)$

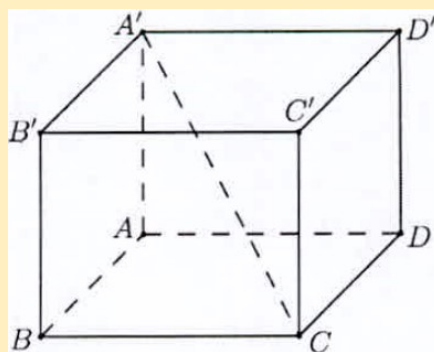
$\Leftrightarrow (2a-b-a-2b) + (2a-b+a+2b)i + 1-i = 6+4i$

$\Leftrightarrow (a-3b) + (3a+b)i = 5+5i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=5 \\ 3a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow z = 2-i$

Vậy $w = 1 + 2z + z^2 = 1 + 2(2-i) + (2-i)^2 = 1 + (4-2i) + (4-4i-1) = 8-6i \Rightarrow |w| = |8-6i| = 10$.

Câu 35. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

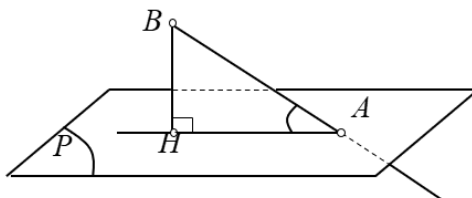
Chọn B

Góc cần tìm là $\widehat{A'CA} = \alpha$.

Vì đáy hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ và $\tan \alpha = \frac{AA'}{AC} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cần nhớ: “Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc tạo bởi nó và hình chiếu của nó lên mặt phẳng”.



B.1. Tìm giao điểm $AB \cap (P) = A$ (1)

B.2. Tìm hình chiếu H của B lên mặt phẳng (P) .

Đặt câu hỏi: “Đường nào qua B và vuông góc với (P) ?

Trả lời: $BH \perp (P)$ tại H (2) (nếu chưa có thì dựng)

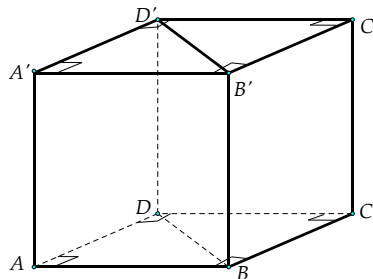
Từ (1), (2), suy ra AH là hình chiếu của AB lên mặt phẳng (P) .

Do đó góc giữa đường thẳng AB và (P) là góc giữa AB và AH , chính là góc $\widehat{BAH}$.

B.3. Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tìm góc (thường sử dụng tan).

Bài tập tương tự và mở rộng

Câu 35.1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (minh họa như hình bên).



Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng.

A. 60° .

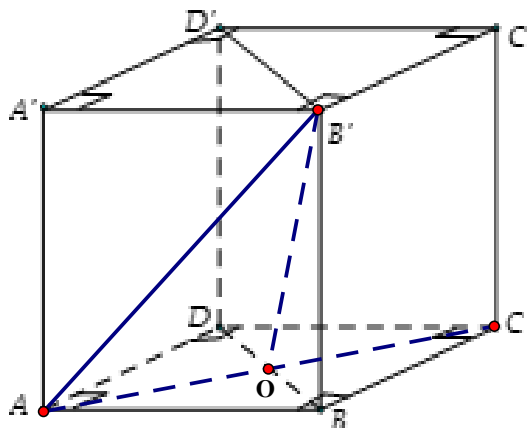
B. 90° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn D

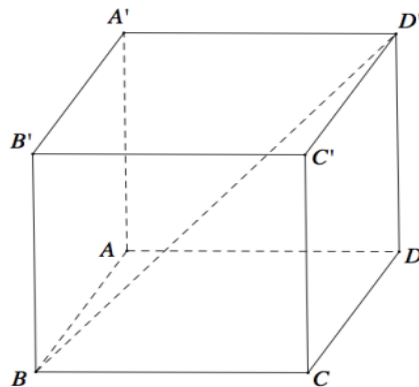


Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có góc cần tìm là $\widehat{AB'O} = \alpha$.

Ta có $AO = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $B'O = \sqrt{BB'^2 + BO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Khi đó $\tan \alpha = \frac{AO}{B'O} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Câu 35.2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ bên).



Tang góc giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

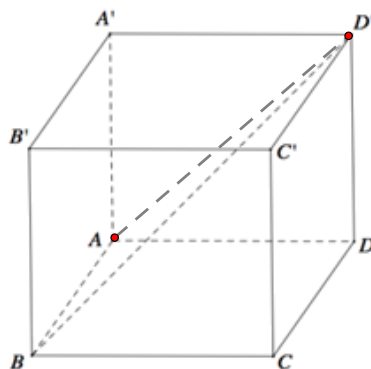
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Góc cần tìm là $\widehat{AD'B} = \alpha$.



Gọi cạnh của hình lập phương là a . Ta có $AD' = a\sqrt{2}$

Khi đó $\tan \alpha = \frac{AB}{AD'} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 35.3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a, AD = 2a$. Gọi góc giữa đường chéo $A'C$ và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là α . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

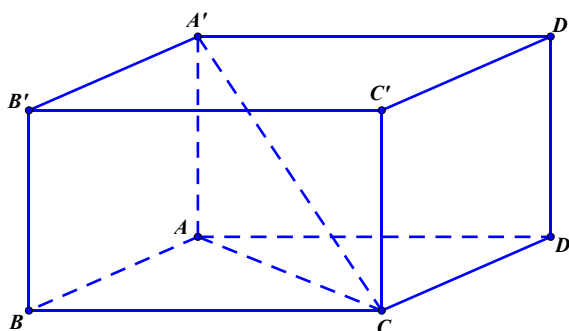
B. $\sqrt{5}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

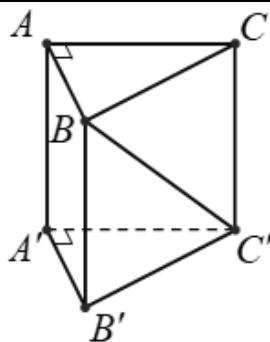
Chọn A



Góc cần tìm là $\widehat{A'CA} = \alpha$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$. Khi đó $\tan \alpha = \frac{A'A}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 35.4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AA' = a$ (tham khảo hình vẽ bên).



Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'B'C')$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Góc cần tìm là $\widehat{BC'B'} = \alpha$.

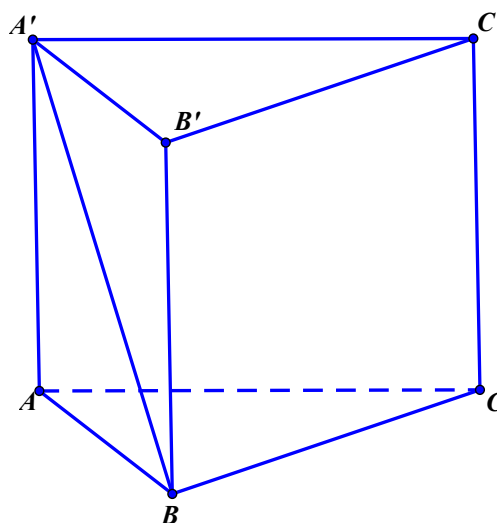
Ta có $B'C' = a\sqrt{2}$. Khi đó $\tan \alpha = \frac{B'B}{B'C'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 35.5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại B , $AB = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Góc cần tìm là $\widehat{A'BB'} = \alpha$.

