

BÀI TẬP CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1.Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên $K (K \subset \mathbb{R})$ và $x_0 \in K$

a) x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b) \subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số f .

b) x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b) \subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$.

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số f .

2.Điều kiện đủ để hàm số có cực trị:

Định lí 1: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 . Khi đó, nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Định lí 2:

a. Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

b. Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0 .

Định lí 3: Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $f''(x_0) = 0$ thì ta chưa thể kết luận được, cần lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm.

Bảng tóm tắt các khái niệm

x_0	$f(x_0)$	$M_0(x_0; f(x_0))$
Điểm cực đại của f	Giá trị cực đại(cực đại) của f	Điểm cực đại của đồ thị hàm số f
Điểm cực tiểu của f	Giá trị cực tiểu(cực tiểu) của f	Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số f
Điểm cực trị của f	Cực trị của f	Điểm cực trị của đồ thị hàm số f

3.Quy tắc tìm cực trị của hàm số

3.1:Quy tắc 1: Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu

Bước 1. Tìm $f'(x)$

Bước 2. Tìm các điểm $x_i (i=1, 2, \dots)$ tại đó đạo hàm bằng không hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại điểm x_i .

3.2:Quy tắc 2: Dùng định lý 3

Bước 1: Tìm $f'(x)$

Bước 2: Tìm các nghiệm $x_i (i=1, 2, \dots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 3: Tính $f''(x_i)$

- Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .
- Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Nếu $f''(x_i) = 0$ thì ta lập bảng biến thiên để xác định điểm cực trị.

BÀI TẬP

1. Dạng 1: Đọc bảng biến thiên.

Điểm cực trị của hàm số		Điểm cực đại			
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$y' = f'(x)$	+	0	-	0	+
$y = f(x)$		y_1		y_2	
Điểm cực đại của đồ thị hàm số		Giá trị cực đại		Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số	
		Giá trị cực tiểu			

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 3: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.
B. Hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị.
C. Hàm số đã cho không có giá trị cực tiểu.
D. Hàm số đã cho không có giá trị cực đại.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

Giá trị cực đại của hàm số bằng

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 5.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho

- A. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$. B. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

- C. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$. D. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y					

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'	-	0	+	0	-		
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						
	$-\infty$		3		-2	$+\infty$

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=4$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có điểm cực tiểu $x=0$.

B. Hàm số có điểm cực đại $x=5$.

C. Hàm số có điểm cực tiểu $x=-1$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	5	-1	$+\infty$	

D. Hàm số có điểm cực tiểu $x=1$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. Có một điểm.

B. Có ba điểm.

C. Có hai điểm.

D. Có bốn điểm.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	-1	3	2

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 và bằng 1 .

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

D. Hàm số có đúng hai điểm cực trị.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			0			$+\infty$
		$\searrow$		$\swarrow$		$\searrow$	
			-3		-3		
			$\swarrow$		$\searrow$		

Câu 10.. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

C. Hàm số có đúng một cực trị.

D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 2 .

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	-	+	0	-
y	$+\infty$	-1	0	$-\infty$

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

Hàm số đạt cực đại tại điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $x=-2$.

B. $x=3$.

C. $x=2$.

D. $x=4$.

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

Chọn khẳng định sai.

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

B. Hàm số có hai điểm cực trị.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-3$.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu $y=-3$.

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
y'	-	0	+	-
y	$+\infty$	0	3	$-\infty$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

2. Dạng 2: Đọc đồ thị hàm số

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.

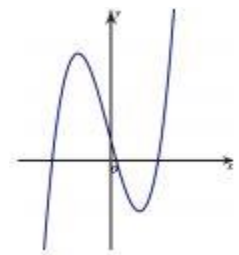
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2

B. 0

C. 3

D. 1



3. Dạng 3: Đọc bảng xét dấu hàm số $f'(x)$ hoặc đồ thị hàm số $f'(x)$

Chú ý: Qua x_0 $f'(x)$ đổi dấu thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.

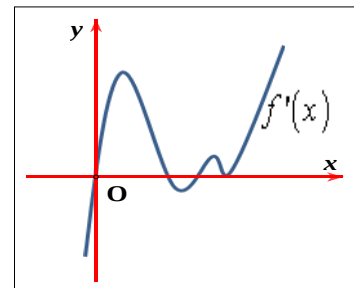
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của hàm đạo hàm như sau:

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 6.

B. 4.

C. 2.

D.

3.

x	$-\infty$	-3	2	3	4	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

Hàm số đã cho có bao nhiêu cực trị?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm

số là

- A. 5. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x+1)^2(x-2)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là.

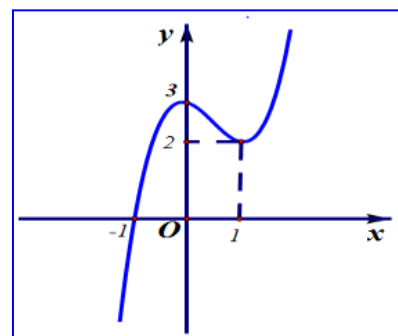
- A. 3. B. 0
C. 1. D. 2.

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.
B. Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.
C. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.
D. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.



Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+		-	0	-

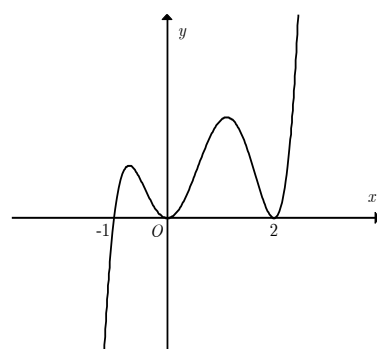
Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 16: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng K . Cho đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên khoảng K như sau:

Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ trên K là:

- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4



4. Dạng 4: Tìm điểm cực trị của hàm số cụ thể
Thực hiện theo quy tắc tìm cực trị.
Sử dụng máy tính cầm tay.

Câu 1. Hàm số $y = x^3(1-x)^2$ có

- A. Ba điểm cực trị. B. Một điểm cực trị.
C. Không có điểm cực trị. D. Hai điểm cực trị.

Câu 2. Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 điểm cực trị.

- A. $y = -x^4 - 2x^2 - 1$. B. $y = x^4 + 2x^2 - 1$. C. $y = 2x^4 + 4x^2 + 1$. D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Câu 3. Số điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$ là.

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là.

- A. $(1; -2)$. B. $(1; 2)$. C. $(-1; 2)$. D. $\left(3; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 5. Tìm tọa độ điểm cực tiểu M của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- A. $M(1; 4)$. B. $M(-1; 0)$. C. $M(1; 0)$. D. $M(-1; 4)$.

Câu 6. Đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng.

- A. 5. B. 20. C. 2. D. $2\sqrt{5}$.