**Hiểu ý tưởng giới hạn trong Toán**

 **học (phần 1)**

Bottom of Form

Bài viết là loạt các câu hỏi-đáp để phần nào đó minh họa trực quan khái niệm giới hạn trong Toán học. Làm sao ý tưởng từ những nghịch lý lại liêm quan đến các khái niệm trong sách giáo khoa?

Một trong những điều khó chịu trong việc học Toán chính là “sự chấp nhận”. Khi học giới hạn, bạn phải chấp nhận quá nhiều thứ, phải nhớ quá nhiều quy tắc và công thức. Có lúc thầy cô bảo bạn rằng “*Cho*x*tiến về*x0*nhưng không được bằng để thế vô rút gọn*”. Sau khi rút gọn, họ lại bảo bạn “*OK, bây giờ các em thay*x=x0*vào để tìm ra kết quả*”. Thật kinh khủng và hỗn loạn, lúc thì bằng, lúc thì không bằng!!!

Tuy nhiên, bạn đừng có trách quá nhiều thầy cô của bạn, ngay cả nhà Toán học thiên tài người Pháp Pierre de Fermat cũng [đã áp dụng cách thức tương tự](http://math2it.net/luoc-su-hinh-thanh-khai-niem-gioi-han-trong-toan-hoc/) nhưng cũng không giải thích được nguyên do, ông thậm chí còn nói rằng “*Hiếm có phương pháp nào tổng quát hơn!”*[**1**](https://math2it.com/hieu-y-tuong-gioi-han-trong-toan-hoc-phan-1/#easy-footnote-bottom-1-5829)

**Giới hạn ra đời như thế nào?**

Giới hạn do mấy nhà toán học tự chế ra phải không anh?

Nếu bạn hứng thú với lịch sử, hãy đọc [bài viết chi tiết này về quá trình hình thành khái niệm giới hạn](http://math2it.net/luoc-su-hinh-thanh-khai-niem-gioi-han-trong-toan-hoc/), còn không hãy đọc đoạn tóm tắt bên dưới.

Nhà hiền triết Hy Lạp [Zeno xứ Elea](https://vi.wikipedia.org/wiki/Zeno_x%E1%BB%A9_Elea) nảy ra một số nghịch lý mà ông không thể giải nổi, một vài trong số chúng được giải sau đó bởi [Aristotle](https://vi.wikipedia.org/wiki/Aristoteles) và [Archimedes](https://vi.wikipedia.org/wiki/Archimedes), cũng là các nhà hiền triết thời cổ đại, nhưng phương pháp được sử dụng là các chuỗi vô hạn chứ không phải là giới hạn.

Cùng thời kỳ của Zeno, xuất phát từ việc tìm độ lớn của đường chéo một hình vuông cạnh là 1, một ý tưởng về đại lượng nhỏ hơn bất cứ thứ gì ra đời bởi [Hippasus](https://en.wikipedia.org/wiki/Hippasus) nhưng tiếc thay nó đi trước thời đại quá sớm và gây ra cái chết thương tâm cho Hippasus, [đại lượng này là vô cùng nhỏ (infinitesimal)](http://math2it.net/dai-luong-vo-cung-nho-y-tuong-khai-sinh-ra-nen-toan-hoc-hien-dai/). Tuy nhiên, ý tưởng này vẫn tiếp tục manh nha và phát triển dù rất lâu sau đó.

Lược sử hình thành giới hạn

Đến cuối những năm 1620s, nhà toán học người Pháp, [Pierre de Fermat](https://vi.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat) đã tái sử dụng lại ý tưởng vô cùng nhỏ này để giải quyết các vấn đề về tìm cực trị và [hệ số góc tiếp tuyến đường cong](http://math2it.net/tai-sao-tiep-tuyen-cua-o-thi-ham-so-lai/). Cách mà Fermat áp dụng tuy còn mơ hồ về đại lượng vô cùng nhỏ nhưng nó là tiền đề quan trọng để [Newton](https://vi.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton) và [Leibniz](https://vi.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz) hình thành các ý tưởng cơ bản về giới hạn và định nghĩa ε–δ của nó. Cuối cùng, định nghĩa giới hạn cũng ra đời một cách đầy đủ và trọn vẹn nhờ vào công sức của các nhà toán học [Cauchy](https://vi.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy), [Bolzano](https://en.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano) và [Weierstrass](https://vi.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass).

Có thể thấy, “cầu nối” và cũng là “động cơ” của việc hình thành ý tưởng và khái niệm giới hạn chính là các [đại lượng vô cùng nhỏ](http://math2it.net/dai-luong-vo-cung-nho-y-tuong-khai-sinh-ra-nen-toan-hoc-hien-dai/). Rõ ràng chúng không phải là thứ “từ trên trời rơi xuống”, các nhà toán học cũng không quá rảnh rỗi để nghĩ ra một thứ không xuất phát từ nhu cầu thực tế của mấy ổng (Fermat cần đại lượng vô cùng nhỏ vì ổng muốn tìm hệ số góc của tiếp tuyến, Newton cần vì ổng muốn biết vận tốc tức thời tại một điểm,…)

Tuy nhiên, đó là động cơ của các thiên tài, còn chúng ta? Những người bình thường (hoặc sắp trở thành thiên tài), chúng ta tiếp nhận khái niệm giới hạn ấy như thế nào? Tôi sẽ trả lời ở những câu hỏi tiếp theo nhé!