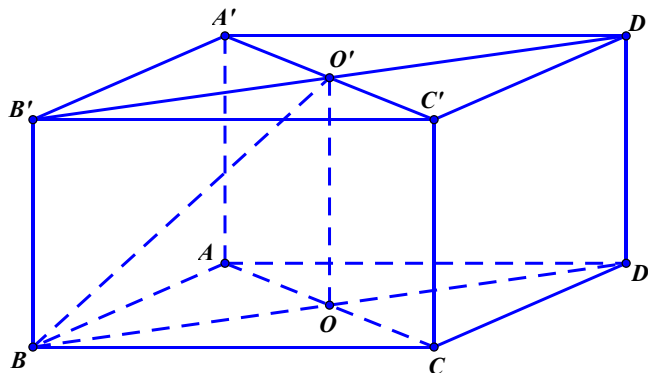
Ta có $\tan \alpha = \frac{A'B'}{BB'} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Câu 35.6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O' là trung điểm của của $A'C'$. Tính $\tan \alpha$ với α là góc tạo bởi BO' và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, khi đó góc cần tìm là $\widehat{O'BO} = \alpha$.

Gọi cạnh của hình lập phương là a

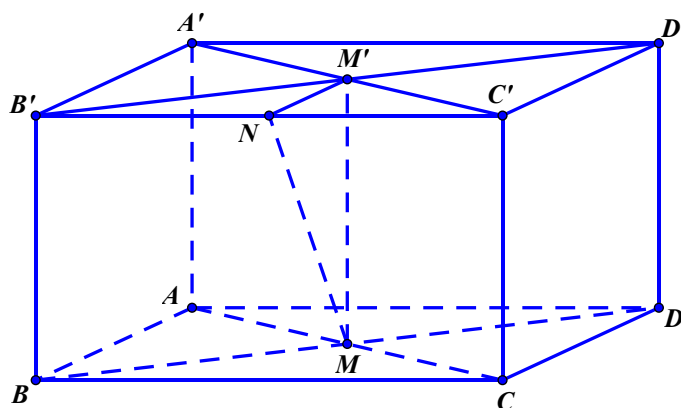
Ta có $OO' = a$, $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $\tan \alpha = \frac{OO'}{BO} = \sqrt{2}$.

Câu 35.7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$, α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Giá trị $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$, khi đó góc cần tìm là $\widehat{M'NM} = \alpha$.

Ta có $MM' = a$, $M'N = \frac{a}{2} \Rightarrow MN = \sqrt{MM'^2 + M'N^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

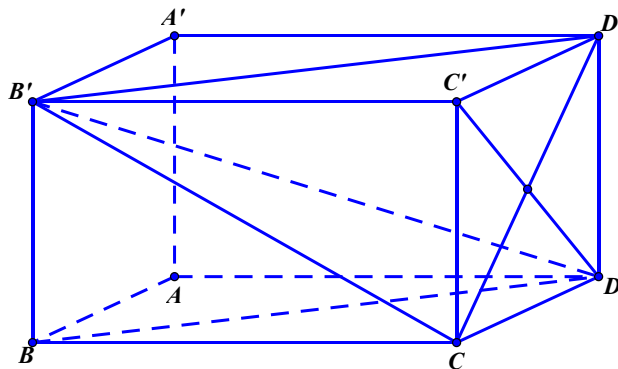
Khi đó $\sin \alpha = \frac{MM'}{MN} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 35.8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a\sqrt{6}$ và $AA' = 2a\sqrt{2}$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng $B'D$ và mặt phẳng $(B'D'C)$.

- A. $\sqrt{\frac{35}{38}}$. B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$. C. $\sqrt{\frac{1}{6}}$. D. $\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $\alpha = (\widehat{B'D, (B'D'C)})$; $d = d(D, (B'D'C))$ thì $\sin \alpha = \frac{d}{B'D}$.

Ta có $d = d(D, (B'D'C)) = d(C', (B'D'C))$

Do $C'.B'D'C$ là tứ diện vuông, nên $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{C'B'^2} + \frac{1}{C'D'^2} + \frac{1}{C'C^2} = \frac{19}{24a^2} \Rightarrow d = \frac{2a\sqrt{114}}{19}$

$$B'D = \sqrt{B'B^2 + BA^2 + BC^2} = 4a$$

Khi đó $\sin \alpha = \frac{d}{B'D} = \frac{\sqrt{114}}{38} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{35}{38}}$.

Câu 35.9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$. Khi đó $\sin \alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

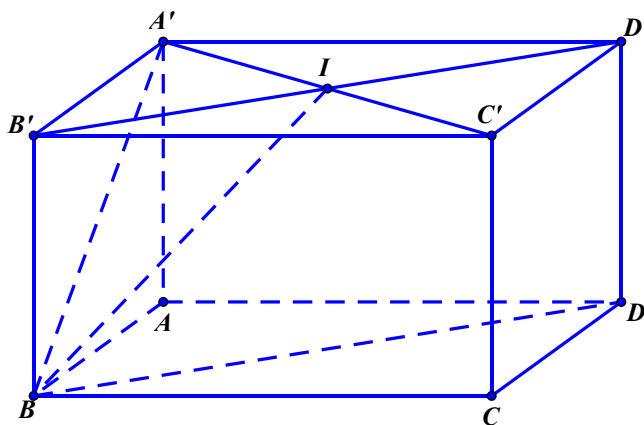
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

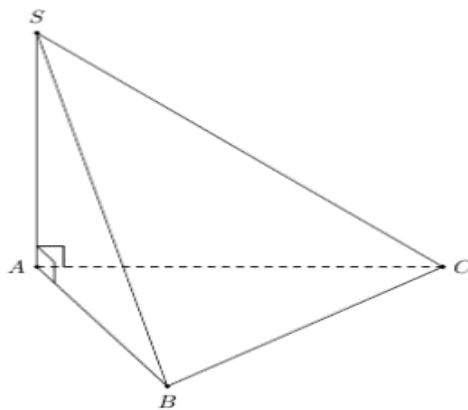
Chọn B



Gọi I là trung điểm của $B'D'$, khi đó góc cần tìm là $\widehat{A'BI} = \alpha$.

Ta có $A'I = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $A'B = a\sqrt{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{A'I}{A'B} = \frac{1}{2}$.

Câu 35.10. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = a\sqrt{2}$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình).



Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Chọn B

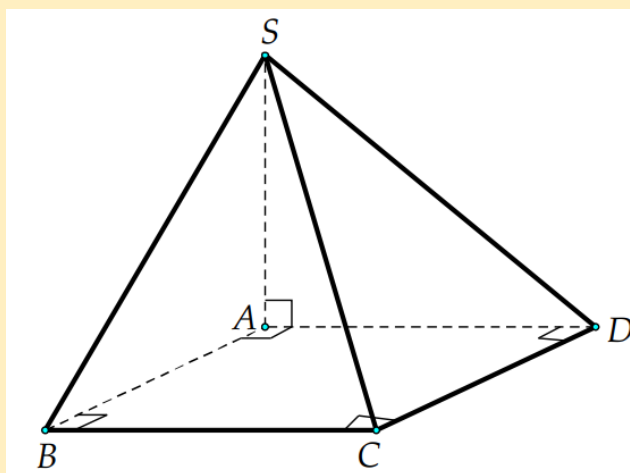
Góc cần tìm là $\widehat{SBA} = \alpha$.

