

Chương 1

MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

BÀI 1. MỆNH ĐỀ

LÝ THUYẾT

1. Mệnh đề



- + Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai.
- + Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

2. Mệnh đề phủ định

Nam và Hùng tranh luận về loài dơi.

Nam nói "Dơi là một loài chim".

Hùng phủ định "Dơi không phải là một loài chim".

Cho mệnh đề P

- Mệnh đề "không phải P " được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là $\bar{P}$.
- Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai và ngược lại.

3. Mệnh đề kéo theo

- Mệnh đề "Nếu P thì Q " được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là $P \rightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Như vậy, ta chỉ cần xét tính đúng sai của mệnh đề $P \rightarrow Q$ khi P đúng.

4. Mệnh đề đảo

Cho mệnh đề kéo theo $P \rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \rightarrow Q$.

5. Mệnh đề tương đương

Cho mệnh đề P và Q .

- Mệnh đề " P nếu và chỉ nếu Q " gọi là mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

6. Mệnh đề chứa biến

Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

7. Kí hiệu $\forall$ và $\exists$

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$. Khi đó:

- "Với mọi x thuộc X ", ký hiệu là: " $\forall x \in X$ ". "Tồn tại x thuộc X ", ký hiệu là: " $\exists x \in X$ ".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là " $\exists x \in X, P(x)$ ".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, P(x)$ ".
- Mệnh đề chứa $\exists$ đúng khi ta chỉ ra một phần tử đúng.
- Mệnh đề chứa $\forall$ sai khi ta chỉ ra một phần tử sai.

B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Xét tính đúng sai của mệnh đề

Phương pháp giải

- $P, \bar{P}$ không cùng tính đúng sai.
- $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng, Q sai.
- $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề P và Q đều đúng hay đều sai.
- $\forall x \in X, P(x)$ đúng khi $P(x_0)$ đúng với mọi $x_0 \in X$.
- $\exists x \in X, P(x)$ đúng khi có $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ đúng.

Câu 1. Xét xem các phát biểu sau có phải là mệnh đề không? Nếu là mệnh đề thì cho biết đó là mệnh đề đúng hay mệnh đề sai?

- | | |
|---|--|
| a) $\sqrt{2}$ không là số hữu tỉ | e) Nếu chia hết cho 4 thì n là số chẵn. |
| b) Iran là một nước châu Âu phải không? | f) n là số chẵn nếu và chỉ nếu n^2 chia hết 4. |
| c) Phương trình $x^2 + 5x + 6 = 0$ vô nghiệm. | g) $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không là bội của 3. |
| d) Chứng minh bằng phản chứng khó thật! | h) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$. |

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ? Giải thích?

a) $P : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.

b) $P : \exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$

c) $P : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$

d) $P : \exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \leq 1$

e) $P : \forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$

f) $P : \forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)$ là số lẻ.

Dạng toán 2. Xác định mệnh đề đảo - phủ định của một mệnh đề

Phương pháp giải

- Mệnh đề phủ định của P là "không phải P ".
- Mệnh đề phủ định của $\forall x \in X, P(x)$ là $\exists x \in X, \overline{P(x)}$.
- Mệnh đề phủ định của $\exists x \in X, P(x)$ là $\forall x \in X, \overline{P(x)}$.
- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Câu 3. Tìm mệnh đề đảo của mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đảo đúng hay sai: "Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau".

.....

.....

Câu 4. Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết chúng đúng hay sai:

a) $P : \forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geq 0$

b) $Q : \text{"Có một tam giác không có góc nào lớn hơn } 60^\circ\text{"}$

.....

.....