**Ý nghĩa trực quan về giới hạn**

OK, vậy tôi hiểu nó ra đời như thế nào rồi nhưng thực sự nó là gì? Tôi không tưởng tượng ra nổi giới hạn là gì!

Đầu tiên tôi muốn khẳng định với bạn, ***giới hạn là một dự đoán***.

Ví dụ với hàm số f(x)=x2−4x−2, liệu ta có thể biết giá trị của nó tại x=2 được hay không? Rõ ràng câu trả lời là **không** vì sau khi thế x=2 vào, ta sẽ được dạng 00, chả ra kết quả gì cả vì 0 chia 0 có thể ra mọi thứ.

Tuy nhiên, đổi một tí ở câu hỏi, x không cần “=2” nữa, mà nó “**rất gần**” với 2 thì sao? Xem bảng bên dưới nhé

Khi x nhận giá trị **rất gấn 2** thì sao?

Từ bảng trên, tôi “dự đoán” f(x) sẽ tiến về 4 nếu x tiến về 2. À há, ta không thể biết giá trị hàm **tại** x=2 nhưng ta có thể **dự đoán** giá trị hàm **tiến về** 4 nếu như x **tiến về** 2. Các nhà toán học ký hiệu cho câu dài thòong lòong đó bởi ký hiệu ngắn gọn

limx→2f(x)=4

Đọc là “*giới hạn của hàm số*f(x)*khi*x*tiến về*2*là*4“. Bạn đừng có nhầm lẫn dấu “=” trong biểu thức trên, đáng lý ra người ta phải ghi là

limx→2f(x)→4

thì mới phải, tuy nhiên, nhờ có chữ lim nên ta có thể tạm quên đi thiếu sót này. Bạn sẽ thấy rõ nếu như tôi xét hàm số

$$g\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}x^{2}-4x-2 , nếu x\ne 2\\5 nếu x=2\end{array}\right.$$

Sự khác biệt giữa hai hàm số f(x) và g(x) được thể hiện trong hình bên dưới

Sự khác biệt giữ hai hàm số y=f(x) và y=g(x)

Giá trị của cả hai hàm số y=f(x) (bên trái) và y=g(x) (bên phải) đều tiến về 4 khi x tiến về 2 nhưng trong khi f(2) không xác định thì g(2) lại bằng 5 (khác xa 4). Do đó, rõ ràng “dự đoán” mà giới hạn cho chúng ta biết không chỉ đơn giản là “thế vào rồi ra”. Ví dụ này cũng cho ta thấy rõ sự khác biệt giữa “tiến về” và “bằng”.

Sở dĩ người ta dùng từ “*tiến về*” (to) thay vì “bằng” (equals) là do có những thứ ta không thể nào tiếp cận được, điển hình trong số chúng chính là đại lượng trừu tượng “vô cùng” (ký hiệu ∞). Ta chỉ có thể nói “x tiến về ∞” chứ không thể nói “x bằng ∞” được! Mãi mãi x sẽ không bao giờ có thể chạm được ∞, chắc chắn là thế nhưng ta có thể dự đoán được rằng nếu nó càng ngày càng tiến về với ∞ thì giá trị của hàm số f(x) khi ấy sẽ càng tiến về đâu. Ví dụ hàm số h(x)=1x sẽ tiến về 0 nếu như x tiến về ∞. Tôi sẽ nói về nó ở các câu hỏi sau.

Nhớ nhé, f**tiến về** chứ không phải bằng!

Tôi có hai thắc mắc. **Thứ nhất**, “4” chỉ là dự đoán của anh mà thôi, anh chỉ thử ở vài giá trị của x, ai dám đảm bảo là lấy những x gần hơn thì nó sẽ gần 4 hơn? **Thứ hai**, không lẽ mỗi lần tôi muốn tìm giới hạn của một hàm, tôi lại phải lập bảng để tính thật nhiều giá trị vậy sao?

**Câu hỏi thứ nhất**: OK, giả sử bạn đang đứng ở giá trị x=x1 đủ gần 2 và f(x1) cũng gần 4 thỏa yêu cầu của bạn. Giờ theo như câu hỏi của bạn, tôi chọn x2 tiến gần 2 hơn x1, tức là x1<x2<2 thì tôi phải đảm bảo f(x2) cũng sẽ tiến gần 4 hơn f(x1). Nói cách khác, tôi phải chứng minh f(x1)<f(x2)<4.

Điều này không khó. Thật vậy, xét hiệu

f(x2)−f(x1)=x22−4x2−2–x12−4x1−2=x2+2−(x1+2)=x2−x1>0

**Câu hỏi thứ hai**, bạn không cần phải (và không nên) lúc nào cũng lấy giá trị của x thật nhiều để tìm giới hạn. Trở lại ví dụ trên, để tìm giới hạn của f(x), đầu tiên bạn chia x2−4 cho x−2 để ra x+2 rồi sau đó bạn thế x=2 vào để ra 4. Có những **quy tắc** giúp cho ta tìm giới hạn thật nhanh. Nói về quy tắc thì tôi nghĩ bạn biết còn nhiều hơn cả tôi nữa.