Ta có $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$

Khi đó $\tan \alpha = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

CÂU 36 PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO

Câu 36. 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Biết $SA = a$ vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

C. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

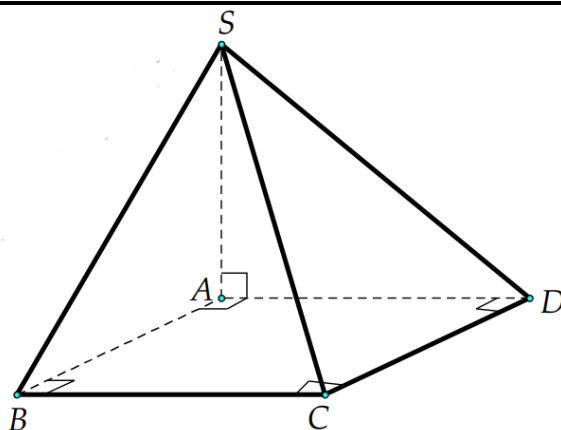
Lời giải

Chọn B

Vì ta có SA, AB, AD vuông góc nhau từng đôi một nên khi gọi H là hình chiếu của A lên (SBD)

thì $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} = d(A, (SBD))$.

Câu 36. 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy. Biết góc giữa SC và đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- D.** $\frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Xét tam giác vuông SAC có $\begin{cases} AC = a\sqrt{2} \\ \widehat{SCA} = (\widehat{SC, (\overline{ABCD})}) = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow SA = AC \tan 60^\circ = a\sqrt{6}.$

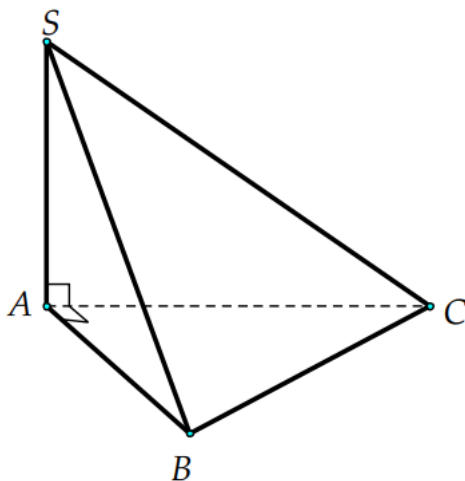
Ta có $d(B, (SCD)) = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SCD}} = \frac{3V_{SABD}}{S_{SCD}}$. Ta có $V_{SABD} = \frac{1}{6}AB \cdot AS \cdot AD = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3$.

Tam giác SCD vuông tại D và $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{7}$.

Do đó, $S_{SCD} = \frac{1}{2}SD \cdot CD = \frac{\sqrt{7}}{2}a^2$.

$$\text{Vây}, d(B, (SCD)) = \frac{3\left(\frac{\sqrt{6}}{6}a^3\right)}{\frac{\sqrt{7}}{2}a^2} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

Câu 36. 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở A , $SA = 4a$ vuông góc với đáy và $AB = 2a, AC = 3a$ (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- D.** $\frac{6a\sqrt{29}}{29}$.

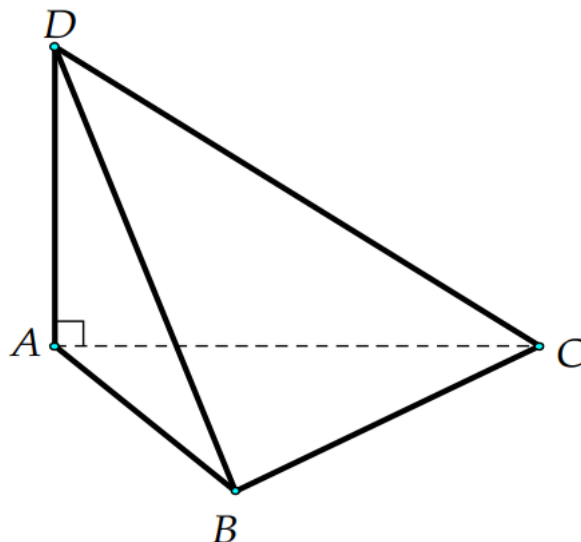
Lời giải

Chon A

Vì ta có SA, AB, AC vuông góc nhau từng đôi một nên khi gọi H là hình chiếu của A lên (SBC) thì

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{12a\sqrt{61}}{61} = d(A, (SBC)).$$

Câu 36.4. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AC = AD = 4$, $AB = 3$, $BC = 5$ (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\frac{12}{\sqrt{34}}$.

B. $\frac{60}{\sqrt{769}}$.

C. $\frac{\sqrt{769}}{60}$.

D. $\frac{\sqrt{34}}{12}$.

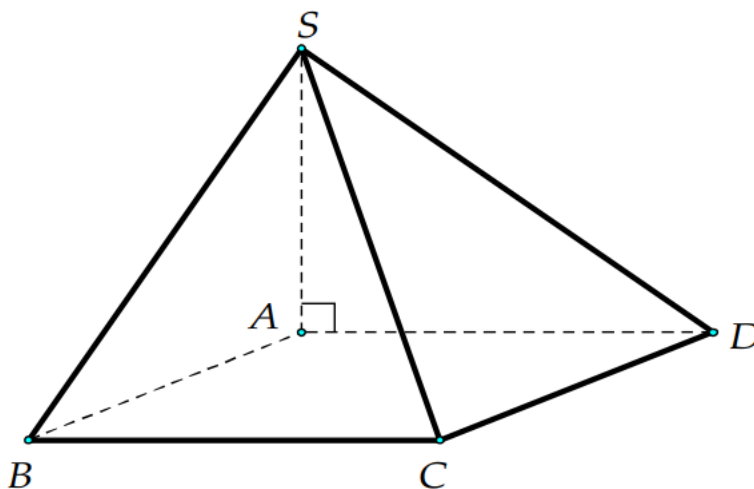
Lời giải

Chọn B

Vì $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên AB, AC vuông góc nhau. Do đó, ta có AD, AB, AC vuông góc nhau từng đôi một nên khi gọi H là hình chiếu của A lên (BCD) thì

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \Rightarrow AH = \frac{60}{\sqrt{769}} = d(A, (BCD)).$$

Câu 36. 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAC} = 60^\circ$, SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

B. $2a$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. a .

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có tam giác ABC đều cạnh a . Gọi AK là đường cao tam giác đều $ABC \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh $SK \Rightarrow AH \perp SK$.

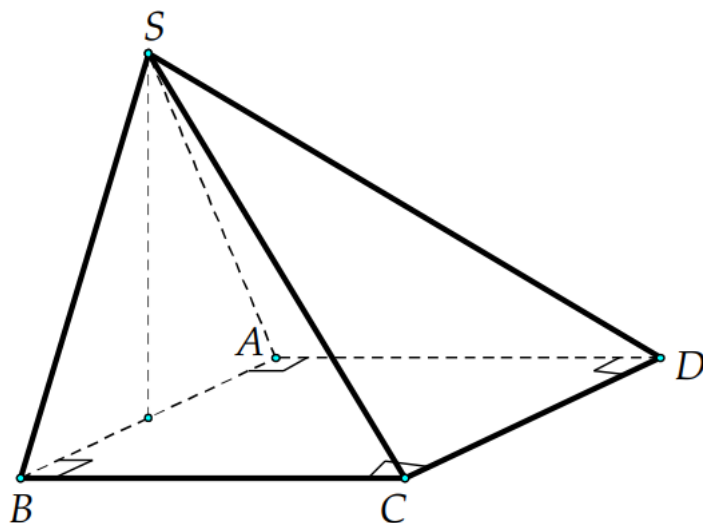
Ta có $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp AH$

Do đó, $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A, (SBC))$.

Vì $\begin{cases} SK \perp BC \\ AK \perp BC \end{cases} \Rightarrow (\widehat{SK, AK}) = (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = 60^\circ$ nên ta có

$$AH = AK \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}.$$

Câu 36. 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. 1.