Câu 5. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $P : \neg \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1$

b) $P : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$

c) $P : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$.

d) $P : \exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$.

e) $P : \exists x \in \mathbb{Q} : 4x^2 - 1 = 0$

f) $P : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 7 \geq 0$

g) $P : \exists x \in \mathbb{R}, x < 2 \text{ hoặc } x \geq 7$.

h) $P : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 \geq 0$.

i) $P : \exists x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{x}$

j) $P : \forall x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{x}$

C. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 6. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau và phát biểu phủ định của nó:

a) $\sqrt{5} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

b) 693 chia hết cho 3

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{12})^2$ là số hữu tỷd) $x = 3$ là 1 nghiệm của phương trình $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 0$

Câu 7. Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

a) Không được đi lối này!

b) Bây giờ là mấy giờ?

c) 7 không là số nguyên tố.

d) $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

Câu 8. Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

a) Số π có lớn hơn 3 hay không?

b) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

c) Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.

d) Phương trình $x^2 + 2016x - 2017 = 0$ vô nghiệm.

Câu 9. Xác định tính đúng - sai của các mệnh đề sau

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

c) $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \text{ và } n \text{ là các số lẻ} \Leftrightarrow m^2 + n^2 \text{ là số chẵn}$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

Câu 10. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó

- A: "6 là số nguyên tố";
- B: " $(\sqrt{3} - \sqrt{27})^2$ là số nguyên";
- C: " $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ là một số chính phương";
- D: " $\forall n \in \mathbb{N}, n^4 - n^2 + 1$ là hợp số".

BÀI 2. TẬP HỢP

A. LÝ THUYẾT

1. Tập hợp

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa mà chỉ mô tả.
- Có hai cách xác định tập hợp
 - Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{\dots; \dots; \dots; \dots\}$.
 - VD:
 - Tập rỗng: là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\emptyset$.
 - VD:

2. Tập hợp con - Tập hợp bằng nhau

- Tập hợp con: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.
 $+ A \subset A, \forall A$ và $\emptyset \subset A, \forall A$ + $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- Tập hợp bằng nhau: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$.
- Nếu tập A có n phần tử $\Rightarrow A$ có 2^n tập hợp con.

3. Một số tập hợp con của tập hợp số thực $\mathbb{R}$

Tập hợp con của $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Trong đó:

- $\mathbb{N}^*$: là tập hợp số tự nhiên không có số 0 .
- $\mathbb{N}$: là tập hợp số tự nhiên.
- $\mathbb{Z}$: là tập hợp số nguyên.
- $\mathbb{Q}$: là tập hợp số hữu tỷ.
- $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$: là tập hợp số thực.

B. BÀI TẬP

Câu 1. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20 \text{ và } x \text{ chia hết cho } 3\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 10\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{7} < x < \sqrt{15}\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 14 - 3x > 0\}$.

e) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 15 - 2x > 0\}$.

f) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 20 - 2x \geq 0\}.$

g) $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid |x - 1| \leq 3\}$

h) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 2| \leq 1\}$

i) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 1| < 9\}$

j) $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{32}, n \in \mathbb{N} \right\}$

k) $A = \left\{ x \mid x = \frac{1}{2n} \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \text{ và } x \geq \frac{1}{8} \right\}$

1) $A = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 \leq x < 12\}.$

m) $A = \{x \mid x = 2n^2 - 1, \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } x < 9\}.$

n) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số nguyên tố} < 11\}$.

o) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của } 4 \text{ và } 6\}$.

[illegible]

Câu 2. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.
 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - 5x + 3)(4 - x^2) = 0\}.$

Câu 3. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.
 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4x + 3)(2x + 1) = 0\}.$

Câu 4. Viết tập hợp sau bằng cách

liệt kê các phần tử của tập hợp.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^3 - 7x^2 - 5x = 0\}$$

Câu 5. Viết tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của tập hợp.

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^4 - 8x^2 - 9)(x^2 - 16) = 0\}$$

Câu 6. Viết tập hợp $A = \{2; 6; 12; 20; 30\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Câu 7. Viết tập hợp $A = \{2; 3; 5; 7\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó ?

Câu 8. Viết tập hợp $A = \{1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Câu 9. Viết tập hợp $A = \{9; 36; 81; 144\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó?

Câu 10. Viết tập hợp $A = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó.

Câu 11. Viết tập hợp $A = \left\{1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \frac{1}{234}\right\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó.

Câu 12. Viết tập hợp $A = \{3; 6; 9; 12; 15\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó ?

