**GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ**

**A. LÝ THUYẾT**

**I. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm**

**1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm**

**Định nghĩa 1:**

Cho  là một khoảng chứa điểm  và hàm số  xác định trên  hoặc trên với mọi dãy số  mà  ta có 

**Nhận xét:**

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.

- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại .

**Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên):**

Cho hàm số  xác định trên khoảng  với mọi dãy số  mà  ta có 

Cho hàm số  xác định trên khoảng với mọi dãy số  mà  ta có 

**Chú ý:**

 nghĩa là  và 

 nghĩa là  và 

**Định lí 1**



**2. Giới hạn vô cực tại một điểm**

**Định nghĩa 3**

Cho  là một khoảng chứa điểm  và hàm số  xác định trên  hoặc trên  với mọi dãy số  mà  ta có 

**Lưu ý:**

Các định nghĩa được phát biểu hoàn toàn tương tự.

**3. Lưu ý:**

a)  không nhất thiết phải xác định tại điểm .

b) Ta chỉ xét giới hạn của  tại điểm  nếu có một khoảng  (dù nhỏ) chứa  mà  xác định trên  hoặc trên 

*Chẳng hạn, hàm số*  *có tập xác định là* *. Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm* *, do không có một khoảng  nào chứa điểm*  *mà  xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của  tại mọi điểm* 

c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của  tại điểm  nếu có một khoảng  (khoảng nằm bên phải ) mà  xác định trên đó.

Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của  tại điểm  nếu có một khoảng  (khoảng nằm bên trái ) mà  xác định trên đó.

*Chẳng hạn, với hàm số* *, tại điểm* *, ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số* *, tại điểm* *, ta chỉ xét giới hạn bên trái.*

d) 



**II. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại vô cực**

**1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực**

**Định nghĩa 4**

|  |
| --- |
| Cho hàm số  xác định trên khoảng  với mọi dãy số ,  và  ta đều có . |

**LƯU Ý:** Định nghĩa được phát biểu hoàn toàn tương tự.

**2. Giới hạn vô cực tại vô cực**

**Định nghĩa 5**

|  |
| --- |
| Cho hàm số  xác định trên khoảng  với mọi dãy số ,  và  ta đều có . |

**LƯU Ý:** Các định nghĩa:  được phát biểu hoàn toàn tương tự.

**III. Một số giới hạn đặc biệt**

|  |
| --- |
| a) .  b) (  là hằng số )  c)  ( là hằng số,  nguyên dương ).  d)  với  nguyên dương;  nếu  là số nguyên lẻ;  nếu  là số nguyên chẵn. |

Nhận xét: .

**IV. Định lí về giới hạn hữu hạn**

**Định lí 2**

|  |
| --- |
| Giả sử  và . Khi đó  a) .  b) ; với là một là một hằng số.  c) . |

**Chú ý:** Giới hạn hữu hạn, giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

**Định lí 3**

|  |
| --- |
| Giả sử . Khi đó  a) .  b) .  c) Nếu  với mọi , trong đó  là khoảng nào đó chứa , thì  và . |

**LƯU Ý:** Định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay  bởi ,.

**V. Quy tắc về giới hạn vô cực**

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp:  và .

Tuyên nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp .

**Quy tắc 1 ( Quy tắc tìm giới hạn của tích ).**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |
|  |  |  |
|  |  |

**Chú ý: Giới hạn của tích hai hàm số**

- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

**Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | Dấu của |  |
|  |  | Tùy ý | 0 |
|  | 0 | + |  |
| - |  |
|  | 0 | + |  |
| - |  |

( Dấu của  xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với ).

**Chú ý:** Giới hạn của thương hai hàm số. Tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0:

- Mẫu thức càng tang ( dần đến vô cực) thì phân thức càng nhỏ (dần đến 0).

- Mẫu thức càng nhỏ (dần đến 0) thì phân thức có giá trị tuyệt đối càng lớn (dần đến vô cực).