B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

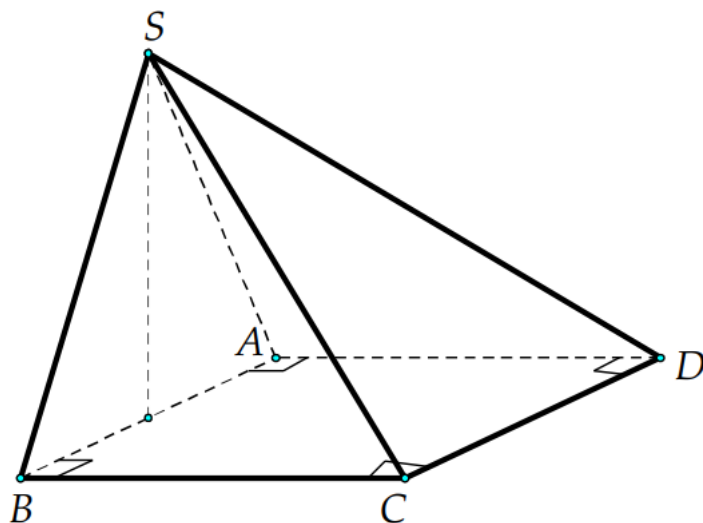
Chọn D

Gọi H là hình chiếu của S lên cạnh AB . Theo giả thiết ta có $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ là đường cao của hình chóp. Ta có $d(B, (SCD)) = d(H, (SCD))$. Gọi I là trung điểm của CD . Gọi K là hình chiếu của H lên cạnh SI . Ta có $\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HK \Rightarrow HK = d(H, (SCD))$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông SHI (có chiều cao HK) có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{1} = \frac{7}{3} \Rightarrow HK = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 36. 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAB đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

C. $\frac{2a\sqrt{2}}{9}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu của S lên cạnh AB .

Theo giả thiết ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ là đường cao của hình chóp.

Vì đường thẳng HG cắt mp(SBC) nên ta có

$$\frac{d(G, (SBC))}{d(H, (SBC))} = \frac{GS}{HS} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{2}{3}d(H, (SBC))$$

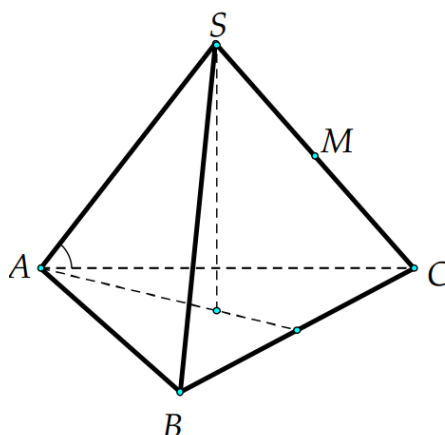
Goi K là hình chiếu của H lên cạnh $SB \Rightarrow HK \perp SB$. Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HK \Rightarrow HK = d(H, (SBC)).$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông SHB (có chiều cao HK) có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{1}{\frac{a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 36.8. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2a, AB = 3a$. Gọi M là trung điểm của SC (tham khảo hình vẽ).

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng

- D.** $\frac{3a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Vì đường thẳng CM cắt mp (SAB) tại S nên ta có

$$\frac{d(M, (SAB))}{d(C, (SAB))} = \frac{MS}{CS} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(M, (SAB)) = \frac{1}{2}d(C, (SAB))$$

Mặt khác, nếu gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC và CH là đường cao của nó thì ta có

$$\frac{d(C, (SAB))}{d(G, (SAB))} = \frac{CH}{GH} = 3 \Rightarrow d(C, (SAB)) = 3d(G, (SAB)).$$
 Do đó, ta có

$$d(M, (SAB)) = \frac{3}{2}d(G, (SAB)).$$

Ta có $CH = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Vì SH là đường trung tuyến của tam giác SAB nên

$$SH = \frac{\sqrt{2(SA^2 + SB^2) - AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{16a^2 - 9a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

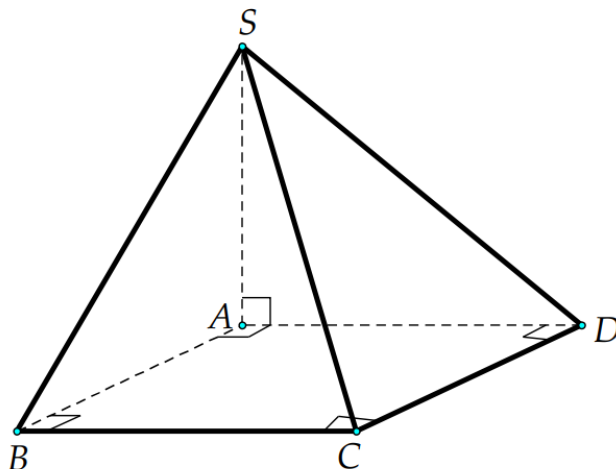
$$\text{Đường cao } SG \text{ của tứ diện đều có độ dài bằng } \sqrt{SH^2 - HG^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{4} - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = a.$$

Gọi HK là đường cao của tam giác vuông SHG (tại G) ta có

$$\begin{cases} GK \perp (SAB) \Rightarrow d(G; (SAB)) = GK \\ \frac{1}{GK^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GH^2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó, } \frac{1}{GK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow GK = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow d(M, (SAB)) = \frac{3a\sqrt{21}}{14}.$$

Câu 36.9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Cạnh $SA = 2a$ vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

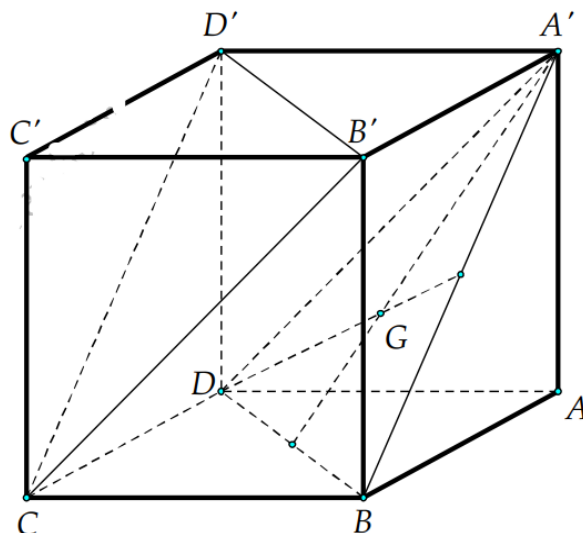
Lời giải

Chọn A

Ta có $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$. Vì AS, AD, AB đôi một vuông góc nên nếu gọi AH là đường cao của tứ diện $SABD$ thì

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{19a^2}{12} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Câu 36.10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác $A'BD$ đến mặt phẳng $(CB'D')$ bằng

A. $\frac{2a}{81}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi O là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$.

Vì $(CB'D') \parallel (A'BD) \Rightarrow d(G, (CB'D')) = d(A', (CB'D'))$. Mặt khác, mặt phẳng $(CB'D')$ cắt $A'C'$ tại trung điểm O nên $d(A', (CB'D')) = d(C', (CB'D'))$. Ta có $CC', DC', B'C'$ đôi một vuông góc nên nếu gọi $C'H$ là đường cao của tứ diện $CC'B'D'$ thì

$$\frac{1}{C'H^2} = \frac{1}{C'Dr^2} + \frac{1}{C'Br^2} + \frac{1}{C'C^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow C'H = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

CÂU 37 PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO

Câu 37.1. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1; 1; 1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$. B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$.
C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích mặt cầu là $S = 4\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = 1$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 37.2. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và đi qua điểm $A(5; -1; 4)$ có phương trình là

- A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{24}$. B. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \sqrt{24}$.
C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 24$. D. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 24$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu có tâm I và đi qua A nên bán kính mặt cầu là $r = IA =$

$$\sqrt{(5-1)^2 + (-1+3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{24}.$$

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 24$.

