**HÀM SỐ LIÊN TỤC**

**A. LÝ THUYẾT**

**1. Định nghĩa**

**Định nghĩa 1**

Cho hàm số  xác định trên khoảng  và  Hàm số  được gọi là *liên tục* tại  nếu 

Hàm số  không liên tụctại  được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

**Chú ý:** Khi xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, đặc biệt lưu ý đến điều kiện hàm số xác định trên một khoảng (dù nhỏ) chứa điểm đó.

**Định nghĩa 2**

Hàm số  được gọi là ***liên tục trên một khoảng*** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số  được gọi là ***liên tục trên một đoạn *** nếu nó liên tục trên khoảng  và 

Khái niệm liên tục của hàm số trên nửa khoảng như  được định nghĩa một cách tương tự.

**Chú ý:** Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó

|  |  |
| --- | --- |
| y    a O b x | y  a  O b x |
| Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng | Đồ thị của hàm số không liên tục trên khoảng |

**Định lý 2**

Giả sử  và  là hai hàm số liên tục tại điểm  Khi đó:

a) Các hàm số  liên tục tại điểm 

b) Hàm số  liên tục tại điểm nếu 

**Chú ý:** Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

2. **Một số định lí cơ bản**

**Định lí 1**

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực

b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), các hàm số lượng giác, Các hàm số sơ cấp liên tục trên từng khoảng xác định của chúng

**Định lí 3**

Nếu hàm số  liên tục trên đoạn  và  thì tồn tại ít nhất một điểm  sao cho .

Nói cách khác:

Nếu hàm số  liên tục trên đoạn  và  thì phương trình  có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng .

**Chú ý:** Một phương pháp chứng minh phương trình  có nghiệm trên khoảng :

- Chứng minh hàm số  liên tục trên đoạn .

- Chứng minh .

**B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC**

***Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm***

*Phương pháp chung:*

Cho hàm số  xác định trên khoảng  và . Để xét tính liên tục của hàm số  tại  ta làm như sau:

* Tính ;
* Tính .
* Nếu  thì kết luận hàm số liên tục tại .
* Nếu  không tồn tại hoặcthì kết luận hàm số không liên tục tại

Khi xét tính liên tục của hàm số trên một tập, ta sử dụng Định lí 1, Định lí 2 đã nêu trong phần Lí thuyết.

Áp dụng : Xét tính liên tục của hàm số tại điểm được chỉ ra :

a) (tại ) b) (tại )

**Lời giải**

**a)** Ta có: 

 hàm số liên tục tại 

b) Ta có: .

* Lại có 
* 

Từ đó  hàm số liên tục tại .

***Dạng 2 : Xét tính liên tục của hàm số trên khoảng, đoạn***

***Phương pháp***

* Để chứng minh hàm số  liên tục trên một khoảng, đoạn ta dùng các định nghĩa về hàm số liên tục trên khoảng, đoạn và các nhận xét để suy ra kết luận.
* Khi nói xét tính liên tục của hàm số (mà không nói rõ gì hơn) thì ta hiểu phải xét tính liên tục trên tập xác định của nó.
* Tìm các điểm gián đoạn của hàm số tức là xét xem trên tập xác định của nó hàm số không liên tục tại các điểm nào

Áp dụng : 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) b)

**Lời giải**

**a)** 

**☞** Do đó, hàm số này liên tục tại 

**b)** 

* Mà  khi nên 

**☞**  Do đó, hàm số đã cho liên tục khi 

2. Tìm các giá trị của  để các hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

a) b)

**Lời giải**

**a)** Hàm số  liên tục với .

* Do đó liên tục trên  liên tục tại  
* Ta có 
* Khi đó .

**b)** Ta có: 

* Từ 

***DẠNG 3. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM***

***Phương pháp giải:***

* Biến đổi phương trình về dạng: 
* Tìm hai số ,  sao cho  (Dùng chức nắng TABLE của máy tính (Mode 7) tìm cho nhanh)
* Chứng minh  liên tục trên  từ đó suy ra  có nghiệm

**🕮 *Chú ý:***

* Nếu  thì phương trình có nghiệm thuộc 
* Để chứng minh  có ít nhất  nghiệm trên  , ta chia đoạn  thành  khoảng nhỏ rời nhau, rồi chứng minh trên mỗi khoảng đó phương trình có ít nhất một nghiệm.

Áp dụng: Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

a) b)

**Lời giải**

**a)** Dễ thấy hàm  liên tục trên . Ta có:

* tồn tại một số 
*  tồn tại một số 
*  tồn tại một số 
* Do ba khoảng  và  đôi một không giao nhau nên phương trình  có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.
* Mà phương trình bậc 3 thì chỉ có tối đa là 3 nghiệm nên  có đúng 3 nghiệm phân biệt.

**b)** Đặt .

* Xét hàm số  liên tục trên .
* Ta có:  tồn tại 3 số và  lần lượt thuộc 3 khoảng đôi một không giao nhau là  và  sao cho  và do đây là phương trình bậc 3 nên  có đúng 3 nghiệm phân biệt.
* Ứng với mỗi giá trị và  ta tìm được duy nhất một giá trị  thỏa mãn  và hiển nhiên 3 giá trị này khác nhau nên PT ban đầu có đúng 3 nghiệm phân biệt.