Thật ra anh nói đúng, ở trường tôi chỉ toàn học *các quy tắc tính giới hạn* thôi nhưng nói thiệt tôi rất khó hiểu, ví dụ ở đâu chui ra cái quy tắc “chia rồi thế” đó vậy? Nó ăn nhập gì với cái ý tưởng “tiến về” anh đã nói ở trên?

Uhm, tôi hiểu sự khó chịu của bạn. Hỏi bạn nha, từ x2−4x−2 để ra x+2, có phải bạn chia cho x−2 đúng hem? Nếu như tại x=2 thì làm sao mà bạn chia được? Ai cho phép bạn chia cho 0? Tuy nhiên, ở đây bạn chỉ xét “x tiến về 2” mà thôi. **Tiến về** chứ không có bằng, hay nói khác đi x≠2. Khi ấy bạn chia cho x−2 là được phép!

limx→2x2−4x−2=limx→2(x+2)=?

Hãy nhớ trong đầu mỗi khi bạn làm các phép toán tìm giới hạn, x**chỉ tiến về** mà thôi. Bây giờ, sau khi bạn đã có x+2 rồi. Cũng lại câu hỏi x+2 tiến về bao nhiêu nếu x tiến về 2? Nếu như lúc nãy, khi hàm số f(x) vẫn còn nguyên dạng x2−4x−2, khi hỏi câu tương tự, bạn sẽ không thể “thế vào” thì bây giờ, hàm số f(x) đã trở thành x+2, bạn đã có thể thoải mái thế vào rồi đấy.

Bạn đừng hiểu nhầm, bạn đang **thế vào** để trả lời cho câu hỏi f(x) **tiến về đâu** chứ không phải là f(x) bằng bao nhiêu!

Anh có thể ví dụ thực tế hơn về điểm “thế vào” này không?

OK, để tôi kể bạn nghe một câu chuyện. An và Bình cùng chơi một trò chơi cực kỳ nguy hiểm. Phía trước hai cậu là một vực thẳm không đáy, nếu rớt xuống thì chỉ có đường chết. An đố Bình có thể nhảy từ vị trí đang đứng tới được vực thẳm.

Bình hoàn toàn có thể nhảy được, tuy nhiên cậu không thể nhảy một mạch tới vực được vì như thế sẽ làm cậu mất mạng. Thay vào đó, cậu bảo với An rằng “Tớ có thể nhảy được, tuy nhiên không thể nhảy ngay xuống vực được!”

Lúc này việc Bình nhảy xuống vực giống như cho x=2 trong khi f(x)=x2−4x−2 vậy đó, sẽ xảy ra tình trạng 00 rất nguy hiểm!

Tuy nhiên, nếu An làm cách nào đó, có thể bắt một câu cầu ngang vực để khi Bình nhảy tới không bị rớt nữa thì **Bình sẽ nhảy thẳng tới vực** và chứng minh cho An thấy là mình không nói dối.

Việc “bắt một cây cầu” nó giống với việc biến x2−4x−2 thành x+2 vậy đó. còn việc “nhảy thẳng tới B” nó cũng giống việc thay trực tiếp x=2 vào x+2 vậy! Ta sẽ còn quay lại câu chuyện giữa An và Bình để minh họa cho định nghĩa giới hạn.

Tôi hiểu rồi. Tuy nhiên anh chơi khôn quá, lấy ví dụ đơn giản quá trời, rủi có những hàm số phức tạp hơn thì sao? Tôi tin nếu anh lại dùng các quy tắc giới hạn để “dự đoán” kết quá. Tuy nhiên, “dự đoán” thì có thể đúng mà cũng có thể sai. Làm sao anh biết dự đoán của anh có sai hay không? Nếu nó sai thì chả lẽ tôi phải học cái thứ không chắc chắn này à?

Quá hay, một câu hỏi quá hay. Dự đoán của giới hạn trong trường hợp này là một ***dự đoán chắc chắn***. Chúng ta không thể chứng minh nó đúng nhưng bạn cũng **không thể chứng minh nó sai**!

Nói về việc chứng minh đúng và sai, tôi có một nhận xét thế này. Nếu muốn chứng minh một điều là đúng thì tôi phải chứng minh cho “tất cả các trường hợp” liên quan đến điều ấy là đúng. Tuy nhiên để chứng minh rằng nó sai, tôi chỉ cần đưa ra một trường hợp duy nhất không thỏa là được. Ví dụ, tôi nói rằng “*Lớp kia toàn là con trai*”. Để chứng minh nó đúng, tôi phải chứng minh tất cả các thành viên của lớp ấy đều là con trai. Tuy nhiên bạn chỉ cần chỉ ra một đứa trong số ấy là con gái thì ngay lập tức điều tôi đã nói là sai.

Ở đây, dự đoán của giới hạn cũng giống vậy. *Bạn không thể chứng minh nó sai* có nghĩa là khi tôi nói f(x) tiến về L thì bạn không thể chỉ ra được trường hợp nào khác để f(x) tiến về một con số khác L.