Câu 37.3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 1; 1)$ và đi qua điểm A là

- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$. D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu có tâm I và đi qua A nên bán kính mặt cầu là $r = IA =$

$$\sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 37.4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

- A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$. B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$. D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Lời giải

Chọn B

I là hình chiếu vuông góc của M trên $Ox \Rightarrow I(1; 0; 0)$

Bán kính mặt cầu là $r = IM = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Câu 37.5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 1)$ và $B(0; 3; -1)$. Phương trình mặt cầu (S) đường kính AB có phương trình là

- A. $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là tâm, r là bán kính mặt cầu (S)

$$AB = \sqrt{(0-2)^2 + (3-1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{3}$$

Mặt cầu (S) đường kính $AB \Rightarrow \begin{cases} I(1; 2; 0) \\ r = \frac{AB}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$.

Câu 37.6. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Hỏi phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và tiếp xúc với trục tung Oy .

- A.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{10}$. **B.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$. **D.** $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I trên $Oy \Rightarrow M(0; -2; 0)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$ và tiếp xúc với trục tung Oy nên bán kính mặt cầu là $r = IM = \sqrt{(0-1)^2 + (-2+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 37.7. Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) là

- A.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$. **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$. **D.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là hình chiếu vuông góc của I trên $(Oxy) \Rightarrow M(1; 2; 0)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) nên bán kính mặt cầu là $r = IM = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (0-3)^2} = 3$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Câu 37.8. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Phương trình mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

- A.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$. **D.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên bán kính mặt cầu là $r = d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 2$.

Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 37.9. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 6 = 0$ cắt trục Oy tại A và cắt đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+2}{1}$ tại B . Phương trình mặt cầu có tâm A và bán kính AB là

- A.** $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$. **B.** $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 3$.
C. $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 3$. **D.** $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 3$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 6 = 0$ cắt trục Oy tại $A \Rightarrow A(0; 3; 0)$

Mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 6 = 0$ cắt đường thẳng d tại $B \Rightarrow B(1; 2; -1)$

Bán kính mặt cầu là $r = AB = \sqrt{(1-0)^2 + (2-3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu là $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 3$.

Câu 37.10. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2; 2; 0), B(1; 0; 2), C(0; 4; 4)$. Phương trình mặt cầu có tâm A và đi qua trọng tâm G của tam giác ABC là

- A.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$. **B.** $(x+2)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$.
C. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$. **D.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$.

Lời giải

Chọn D

G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow G(1; 2; 2)$

Mặt cầu có tâm A và đi qua trọng tâm G nên bán kính mặt cầu là $r = AG =$

$$\sqrt{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}.$$

Phương trình mặt cầu là $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$.

Câu 38.1 Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

$A(1; 2; -3); B(3; -6; 1)$ là

A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}$.

B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+6}{-4} = \frac{z-1}{-2}$.

D. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -8; 4) = -2\vec{u}$ với $\vec{u}(-1; 4; -2)$. Tọa độ trung điểm M của AB là $M(2; -2; -1)$

Vậy đường thẳng AB đi qua điểm $M(2; -2; -1)$ có VTCP $\vec{u}(-1; 4; -2)$ nên phương chính tắc của AB là $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}$.

Câu 38.2 Trong không gian $Oxyz$, phương trình trung tuyến AM của tam giác ABC với

$A(3; 1; 2); B(-3; 2; 5); C(1; 6; -3)$ là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 3t \\ z = 8 - 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4 - 1t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 4 - t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Tọa độ trung điểm M của BC là $M(-1; 4; 1)$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (-4; 3; -1)$

Vậy đường thẳng AM đi qua điểm $M(-1; 4; 1)$ và có VTCP $(-4; 3; -1)$ nên phương trình tham số của AM là $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Câu 38.3 Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 3; 2)$

; $B(2; 0; 5); C(0; -2; 1)$. Phương trình trung tuyến AM của tam giác ABC

A. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{-4}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}$.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ trung điểm M của BC là $M(1; -1; 3)$

Ta có $\overrightarrow{AM} = (2; -4; 2)$

Vậy đường thẳng AM đi qua điểm $A(-1; 3; 2)$ và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{AM} = (2; -4; 2)$ nên phương trình tham số của AM là $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Câu 38.4 Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 3; 4)$ và song song với trục hoành là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + t \\ z = 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 4 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 4 + t \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Trục hoành có VTCP là $\vec{i}(1; 0; 0)$, Đường thẳng d song song với trục hoành suy ra $\vec{i}(1; 0; 0)$ là VTCP của d .

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 3; 4)$ và có VTCP $\vec{i}(1; 0; 0)$ nên phương tham số

$$\text{của } AM \text{ là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Câu 38.5 Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0; -1; 3); B(1; 0; 1); C(-1; 1; 2)$. Phương trình đường thẳng d đi qua A song song với BC là

A. $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

B. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-2; 1; 1)$

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A(0; -1; 3)$ và có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{BC} = (-2; 1; 1)$ nên phương trình chính tắc của d là $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 38.6 Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua $M(2; -1; 0)$ và song song với đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}$ là

A. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$.

B. $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$.

C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$.

D. $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d có VTCP: $\vec{u} = (1; -2; 3)$

Vậy đường thẳng a đi qua điểm $M(2; -1; 0)$ song song với d nên a có VTCP: $\vec{u} =$

$(1; -2; 3)$, suy ra phương trình chính tắc của d là $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{3}$.

Câu 38.7 Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oyz) là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (Oyz) có VTPT là $\vec{i}(1; 0; 0)$, Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (Oyz) VTCP của d là $\vec{i}(1; 0; 0)$.

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ suy ra $\vec{i}(1; 0; 0)$ là VTCP của d nên phương

trình tham số của d là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$.

Câu 38.8 Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua $M(2; 1; -4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x + 2y - 3z - 8 = 0$ là

A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{3}$.

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{-3}$.

D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) có VTPT: $\vec{n} = (2; 2; -3)$

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) suy ra $\vec{u} = \vec{n} = (2; 2; -3)$ là VTCP của d .

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 1; -4)$ có VTCP $\vec{u} = (2; 2; -3)$ nên phương trình chính tắc của d là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{-3}$.

Câu 38.9 Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua $A(2; -3; 4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - 3y + 5 = 0$ có phương trình là.

- A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 3t \\ z = 4 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -2 + 1t \\ y = 3 - 3t \\ z = -4 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có VTPT: $\vec{n} = (1; -3; 0)$

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{u} = \vec{n} = (1; -3; 0)$ là VTCP của d .

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $A(2; -3; 4)$ có VTCP $\vec{u} = (1; -3; 0)$ nên phương trình

tham số của d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 3t \\ z = 4 \end{cases}$.

Câu 38.10. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua $M(2; 1; -5)$, đồng thời vuông góc với hai véc tơ $\vec{a} = (1; 0; 1)$ và $\vec{b} = (4; 1; -1)$

- A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+5}{1}$. B. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-5}{1}$.
C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{-1}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{-5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi VTCP của đường thẳng d cần tìm là $\vec{u}$.

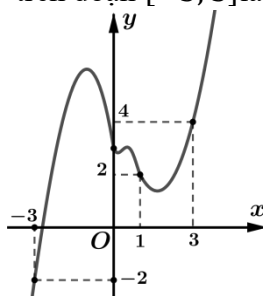
Đường thẳng d vuông góc với hai véc tơ $\vec{a} = (1; 0; 1)$ và $\vec{b} = (4; 1; -1)$.

$$\Rightarrow \vec{u} = [\vec{a}; \vec{b}] = (-1; 5; 1)$$

Vậy đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 1; -5)$ có VTCP $\vec{u} = (-1; 5; 1)$ nên phương trình chính tắc của d là $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+5}{1}$.