Câu 13. Viết tập hợp $A = \{1; 2; 4; 8; 16\}$ bằng cách nêu tính chất đặc trưng của nó

Câu 14. Tìm tất cả các tập hợp con của tập hợp sau

a) $A = \{a; b\}$

b) $B = \{0; 1; 2\}$

Câu 15. VD Cho hai tập hợp $A = \{-4; -2; -1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x| \leq 4\}$. Tìm các tập hợp X sao cho $A \subset X \subset B$

Câu 16. (VD) Cho $A = \{1; 2\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Tìm các tập hợp X sao cho $A \subset X \subset B$?

Câu 17. (VD) Cho tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+8}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$. Tìm các tập hợp con của A có 3 phần tử ?

Câu 18. (VD) Cho tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{14}{3\sqrt{x}+6} \in \mathbb{Z}\right\}$. Tìm các tập hợp con của tập hợp A ?

BÀI 3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A. LÝ THUYẾT

1. Giao của hai tập hợp

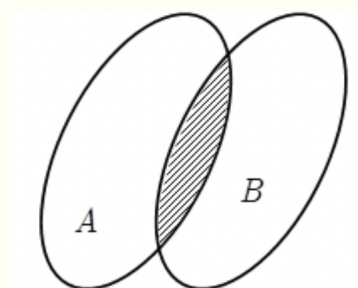
Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A , vừa thuộc B được gọi là giao của A và B .

Kí hiệu $C = A \cap B$ (phần gạch trong hình).

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$

hay $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$.

(Cách nhớ: giao là lấy phần chung)



2. Hợp của hai tập hợp

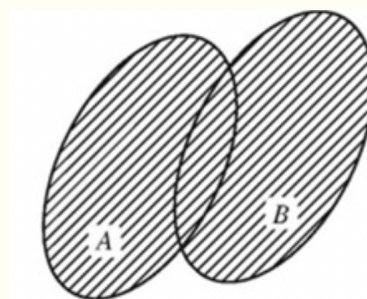
Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B .

Kí hiệu: $C = A \cup B$ (phần gạch chéo trong hình).

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$

hay $x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$.

(Cách nhớ: hợp là lấy hết)



3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là **hiệu** của A và B .

Kí hiệu $C = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình).

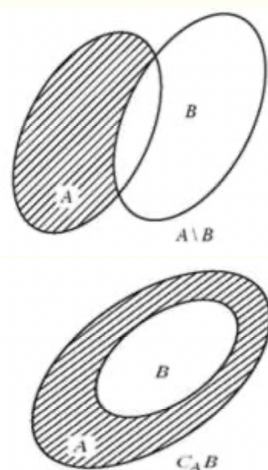
Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$

hay $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$.

(Cách nhớ: hiệu thuộc A mà không thuộc B)

Khi $B \subset A$ thì $A \setminus B$ gọi là phần bù của B trong A .

Kí hiệu $C_A B = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình).



B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Xác định tập hợp và các phép toán trên tập hữu hạn

Phương pháp giải

- Liệt kê các phần tử của tập hợp (giải phương trình nếu cần).
- Dùng định nghĩa các phép toán để xác định các phần tử của tập hợp.

Câu 1. Xác định các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x + 4)(2x^2 - 5x) = 0\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x^2 \leq 25\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n^2 - n - 3, n \in \mathbb{N}, n < 3\}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng của các phần tử của nó

a) $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

b) $B = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$

c) $C = \{1; 7; -3; 6\}$

d) $D = \{0; 2; 4; 6; 8\}$

e) $E = \{1; 7; -3; 6\}$

f) $F = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$

g) $G = \{1; 7; -3; 6\}$

h) $H = \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{8}; \frac{7}{16}; \frac{9}{32}\right\}$

Câu 3. Tìm các tập hợp $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ và $B \setminus A$ với $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x < 7\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 5\}$

Câu 4. Cho ba tập hợp: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 2\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x = 0\}$

a) Dùng phương pháp liệt kê phần tử xác định các tập hợp B và C .

b) Xác định các tập hợp sau: $A \cap B, B \cap C, C \cap A$.

c) Xác định các tập hợp sau: $A \cup B, B \cup C, C \cup A$.

d) Xác định các tập hợp sau: $A \setminus B, B \setminus C, C \setminus A$.