Giới hạn cho ta **niềm tin** vào một dự đoán. Cho đến khi bạn không thể chứng minh là tôi sai thì điều tôi nói vẫn đang hữu dụng!

Niềm tin ư? Nghe có vẻ chả giống Toán học gì, anh có thể cho một ví dụ khác làm rõ hơn điểm này không?

OK, một ví dụ điển hình nhất chính là con số bí ẩn nhất trong lịch sử nhân loại  – **số pi**π. Bạn sẽ *chẳng bao giờ biết được nó chính xác là gì*, con người ta chỉ cố gắng biết được càng nhiều càng tốt số lượng chữ số sau dấu phẩy của số pi chứ chả có ai dám mạnh miệng bảo rằng, “*số*π*chính là…*” Không ai dám ghi “π=” mà chỉ dám ghi “π≈”.

Số π thì có liên quan gì giới hạn?

Có đấy bạn ạ. Người ta đã tìm được [rất nhiều cách biểu diễn số π theo giới hạn](http://functions.wolfram.com/Constants/Pi/09/). Dưới đây là một ví dụ,

π=limn→∞24n+1(n!)4(2n+1)((2n)!)2.

Nếu bạn lấy n càng lớn, bạn sẽ càng có được số chữ số chính xác sau dấu phẩy của số π. Tuy nhiên, mãi mãi bạn vẫn không thể nào tiếp cận được nó. Do đó ta cần phải có **niềm tin**.

**Kết cho phần 1**

Ở [phần tiếp theo](http://math2it.net/hieu-y-tuong-gioi-han-trong-toan-hoc-phan-2/), tôi sẽ

* Gợi mở tại sao SGK lại nói rất khác ý tưởng tôi đã nói ở trên và tôi sẽ giải thích trực quan sự liên hệ giữa ý tưởng và những gì SGK nói.
* Tôi sẽ nói rõ **chắc chắn** của **dự đoán** mà giới hạn cho chúng ta biết là gì.
* Những ứng dụng thực tế của giới hạn.

Nói thật, kể từ bài viết [Lược sử hình thành khái niệm giới hạn](http://math2it.net/luoc-su-hinh-thanh-khai-niem-gioi-han-trong-toan-hoc/), tôi đã có đến 3 phiên bản khác nhau của bài này. Ý tưởng thì có đó, hiểu đó nhưng để viết thì thật không dễ dàng gì. Hy vọng cách viết này sẽ phù hợp và chờ sự đóng góp ý kiến từ các bạn.

**Tham khảo thêm**

1. **Victor J. Katz**. *A history of mathematics. An introduction*. 3rd edition. Addison-Wesley.

[giải tích](https://math2it.com/tag/giai-tich/) [hiểu toán học](https://math2it.com/tag/hieu-toan-hoc/)

............................................................................................................

Phần hai tiếp tục giải đáp những thắc mắc còn dang dở ở [phần 1](http://math2it.net/hieu-y-tuong-gioi-han-trong-toan-hoc-phan-1/) và nói thêm về sự liên quan giữa ý tưởng giới hạn và các định nghĩa trong SGK chúng ta được học cũng như các ứng dụng thực tế của nó.

**Tóm tắt phần 1**

Ở [kỳ trước](http://math2it.net/hieu-y-tuong-gioi-han-trong-toan-hoc-phan-1/), tôi đã giải thích những vấn đề sau cho anh bạn “tò mò” của tôi.

1. Lịch sử hình thành giới hạn từ những nghịch lý của Zeno đến định nghĩa đầy đủ của giới hạn dưới dạng ε−δ của Bolzano & Weierstrass.
2. Khi nói về giới hạn, bạn phải luôn nhớ chữ “**tiến về**“. Khi x tiến về x0 thì f(x) tiến về L chứ không phải f(x) bằng L.
3. Giới hạn cho ta một **dự đoán chắc chắn** rằng f(x) sẽ tiến về đâu nếu x tiến về đâu đó.

OK, nào anh bạn của tôi, chúng ta tiếp tục chuyện trò nào. Anh còn thắc mắc nào khác không?

**Ý tưởng so với định nghĩa trong SGK**

Có chứ anh, tôi hỏi tiếp nhé. Tại sao cái tôi học nó có vẻ chả liên quan gì đến ý tưởng ở trên này hết vậy?

Có hai lý do khiến bạn thấy điều bạn học chả liên quan gì.

**Thứ nhất**, các ý tưởng phát biểu bằng lời đều được “dịch” sang ngôn ngữ của biểu thức, con số và ký hiệu trong Toán học. Rồi khi đọc nó, người ta lại đọc sang một kiểu khác. Nếu xét về mặt ý nghĩa bên trong thì như nhau nhưng người ta không chịu hiểu nó theo ý tưởng ban đầu mà chỉ hiểu theo cái mà người ta nghe. Ví dụ như 3−(−4)=3+4, quy tắc “***trừ của trừ là cộng***” là cách người ta “*đọc*” các ký hiệu toán học nhưng ý nghĩa thực sự để ra cái “−(−)” ấy lại khác, dù cả hai cái đều cho ra cùng một kết quả. Đọc bài [Hiểu về phép trừ và dấu trừ](http://math2it.net/hieu-ve-dau-tru-va-phep-tru-trong-toan-hoc/) để biết thêm nhé.