CÂU 39 PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO

Câu 39.1. Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ trên đoạn $[-3; 3]$ là:



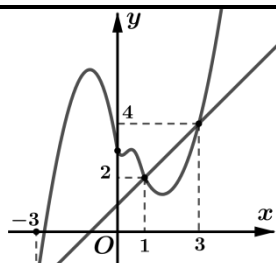
- A. $2f(3) - 16$. B. $2f(0) - 1$. C. $2f(-3) - 4$. D. $2f(1) - 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \rightarrow$ Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x+1$.



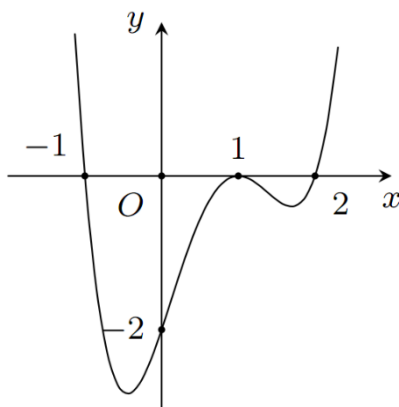
Dựa vào đồ thị ta được $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3		1		3	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$g(-3)$ $g(1)$ $g(3)$ $g(1)$ $g(-3)$ $g(3)$						

Từ BBT ta được $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1) = 2f(1) - 4$.

Câu 39.2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$ trên $[-1; 2]$ bằng



A. $f(2) + \frac{2}{3}$.

B. $f(-1) + \frac{2}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

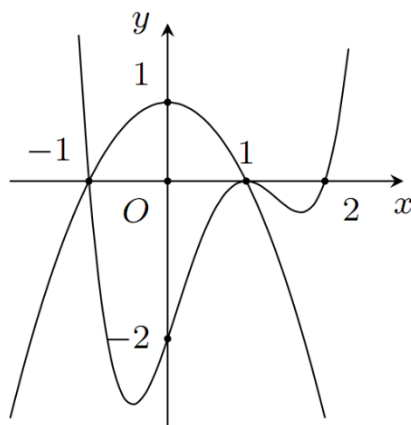
D. $f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$ với $x \in [-1; 2]$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) + x^2 - 1$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

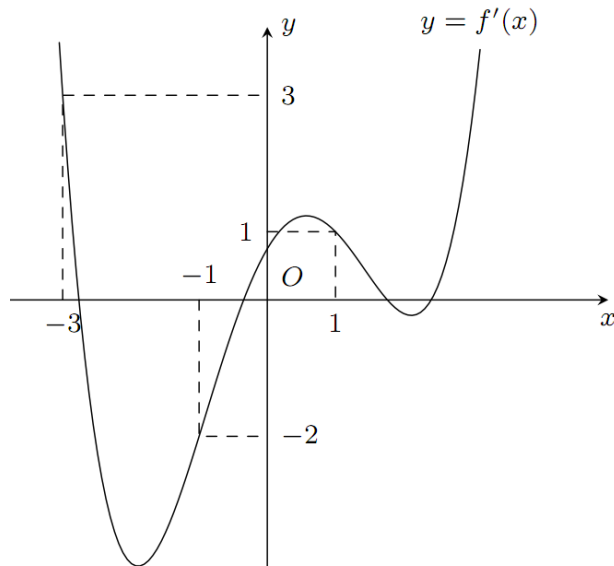


Bảng biến thiên:

x	-1	1	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$	$g(2)$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min_{[-1; 2]} g(x) = g(1) = f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 39.3. Cho đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2} + 20$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; 1]$ bằng



A. $g(-1)$.

B. $g(1)$.

C. $g(-3)$.

D. $g(-3) + g(1)$.

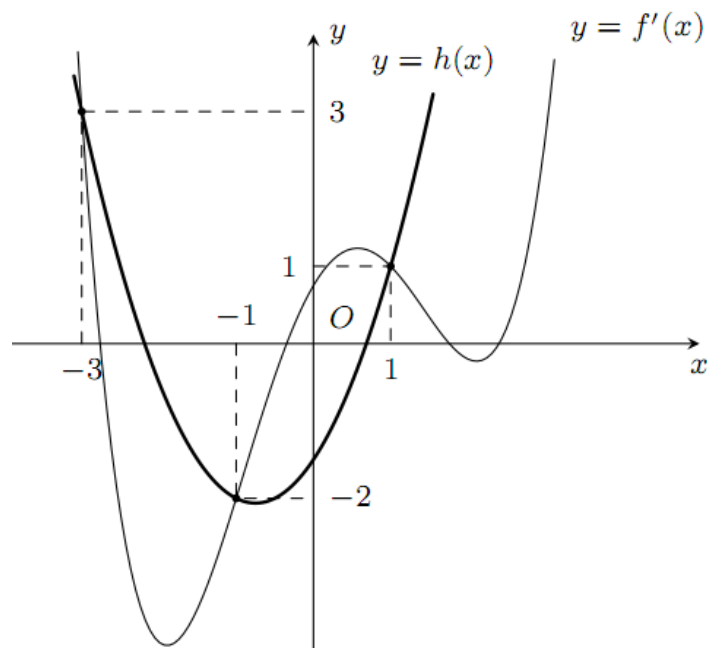
Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình $f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ là số giao điểm giữa hai đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.



Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1. \\ x = 1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	-3		-1		1
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$					

Vậy $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 39.4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình vẽ. Bất phương trình $f(x) < e^{x^2-2x+m}$ đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi

x	$-\infty$	-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

A. $m > f(0) - 1$. **B.** $m > f(1) - \frac{1}{e}$. **C.** $m \geq f(0) - 1$. **D.** $m \geq f(1) - \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) < e^{x^2-2x} + m \Leftrightarrow f(x) - e^{x^2-2x} < m$.

Đặt $g(x) = f(x) - e^{x^2-2x}$ với $x \in (0; 2)$.

$g'(x) = f'(x) - (2x - 2)e^{x^2-2x} = f'(x) - 2(x - 1)e^{x^2-2x}$.

Thấy:

Với $x \in (0; 1)$, ta có $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ 2(x - 1)e^{x^2-2x} < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (0; 1)$.

Với $x \in (1; 2)$, ta có $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ 2(x-1)e^{x^2-2x} > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) > 0, \forall x \in (1; 2)$.

Với $x = 1$, $g'(1) = f'(1) - 2(1-1)e^{-1} = 0$.

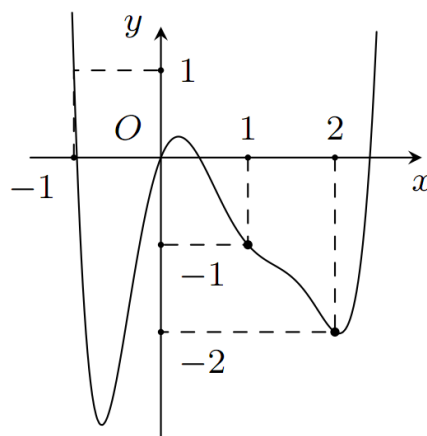
Bảng biến thiên:

x	0	1	2	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(2)$	

Bất phương trình $f(x) < e^{x^2-2x+m}$ đúng với mọi $x \in (0; 2)$ khi và chỉ khi:

$$m > \max_{(0; 2)} g(x) \Leftrightarrow m > g(1) \Leftrightarrow m > f(1) - \frac{1}{e}.$$

Câu 39.5. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm các giá trị của m để $m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$.