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép chia hai số.

**VI. Các dạng vô định: Gồm  và .**

**B. Các dạng toán về giới hạn hàm số**

***Dạng 1:*** **Tìm giới hạn xác định bằng cách sử dụng trực tiếp các định nghĩa, định lí và quy tắc**

***Phương pháp: Sử dụng định nghĩa giới hạn dãy số và những quy tắc cơ bản***

Áp dụng: Tìm các giới hạn sau:

a)  b)  c) 

**Lời giải**

**a)** 

**b)** 

**c)**  

***DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH DẠNG ***

***Xét bài toàn:*** Tính  khi , trong đó  là các đa thức và căn thức.

***🗁 Phương pháp***

* Phân tích tử và mẫu thành các nhân tử và giản ước: 
* Nếu  đều chứa nhân tử  ta sẽ tiếp tục phân tích thành các nhân tử.

**🕮 *Chú ý:***

* Với  là đa thức (thường là hàm số bậc hai, bậc ba, bậc bốn…) thì ta phân tích nhân tử bằng việc giải phương trình 
* Với  là căn thức, ta sẽ sử dụng phương pháp nhân liên hợp (liên hợp số hoặc liên hợp biến) để phân tích nhân tử.
* Sử dụng các hằng đẳng thức, nhóm số hạng, phân tích ra thừa số bậc 2, chia đa thức, sơ đồ Hoócne,…
* Chia tách thành các phân thức bằng cách thêm bớt đại lượng đơn giản nhất theo *x* hoặc hằng số mà các giới hạn mới vẫn giữ nguyên dạng vô định .
* Nếu  thì 

Áp dụng: Tìm các giới hạn sau

a)  b) 

c)  d) 

**🞔 Lời giải**

**a)** 

**b)** 

**c)** 

**d)** 

**Dạng 3 : *KHỬ DẠNG VO DỊNH ∞/∞, 0.∞ HOẶC ∞ - ∞***

***Bài toàn 1:*** Tính  khi , trong đó  là các đa thức và căn thức.

***🗁 Phương pháp giải:*** Chia cả tử và mẫu cho  với *n*  là số mũ bậc cao nhất của biến số *x* trong mẫu thức. Nếu  có chứa biến *x* trong dấu căn thức thì đưa  ra ngoài dấu căn (với *k* là số mũ bậc cao nhất của *x* trong dấu căn).

**🕮 *Chú ý:***

* Khi  thì ta xử lý giống như với giới hạn của dãy số.
* Khi  ta cần lưu ý khi đưa  ra ngoài dấu căn thức bậc chẵn.

**🕮** Dạng hay gặp chính là  khi  và  khi 

**🖎** Xét hàm số  có hệ số của hạng tử bậc cao nhất của  lần lượt là *a,b.* Và kí hiệu  lần lượt là bậc của  thì:

* Nếu  thì 
* Nếu  thì 
* Nếu  thì 

**➋ *Bài toán 2*:** Tính  khi  và 

***🗁 Phương pháp giải:*** Ta biến đổi  để đưa về dạng 

Hoặc biến đổi  để đưa về dạng .

**➌ *Bài toán 3:*** Tính  khi  và 

***🗁 Phương pháp giải:*** Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp hoặc quy đồng để đưa về cùng một phân thức.

Áp dụng : Tính các giới hạn sau

a)  b)  c) 

**Lời giải**

**a)** 

**b)** 

**c)** 

***DẠNG 4 : GIỚI HẠN MỘT BEN***

***Phương pháp giải:*** \* Nếu  thì không tồn tại 

\* Nếu  thì 

Áp dụng: Tính các giới hạn sau

a)  b)  c) 

**Lời giải**

**a)** 

**b)** 

**c)** 

VD2: Tìm các giới hạn của các hàm số tại các điểm chỉ ra:

a)  tại 

b)  tại 