Câu 5. Cho ba tập hợp: $A = \{1; 3; 5; 7\}, B = \{2; 4; 5; 7\}, C = \{6; 5; 7\}$

a) Tìm $A \cup B, A \cup C, B \cap C, B \cup C$

b) Chứng minh: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

c) Chứng minh: $A \cap (B \cap C) = A \cap B = B \cap C = C \cap A = A \cap B \cap C$.

Dạng toán 2. Xác định tập hợp và các phép toán trên tập hợp các số thực

Phương pháp giải

- Biểu diễn các tập hợp lên trục số, lưu ý vị trí các phần tử trên trục số (phần tử nào nhỏ hơn thì đứng bên trái).
- Dùng định nghĩa các phép toán để xác định các phần tử của tập hợp.

Câu 6. Các mệnh đề sau đúng hay sai? Giải thích

a) $\{-4; 2\} \subset [-4; 2]$

b) $[1; +\infty) = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$

c) $(-1; 3] = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

d) $(-2; 2] = [-2; 2)$

e) $\mathbb{N} \subset [0; +\infty)$

f) $\{-3; 1\} \setminus (-3; 1) = \{-3; 1\}$

Câu 7. Các tập hợp sau là các đoạn, khoảng, nửa khoảng nào ? Vẽ hình.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 7\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x + 1 \geq 8\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x + x \leq 3\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < 3x - 2 \leq 2\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 7 > 4\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 \leq 0\}$

Câu 8. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

- a) $[-3; 1) \cup (0; 4]$
- b) $(-2; 15) \cup (3; +\infty)$
- c) $(0; 2) \cup [-1; 1]$
- d) $(-\infty; 1) \cup (-1; +\infty)$

Câu 9. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

- a) $[-12; 3) \cap (-1; 4]$
- b) $(4; 7) \cap (-7; -4)$
- c) $(2; 3) \cap [3; 5)$
- d) $(-\infty; 1) \cap (-1; +\infty)$

Dạng toán 3. Tập hợp con. Tập hợp bằng nhau

Phương pháp giải

Cho hai tập hợp A và B .

- $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$. Chú ý: Tập A có n phần tử thì có 2^n tập hợp con
- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A)$

Câu 10. Cho tập hợp $E = \{a, b, c, d\}$

- a) Tìm các tập hợp con của E gồm có 2 phần tử.
- b) Tập hợp E có bao nhiêu tập hợp con.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 11. Xác định các tập hợp con của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 2)(x^3 - x) = 0\}$.

Câu 12. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 10 < 10\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 = x\}$. Tập nào là con của tập nào? Các tập nào bằng nhau?

Câu 13. (VD) Cho tập hợp $E = \{-3; 4\}$, $F = \{-3; x^2\}$, $G = \{-3; x^2; y\}$. Tìm x, y, z để $E = F = G$.

Câu 14. (VD) Tìm tất cả các tập X sao cho $X \subset \{-3; -2; 0; 1; 2; 3\}$ và $X \subset \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Câu 15. (VD) Tìm tất cả các tập X sao cho $\{1; 3\} \subset X$ và $X \subset \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Dạng toán 4. Giải toán bằng biểu đồ Ven

Phương pháp giải

- Vẽ vòng tròn đại diện các tập hợp (mỗi vòng tròn là một tập hợp), lưu ý hai vòng tròn có phần tử chung nếu giao của hai tập hợp là khác rỗng.
- Dùng các biến để chỉ số phần tử của từng phần không giao nhau.
- Từ giả thiết bài toán, lập hệ phương trình giải tìm các biến.