- A.** $m \geq 2f(0) - 1$. **B.** $m \leq 2f(0) - 1$. **C.** $m \leq 2f(-1)$. **D.** $m \geq 2f(-1)$.

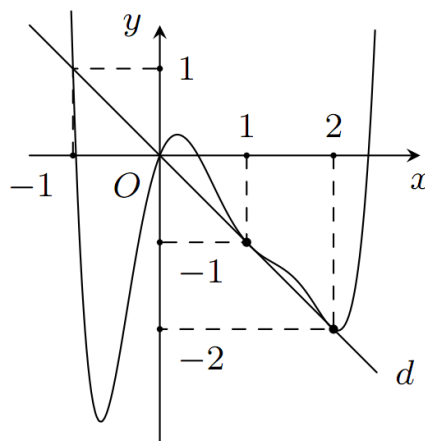
Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$ với $x \in (-3; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x+2) + 2x + 4$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2) = -(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = -1 \\ x+2 = 0 \\ x+2 = 1 \\ x+2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$



Bảng biến thiên:

x	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	$g(-3)$	$g(-2)$			$+\infty$

Bất phương trình $m \leq 2f(x+2) + x^2 + 4x + 3$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-3; +\infty)$ khi và chỉ khi: $m \leq g(x), \forall x \in (-3; +\infty) \Leftrightarrow m \leq \min_{(-3; +\infty)} g(x) \Leftrightarrow m \leq g(-2) = 2f(0) - 1$.

CÂU 40 PHÁT TRIỂN ĐỀ THAM KHẢO

Câu 40.1. Số giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $(2^{x+2} - \sqrt{2})(2^x - m) < 0$ có nghiệm nguyên và số nghiệm nguyên không quá 6 là

A. 29.

B. 33.

C. 32.

D. 31.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có : } (2^{x+2} - \sqrt{2})(2^x - m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+2} - \sqrt{2} < 0 \\ 2^x - m > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2^{x+2} - \sqrt{2} > 0 \\ 2^x - m < 0 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 2^{x+2} - \sqrt{2} < 0 \\ 2^x - m > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{x+2} - \sqrt{2} < 0 \\ 2^x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 < \frac{1}{2} \\ x > \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x > \log_2 m \end{cases} \quad (1)$$

Ta thấy trong trường hợp này để phương trình có nhiều nhất là 6 nghiệm nguyên thì các giá trị có thể của x là: $-2; -3; -4; -5; -6; -7$. Từ đó suy ra giá trị của m có thể thỏa mãn điều kiện (1) là $m < 2^{-7} = \frac{1}{128}$. Nhưng do đề bài yêu cầu m là số nguyên dương nên trong trường hợp này không có giá trị m nào thỏa mãn.

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 2^{x+2} - \sqrt{2} > 0 \\ 2^x - m < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{x+2} - \sqrt{2} > 0 \\ 2^x - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > \frac{1}{2} \\ x < \log_2 m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x < \log_2 m \end{cases} \quad (2)$$

Ta thấy trong trường hợp này để phương trình có nhiều nhất là 6 nghiệm nguyên thì các giá trị có thể của x là: $-1; 0; 1; 2; 3; 4$. Từ đó suy ra giá trị m có thể thỏa mãn điều kiện (2) là $\log_2 m \leq 5 \Rightarrow m \leq 32$. Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; \dots; 32\}$.
 Vậy có 32 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề.

Câu 40.2. Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $2\log_2^2 x - (m+1)\log_2 x + m - 1 < 0$ có nghiệm nguyên dương và tập nghiệm chứa không quá 10 số nguyên dương là
A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$$2\log_2^2 x - (m+1)\log_2 x + m - 1 < 0 \Rightarrow m(1 - \log_2 x) < \log_2 x - 2\log_2^2 x \quad (1).$$

Trường hợp 1: $1 - \log_2 x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

$$(1) \Leftrightarrow m < \frac{\log_2 x - 2\log_2^2 x}{1 - \log_2 x}$$

Đặt $g(x) = \frac{\log_2 x - 2\log_2^2 x}{1 - \log_2 x}$. Ta đi khảo sát hàm số của $g(x)$.

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x \ln 2} (1 - 4\log_2 x + 2\log_2^2 x)}{(1 - \log_2 x)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = x_1 \\ x = 2^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = x_2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	0	x_2	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	0.1715	$-\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy ở trường hợp này mọi giá trị $m \leq 0$ đều cho bất phương trình 1 nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề, đó là 1.

Trường hợp 2: $1 - \log_2 x < 0 \Leftrightarrow x > 2$

$$(1) \Leftrightarrow m > \frac{\log_2 x - 2\log_2^2 x}{1 - \log_2 x} = g(x).$$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$:

x	2	x_1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	5.828	$+\infty$

Các giá trị của x thỏa mãn yêu cầu đề là: 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy các giá trị của m để phương trình có thể có những nghiệm trên là $m < g(13) = 8.77 \Rightarrow m \leq 8$. Tuy nhiên trên thực tế, với $m = 8$ ta chỉ có tối đa 7 nghiệm

thỏa mãn yêu cầu đề vì $g(10) = 8.07$. Vậy trường hợp này có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề.

- Câu 40.3.** Số giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $3^{2x+2} - 3^x(3^{m+2} + 1) + 3^m < 0$ có nghiệm nguyên và số nghiệm nguyên không quá 30 là
- A. 28. B. 29. C. 30. D. 31.

Lời giải

Chọn D

$$3^{2x+2} - 3^x(3^{m+2} + 1) + 3^m < 0 \Leftrightarrow 3^m(1 - 3^{x+2}) - (3^x - 3^{2x+2}) < 0 \Leftrightarrow (3^m - 3^x)(1 - 3^{x+2}) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^m - 3^x > 0 \\ 1 - 3^{x+2} < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 3^m - 3^x < 0 \\ 1 - 3^{x+2} > 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} 3^m - 3^x > 0 \\ 1 - 3^{x+2} < 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3^m - 3^x > 0 \\ 1 - 3^{x+2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > x \\ 0 < x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > x \\ x > -2 \end{cases}$$

Từ đây suy ra, các giá trị của x thỏa mãn yêu cầu đề là $x \in [-1; 28]$. Suy ra $m \leq 29$.

Do yêu cầu m nguyên dương nên đối với trường hợp này có 29 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 3^m - 3^x < 0 \\ 1 - 3^{x+2} > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3^m - 3^x < 0 \\ 1 - 3^{x+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < x \\ x < -2 \end{cases}$$

Trong trường hợp này, do đề yêu cầu m nguyên dương nên sẽ không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu đề.

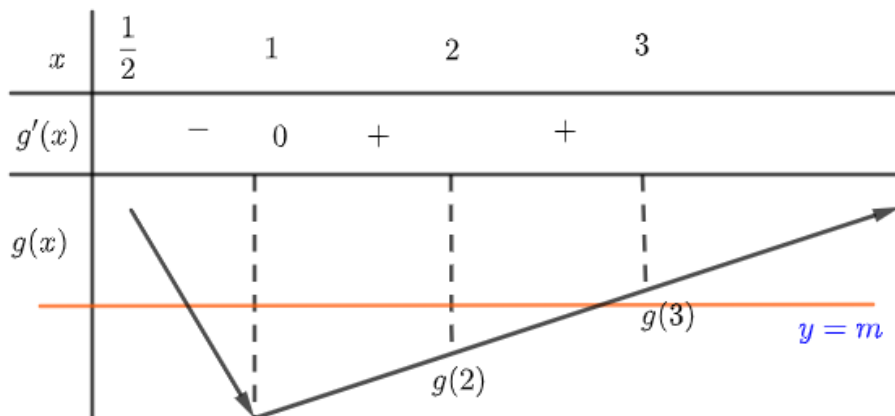
- Câu 40.4.** Số giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\ln(x^2 + 2x + m) > 2\ln(2x - 1)$ có đúng 2 nghiệm nguyên là
- A. 4. B. 8. C. 3. D. 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có: Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2 + 2x + m > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 - 2x \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

$$2\ln(2x - 1) < \ln(x^2 + 2x + m) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + m > (2x - 1)^2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3x^2 - 6x + 1 = g(x) \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Để thấy $g = 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị là đường parabol có đỉnh tại $(1; -2)$. Do điều kiện xác định là $x > \frac{1}{2}$ nên 2 nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề là $x = 1; x = 2$. Suy ra $g(2) < m \leq g(3) \Leftrightarrow 1 < m \leq 10$. Suy ra có tất cả 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề.