**Thứ hai** là do các nhà viết sách Việt Nam đã “đơn giản hóa” định nghĩa ký hiệu một lần nữa để cho học sinh bớt phiền phức. Cái này hiểu nôm na giống như quyển [*Nhà Giả Kim*](https://vi.wikipedia.org/wiki/Nh%C3%A0_gi%E1%BA%A3_kim_%28ti%E1%BB%83u_thuy%E1%BA%BFt%29) của [Paulo Cohelo](https://vi.wikipedia.org/wiki/Paulo_Coelho). Bản gốc là tiếng Brasil (một biến thể của tiếng Bồ Đào Nha) nhưng khi dịch ra tiếng Việt lại dựa trên phiên bản tiếng Đức của nó. Dù đa phần chi tiết đều không sai nhưng khiến người đọc lệ thuộc vào bản tiếng Việt mà không hề biết gì về bản gốc tiếng Brasil của nó. Giới hạn được định nghĩa trong SGK cũng vậy đấy!

**Các định nghĩa SGK**

Vậy anh có thể cho tôi thấy các khái niệm trong SGK cũng trùng với ý tưởng anh đã nói ở phần trước không?

Trước khi trả lời câu hỏi này, ta hãy cùng nhìn lại định nghĩa trong SGK đã (nói thật, tôi rất ghét phải đưa nó ra, rờm rà và không đúng mục đích bài viết này – bài viết chỉ nói về ý tưởng). Có rất nhiều định nghĩa được nêu ra trong SGK

* Định nghĩa giới hạn của một dãy số.
* Định nghĩa giới hạn tới vô cực của dãy.
* Định nghĩa giới hạn của một hàm số tại một điểm.
* Định nghĩa giới hạn tới vô cực của một hàm số.
* Định nghĩa giới hạn một phía.

Làm sao có thể vừa dạy bạn hiểu bản chất của giới hạn, vừa giúp bạn có thể dễ dàng tính các giới hạn chỉ trong vòng 45 phút? Thầy cô bắt buộc phải tìm cách khác! Cách làm cho bạn phải ghét Toán học!

Quá trời định nghĩa và thầy cô của bạn thường cho bạn cưỡi ngựa xem hoa để đi ngay vào học “các quy tắc tính” là chính. Không thể trách họ khi họ chỉ có 45 phút để dạy bạn hết các định nghĩa này kèm theo các bài tập áp dụng! Ở đây tôi sẽ tập trung nói về ba định nghĩa thôi, cốt yếu để bạn thấy rằng những cái người ta đưa ra không phải là vô lý.

**Định nghĩa 1 (*Giới hạn của dãy số)***

Ta nói dãy số un có giới hạn là a khi n dần tới vô cực, nếu |un−a| có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Ký hiệu: limn→∞un=a hay un→a khi n→∞

**Định nghĩa 2 (*Giới hạn của hàm số tại một điểm*)**

Cho khoảng K chứa điểm x0 và hàm số y=f(x) xác định trên K hoặc trên K∖{x0}. Ta nói hàm số y=f(x) có giới hạn là L khi x dần tới x0 nếu với dãy số xn bất kỳ, xn∈K∖{x0} và xn→x0, ta có f(xn)→L. Ký hiệu: limx→x0f(x)=L hay f(x)→L khi x→x0.

Có vẻ như định nghĩa giới hạn của hàm số là dựa vào định nghĩa của dãy số phải không anh?

Bạn nhận xét đúng rồi đấy. Có hai cách định nghĩa khác nhau cho giới hạn hàm số tại một điểm (hoặc giới hạn của hàm số tới vô cực, ta gọi chung là *giới hạn hàm số* nhé). Cách thứ nhất là định nghĩa thông qua hai đại lượng ε−δ như những gì mà Bolzano và Weierstrass đã làm. Cách thứ hai là định nghĩa thông qua dãy số, cái này do nhà Toán học [Heine](https://en.wikipedia.org/wiki/Eduard_Heine) nêu lên.

Để cho việc định nghĩa bớt rờm rà và tránh đi việc học sinh phải tiếp nhận một cách định nghĩa “khác”, những người soạn SGK đã sử dụng cách của Heine (nghĩa là thông qua dãy số) để định nghĩa giới hạn hàm số. Nó giúp cho học sinh có cảm giác “*à, cái này cũng tương tự cái trước đó mình học*”. Tuy nhiên, đó chỉ là cảm giác tạm chấp nhận nhưng không giúp nhiều trong việc hình thành ý tưởng giới hạn cho học sinh.

**Định nghĩa 3 (*Giới hạn của hàm số tại một điểm*)**

Cho khoảng K chứa điểm x0 và hàm số y=f(x) xác định trên K hoặc trên K∖{x0}. Ta nói hàm số y=f(x) có giới hạn là L nếu với mỗi ε>0, tồn tại một số δ>0 sao cho khi |x−x0|<δ thì |f(x)−L|<ε,∀x∈K∖{x0}.