Câu 40.6. Gọi S là tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $mx^2 + \log_2(mx^2) > 2^{\log_2^2 x} + \log_2^2 x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập hợp S có đúng 8 phần tử?

- A.** 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $\begin{cases} x > 0 \\ m > 0 \end{cases}$.

Đặt $u = \log_2(mx^2) \Rightarrow mx^2 = 2^u$

Bất phương trình đã cho trở thành $2^u + u > 2^{\log_2^2 x} + \log_2^2 x$ (*).

Xét hàm số $f(v) = 2^v + v$ có $f'(v) = 2^v \cdot \ln 2 + 1 > 0$ với mọi $v \in \mathbb{R}$

Suy ra hàm số $f(v)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (*) suy ra $u > \log_2^2 x$

$$\Leftrightarrow \log_2(mx^2) > \log_2^2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 m + 2\log_2 x > \log_2^2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 m > \log_2^2 x - 2\log_2 x (**)$$

Đặt $t = \log_2 x$ phương trình (**) trở thành $\log_2 m > t^2 - 2t$

Xét hàm số $y = f(t) = t^2 - 2t$ trên khoảng $(0; +\infty)$

$$f'(t) = 2t - 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

t	0	1	8	$+\infty$
$f(t)$	0		3	$+\infty$
		-1		

Bất phương trình (**) có đúng 8 nghiệm nguyên khi

$$f(8) < \log_2 m < f(9)$$

$$\Leftrightarrow 3 < \log_2 m < \log_2^2 9 - 2\log_2 9$$

$$\Leftrightarrow 8 < m < 2^{\log_2^2 9 - 2\log_2 9}$$

$$\Leftrightarrow 8 < m < 13,07$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m .

Câu 40.7. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của $y \in [-2021; 2021]$ sao cho ứng với mỗi y thì có đúng 2 giá trị của x thỏa mãn $4x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{e^{x+y}} \geq e^{x+y} + 3x^2$

- A.** 2020. **B.** 4040. **C.** 2022. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn D

Đặt $a = \sqrt[4]{e^{x+y}}$ và $b = \sqrt{x}$ ta có $a > 0$ và $b \geq 0$.

Bất phương trình đã cho trở thành $4ab^3 \geq a^4 + 3b^4$

$$\Leftrightarrow a^4 + 3b^4 - 4ab^3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2(a^2 + 2ab + 3b^2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

Ta được $x^2 = e^{x+y} \Rightarrow y = 2\ln x - x$

Xét hàm số $y = 2\ln x - x$ có $y' = \frac{2}{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-
y		$2\ln 2 - 2$	

Do y là số nguyên thuộc $[-2021; 2021]$ sao cho ứng với mỗi y thì có đúng 2 giá trị của x nên ta phải có $y \in [-2021; 2\ln 2 - 2] \approx [-2021; -0,6]$ nên có 2021 số y .

Câu 40.9. Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(\sqrt{x} + \sqrt{x - 4^y}) \cdot \log_2(\sqrt{x} - \sqrt{x - 4^y}) = y^2 + y$. Có bao nhiêu số nguyên không âm y sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn đẳng thức trên ?

- A. 0. B. 1. C. 7. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(\sqrt{x} + \sqrt{x - 4^y}) \cdot \log_2(\sqrt{x} - \sqrt{x - 4^y}) = y^2 + y$ (1)

Xét $\log_2(\sqrt{x} + \sqrt{x - 4^y}) + \log_2(\sqrt{x} - \sqrt{x - 4^y}) = \log_2(x - (x - 4^y)) = \log_2 4^y = 2y$ (2)

Từ (1) và (2) áp dụng điều kiện có nghiệm $S^2 - 4P \geq 0$ ta có $(2y)^2 - 4(y^2 + y) \geq 0 \Leftrightarrow -4y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$

Mà theo đề y là số nguyên không âm nên suy ra $y = 0$.

Như vậy có 1 giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Câu 40.9. Xét các số thực x, y thỏa mãn $\log_2(x^2 + y) + \frac{1}{\log_2(x+y)} = y + 1$. Có bao nhiêu số nguyên $y \in [-3; 1]$ để tồn tại số thực $x \in [1; +\infty)$ thỏa mãn đẳng thức trên ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(x^2 + y) + \frac{1}{\log_2(x+y)} = y + 1 \Leftrightarrow \log_2(x^2 + y) + \log_{x+y} 2 = y + 1$ (1)

Xét $\log_2(x^2 + y) \cdot \log_{x+y} 2 = \log_{x+y}(x^2 + y) \geq \log_{x+y}(x + y) = 1$ (2)

Từ (1) và (2), áp dụng điều kiện có nghiệm $S^2 \geq 4P \Rightarrow (y + 1)^2 \geq 4\log_{x+y}(x^2 + y) \geq 4$

$\Rightarrow \begin{cases} y + 1 \geq 2 \\ y + 1 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y \leq -3 \end{cases}$. Mà theo đề $y \in [-3; 1]$ nên ta có $y = -3$ hoặc $y = 1$.

Với $y = 1$ thì $\log_2(x^2 + 1) + \log_{x+1} 2 = 2$ có một nghiệm là $x = 1$ nên nhận $y = 1$.

Với $y = -3$ thì $\log_2(x^2 - 3) + \log_{x-3} 2 = -2 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 3) + \log_{x-3} 2 + 2 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 3) + \log_{x-3} 2 + 2$ có $f(3) \cdot f(4) < 0$ nên tồn tại $x = x_0 \in (3; 4)$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0 \Rightarrow$ nhận $y = -3$.

Vậy có 2 giá trị của y thỏa mãn bài toán.

Câu 40.10. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3(x + 2y) = \log_2(x^2 + y^2)$?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_3(x + 2y) = \log_2(x^2 + y^2) = t$

Ta có $\begin{cases} x + 2y = 3^t \\ x^2 + y^2 = 2^t \end{cases}$

Suy ra $9^t \leq 5(x^2 + y^2) = 5 \cdot 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^t \leq 5 \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{9}{2}} 5 \approx 1,07 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2$

Mà x và y là các số nguyên nên có $y = 0$ hoặc $y = \pm 1$

Thử lại:

Với $y = 0$ ta có $\begin{cases} x = 3^t \\ x^2 = 2^t \end{cases}$ luôn có nghiệm $x = 1$.

Với $y = 1$ ta có $\begin{cases} x = 3^t - 2 \\ x^2 = 2^t - 1 \end{cases} \Rightarrow 9^t - 4 \cdot 3^t - 2^t + 5 = 0$ luôn có 1 nghiệm $t = 1$.

Với $y = -1$ ta có $\begin{cases} x = 3^t + 2 \\ x^2 = 2^t - 1 \end{cases} \Rightarrow 9^t + 4 \cdot 3^t + 5 = 2^t$ vô nghiệm

Vậy có $y = 0$ và $y = 1$ thỏa mãn đề bài.