Khi lên đại học hoặc học sâu hơn thì người ta chuộng cách định nghĩa gốc theo ε−δ hơn vì nó tự nhiên hơn. Khi đó, định nghĩa của Heine người ta thường để nó vào một định lý hoặc nhận xét. Nếu bạn thích, bạn có thể xem chứng minh sự tương đương của hai định nghĩa trên như dưới đây (không khuyến khích lắm vì nó hơi nặng về mặt toán học)

Tại sao **Định nghĩa 2** và **Định nghĩa 3** lại tương đương?

Điều này có nghĩa là chỉ cần một trong hai định nghĩa trên được giải thích thì định nghĩa còn lại cũng đúng.

**Bạn khó tính đến đâu?**

Như tôi đã nói ở [phần 1](https://toituhoc.xyz/hieu-y-tuong-gioi-han-trong-toan-hoc-phan-1), giới hạn cho ta **niềm tin** vào **dự đoán** mà giới hạn cho ta biết. Niềm tin này được hình thành từ sự **đáp ứng của tôi** so với độ **khó tính vô hạn của bạn**.

Bạn đưa ra một ranh giới mà bạn có thể chấp nhận, tôi tìm được ngay một điểm dừng phù hợp với ranh giới ấy.

Quay trở lại với ví dụ về An và Bình. An yêu cầu Bình nhảy tới rìa của bờ vực. Bình rõ ràng không thể nhảy ngay tới vị trí đó (vị trí B), tuy nhiên khả năng của cậu là hoàn toàn có thể. Nếu như Bình có thể nhảy tới vị trí khác B, cậu sẽ sống sót. Do đó, Bình nói với An rằng

*Cậu rõ ràng không thể bắt tớ nhảy ngay tới B vì tớ sẽ chết, không lẽ cậu muốn tớ chết, đúng không? Tuy nhiên, để chứng minh khả năng của mình mà không bị chết, tớ có thể nhảy tới điểm gần B bao nhiêu cũng được, miễn sao không chạm vào B. Gần bao nhiêu thì tùy cậu chọn!*

Sự cam kết này của Bình là điều khẳng định chắc chắn. An có thể yêu cầu khoảng cách gần B bao nhiêu cũng được, một khoảng cực kỳ nhỏ, nhỏ xíu xiu luôn, nhỏ hơn bất kỳ cái gì trên đời, nhỏ như…“[đại lượng vô cùng nhỏ](http://math2it.net/dai-luong-vo-cung-nho-y-tuong-khai-sinh-ra-nen-toan-hoc-hien-dai/)” nhưng vẫn đảm bảo không bị triệt tiêu (rơi ngay B). Ứng với mỗi yêu cầu khoảng cách của An, Bình cần lấy đà tương ứng để có thể nhảy tới địa điểm đó.

* **An**: gần B 0.1m.
* **Bình**: nếu thế thì tớ cần lấy đà tối thiểu 2m.
* **An**: gần hơn nữa, 0.01m
* **Bình**: OK, tớ sẽ lấy đà xa thêm chút, tối thiểu là 2.1m
* …
* **An**: gần 0.0000000…1m
* **Bình**: lấy đà tối thiểu 2.1000…1m

Cứ thế, cậu bé khó tính An có yêu cầu **bất cứ** ranh giới nào thì Bình cũng có thể đáp ứng được. **Niềm tin** của An được xây dựng từ đó. An mãi mãi không biết rằng Bình sẽ nhảy được đến **ngay vị trí** B hay không, tuy nhiên **nhu cầu vô hạn** của cậu đều được đáp ứng một cách thỏa đáng.

Nhu cầu của bạn lớn đến cỡ nào?

Một tấm áp phích quảng cáo thật to được in ra và treo ở ngay giữa một quảng trường rộng lớn. Bạn tình cờ đi qua đấy, nhìn thấy tấm áp phích và khen “*Sao người ta có thể in ra hình ảnh sắc nét đến như vậy nhỉ?*”. Tuy nhiên, khi lại gần, bạn lại thấy nó bắt đầu bị “rổ”. Điều này cũng xuất hiện khi bạn phóng to một bức ảnh .jpg trên máy tính của mình, cho dù tấm ảnh đó được chụp bởi một máy ảnh thật xịn nhưng khi zoom đến một mức nào đó nó cũng lại xuất hiện “rổ”.

*Khi chưa phóng to, hình vector và bitmap trông “nét” như nhau. Mọi thứ chỉ khác khi chúng ta phóng to lên. (*[*Nguồn hình*](http://www.serif.com/blog/advantages-of-vector-graphics-over-bitmap-images/)*)*

Tuy có nhược điểm nhưng rõ ràng tấm áp phích vẫn rất “nét” với các tài xế đi đường chạy lướt qua ở một khoảng cách đủ để mắt các tài xế không phân biệt được các điểm rổ. Bức ảnh bạn chụp được in ra trên một khuông giấy đủ lớn phù hợp nhu cầu của bạn nhưng vẫn không khiến mắt bạn khó chịu. **Đối với bạn, nhu cầu đã được đáp ứng**. Bạn sẽ không phân biệt nổi một bộ phim HD 1080 và cũng bộ phim ấy với chất lượng 4K chỉ với chiếc máy tính bình dân của mình.

Nhu cầu của bạn trong cuộc sống rõ ràng là hữu hạn, đến ranh giới nhu cầu ấy, bạn sẽ không phân biệt được đâu là hữu hạn, đâu là vô hạn nữa. Toán học cũng tương tự như thế, tuy nhiên nó biết rằng bạn cần một sự chắc chắn tuyệt đối, chắc chắn đến độ bạn cũng không thể tưởng tượng nổi, nhu cầu của An có thể nhỏ vô cùng tận thì Bình cũng lại có thể đáp ứng. Đó chính là **sự chắc chắn trong dự đoán của giới hạn**.

**Giới hạn của một dãy số**

Quay trở lại với định nghĩa của giới hạn trong toán học. Tôi cố tình tách **Định nghĩa 1** ra như sau

* **(1)** un sẽ tiến về a
* **(2)** khi n dần tới ∞
* **(3)** nếu như |un−a| có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý,
* **(4)** kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Và dưới đây là sự tương ứng của ý tưởng với cái định nghĩa hình thức này

* **Dự đoán**: un sẽ tiến về a (1) khi n dần tới ∞ (2)
* **Nhu cầu của bạn**: |un−a| có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý (3)
* **Đáp ứng của tôi**: kể từ một số hạng nào đó trở đi (4)

Bạn chọn một con số vô cùng bé mà bạn nghĩ nó đủ sức làm bạn tin là gần như là 0. Để chi? Để |un−a| nhỏ hơn nó thì cũng được xem như là |un−a|=0 hay un=a (cẩn thận “=” ở đây có nghĩa là “tiến về”). Nhưng bạn đòi hỏi là tôi phải chỉ ra cho bạn thấy được rằng phải có một phần tử nào đó **để từ nó trở đi** thì un luôn thỏa. Điều này đảm bảo rằng sẽ không có một đứa un nào đó của dãy “chơi trội”, đi lớn hơn con số mà bạn đưa ra để đánh đi niềm tin của bạn. Hãy nhớ lại ví dụ chứng minh con trai-con gái của tôi ở kỳ trước, chỉ cần chỉ ra 1 thằng trong dãy không thỏa nhu cầu thì coi như tôi là thằng nói cuội.

**Giới hạn của hàm số tại một điểm**

Tương tự, chúng ta xét định nghĩa hàm số tại một điểm. Như đã nói ở trên, định nghĩa trong SGK dựa trên dãy số hoàn toàn không có ý nghĩa tượng trưng thực tế, tuy nhiên nó đã được chứng minh là giống với định nghĩa theo ε−δ nên tôi sẽ giải thích ý nghĩa tượng trưng của giới hạn hàm số theo hai đại lượng này.

Tôi sẽ cố tình viết lại **Định nghĩa 3** như sau

* **(1)** Hàm số y=f(x) có giới hạn là L
* **(2)** nếu với mỗi ε>0
* **(3)** tồn tại δ>0 sao cho |x−x0|<δ,∀x thỏa tập xác định hàm số
* **(4)** thì |f(x)−L|<ε

Và sự tương ứng của ý tưởng giới hạn với định nghĩa trên

* **Dự đoán**: y=f(x) tiến về L (1) khi x tiến về x\_0
* **Nhu cầu của bạn**: |f(x)−L|<ε (4) với mỗi ε>0 bất kỳ (2)
* **Đáp ứng của tôi**: tồn tại δ>0 sao cho |x−x0|<δ,∀x thỏa TXĐ hàm số (3)

Bạn chọn một số vô cùng bé ε>0 mà bạn nghĩ nó đủ sức thuyết phục bạn tin rằng nó gần như là 0. Để chi? Để khi |f(x)−L| nhỏ hơn nó thì cũng **được xem như là** |f(x)−L|=0 hay f(x) tiến về L. Nhưng bạn đòi hỏi là tôi phải chỉ ra cho bạn một vùng xung quanh x0 đảm bảo rằng mọi giá trị hàm tại các điểm bên trong vùng đó đều thỏa nhu cầu của bạn, vùng ấy chính là |x−x0|<δ. Xem hình sau để hình dung rõ hơn.

Cho dù bạn chọ vùng xung quanh L nhỏ đến cỡ nào thì chỉ cần cho x tiến vào vùng xung quanh x0 mà tôi chỉ ra là yêu cầu của bạn sẽ thỏa. Khi vùng bạn chọn nhỏ dần, nhỏ dần đến khi nhu cầu của bạn về vùng ấy gần bằng 0 thỏa mãn thì hàm f(x) khi ấy chính thức được xem như là tiến về L.

OK, cảm ơn anh, giờ tôi đã hiểu ý tưởng của định nghĩa trong SGK. Chỉ còn một thắc mắc duy nhất về minh họa trực quan cho giới hạn này. Tại sao anh dám đảm bảo f(x) sẽ tiến về L mà không phải là một con số rất gần L? Ví dụ như ở [phần 1](http://math2it.net/hieu-y-tuong-gioi-han-trong-toan-hoc-phan-1/), tại sao anh dám chắc hàm số f(x)=x2−4x−2 sẽ tiến về 4 mà không phải là 4.0000001 hay 3.999999?

Lại thêm một câu hỏi hay khác nữa! Tôi hiểu vì sao bạn có thắc mắc như vậy. Đó là bởi khi bạn liệt kê các kết quả khi x tiến về 2 với nhiều giá trị để tìm dự đoán thì với sức lực hạn hẹp của con người, bạn không thể thử vô hạn lần được. Giả sử bạn thử đến lần thứ 5 với con số 1.99999 (5 con số 9) để tìm được giá trị f(x) tương ứng là 3.99999 (5 con số 9). Rồi bạn đi dự đoán f(x) tiến về 4. Tuy nhiên, rủi f(x) tiền về 3.999995 thì sao?

*Một trường hợp giả sử*f(x)→3.999995*thay vì*f(x)→4

Tôi sẽ chứng minh cho bạn thấy điều này. Tuy nhiên, tôi nhận thấy câu hỏi này thật sự chỉ là một câu hỏi “thêm”. Do đó, không yêu cầu độc giả khác phải đọc, nếu thích, bạn khác có thể nhấn vào đọc hoặc không. Mục đích là tránh làm bài viết quá dài.

Tại sao tiến về 4 mà không phải là “gần 4”?

**Giới hạn một phía (một bên)**

Tại sao lại có khái niệm giới hạn một bên vậy anh? Rồi khi nào thì không tồn tại giới hạn?

Tôi đã nói nhiều về cụm từ “lân cận” ở trên. Mà lân cận thì phải có đủ hai phía, lân cận bên trái của 2 là (2−δ,2), còn lân cận bên phải của nó là (2,2+δ). Khi ta nói x tiến về 2 thì theo bạn chữ “tiến về” được hiểu như thế nào?

Như ví dụ đã nói ở các mục trước, ta lần lượt lấy x “tăng dần” từ 1.5 đến 1.999 rồi 1.9999, … vậy còn những giá trị “giảm dần” từ 2.5, 2.001, 2.000001,… thì sao? Khi x tiến từ trái sang (ứng với lân cận trái) cho ta một dự đoán. Khi x tiến từ phải sang (lân cận phải) cho ta một dự đoán khác. Nếu **cả hai dự đoán đó đều như nhau** thì ta có được sự tồn tại của giới hạn. Ngược lại, **nếu hai dự đoán là khác nhau thì giới hạn không tồn tại**. Khi ấy người ta sử dụng thuật ngữ “giới hạn một phía” để ám chỉ việc tiếp cận một phía mà thôi.

**Ví dụ thực tiễn của giới hạn**

Tôi dám cá nó chỉ có trong Toán thôi đúng không?

Không phải vậy đâu bạn ơi. Trước hết, giới hạn trong Toán là một *công cụ* bổ trợ cho các lý thuyết khác. Chính các lý thuyết khác này mới có ứng dụng thực tế cao. Thế nên thay vì thấy tác dụng của giới hạn trong thực tế, bạn chỉ thấy các lý thuyết kia thôi. Điều này cũng tương tự như sử sách chỉ ghi danh [Ngô Quyền đánh tan quan Nam Hán trên sông Bạch Đằng](https://vi.wikipedia.org/wiki/Tr%E1%BA%ADn_B%E1%BA%A1ch_%C4%90%E1%BA%B1ng_%28938%29) nhưng thật ra một anh tên Nguyễn Văn Tèo nào đấy cũng có tham giá trận đánh đó mà bạn không biết. Khi nhắc đến tên anh ta, bạn lại bảo anh ta chả có công trạng gì.

Tôi cũng cố gắng tìm kiếm những ứng dụng thực tế của giới hạn, bên dưới là một số ứng dụng mà tôi tìm thấy, bạn xem nhé.

**Ứng dụng giới hạn giải thích các nghịch lý của Zeno**

**Dự đoán dân số**([nguồn](https://www.shmoop.com/precalculus-limits/real-world.html))

**Tìm số chữ số sau dấu phẩy của**π**hay các hằng số vô tỷ đặc biệt khác**

Giới hạn là một công cụ để định nghĩa đạo hàm và rất nhiều khái niệm khác trong calculus và giải tích. Chúng mới thật sự có sức mạnh ứng dụng thực tiễn. Bạn sẽ thấy lại bóng dáng của giới hạn ở những bài tiếp theo trên Math2IT.

**Kết**

Thật sự để một em học sinh bình thường (hoặc đang ghét toán, kém toán) đọc bài viết này là một sai lầm vì sẽ làm em “thêm rối”. Tuy nhiên nó sẽ giúp sức rất nhiều cho những đối tượng kiên nhẫn hơn và có đầu óc tư duy tốt hơn để họ có ý tưởng nhiều hơn, biết cách vận dụng hơn khi giải thích khái niệm giới hạn cho những học sinh khác.

Nếu có một video nói về những điều này và cũng với những ý tưởng như thế này thì nó chắc chắn sẽ dễ tiếp nhận hơn rất nhiều so với những dòng chữ khô khan này.

Hy vọng một phần nào đó tôi đã giúp bạn đọc có được sợi dây liên kết giữa khái niệm trừu tượng trong SGK về giới hạn và ý tưởng hình thành nó.

Hãy nhớ,

Giới hạn cho ta một **dự đoán chắc chắn** về giá trị hàm số khi biến tiếp cận một đại lượng nào đó.