Câu 16. Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10 A có 17 bạn được công nhận học sinh giỏi Văn, 25 bạn học sinh giỏi Toán. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán biết lớp 10 A có 45 học sinh và có 13 học sinh không đạt học sinh giỏi.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Có 100 học sinh trường X tham gia câu lạc bộ ngoại ngữ của nhà trường, mỗi học sinh nói được một hoặc hai trong 3 thứ tiếng Anh, Pháp, Nhật. Có 39 học sinh chỉ nói được tiếng Anh. 35 học sinh chỉ nói được tiếng Pháp và 8 học sinh nói được cả hai tiếng Anh và Nhật. hỏi có bao nhiêu học sinh chỉ nói được tiếng Anh?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 18. Hãy thực hiện các phép toán trên tập

hợp trong các trường hợp sau:

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$.
Xác định $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A,$
 $(A \cup B) \setminus (A \cap B), (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$

b) $A = \{1; 2; 3; 4\}, B = \{2; 4; 6; 8\}$ và
 $C = \{3; 4; 5; 6\}$. Xác định $A \cup B, B \cup C,$
 $C \cup A, A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \setminus B, B \setminus C,$
 $C \setminus A, (A \cup B) \cap C$

Câu 19. Hãy thực hiện các phép toán trên tập hợp trong các trường hợp sau:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$ và
 $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 2\}$. Xác định
 $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A.$

b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4)(2x^2 - 5x) = 0\}$ và
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6 \text{ và } x \text{ là số chẵn}\}$. Xác định $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A.$

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 9)(x^2 - 5x - 6) = 0\}$

$, B = \{2; 3; 5\}$. Xác định $A \cap B, A \cup B, A \setminus B,$
 $B \setminus A.$

d) $A = \{2; 3; 5\},$
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 9)(x^2 - x - 6) = 0\}.$
Xác định $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A.$

e) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 - 9x = 0\},$
 $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| < 3\}$. Xác định $A \cap B,$
 $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A.$

f) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x + 8}{x + 1} \in \mathbb{Z}\right\},$
 $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |x + 2| < 5\}$. Xác định $A \cap B,$
 $A \cup B, A \setminus B, B \setminus A.$

Câu 20. Mỗi học sinh lớp 10C đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi môn thể thao này. Hỏi lớp 10C nói trên có tất cả bao nhiêu học sinh?

BÀI 4. CÁC TẬP HỢP SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Các tập hợp số đã học

a) Tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \dots\dots\dots$

$\mathbb{N}^* = \dots\dots\dots$

Tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \dots\dots\dots$

Tập hợp các số $-1, -2, -3, \dots$ là các số nguyên âm, kí hiệu: $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$.

Tập hợp các số $1, 2, 3, \dots$ là các số nguyên dương, kí hiệu: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Vậy $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm.

c) Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$

Số hữu tỉ biểu diễn được dưới dạng một phân số $\frac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$.

Số hữu tỉ còn được biểu diễn bởi số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.

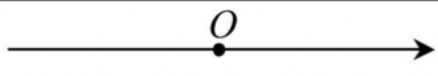
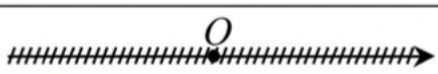
Ví dụ: $\frac{5}{4} = 1,25$ (thập phân hữu hạn) và $\frac{5}{12} = 0,41(6) = 0,41666666\dots$ (vô hạn tuần hoàn).

d) Tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.

Tập hợp các số thực gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn.

Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ (căn).

Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
Khoảng $(-\infty; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
Đoạn $[a; b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
Khoảng $(a; b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	

$(-\infty; a) \cup (b; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a \text{ hoặc } x > b\}$		
$(-\infty; a] \cup [b; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a \text{ hoặc } x \geq b\}$		
Tập số thực $(-\infty; +\infty)$	$\mathbb{R}$	
Tập rỗng	$\emptyset$	

Các tập hợp con thường dùng của $\mathbb{R}$

Kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực (cùng), kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực (cùng).

Ta có thể viết $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ và gọi là khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Học sinh cần phân biệt sự khác nhau giữa tập hợp và đoạn, khoảng, nửa khoảng, chẳng hạn:

$\{1; 5\}, (1; 5), [1; 5), (1; 5], [1; 5] \dots$

B. BÀI TẬP

Câu 1. Hãy xác định: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$, $C_{\mathbb{R}}A$, $C_{\mathbb{R}}B$ và biểu diễn chúng trên trục số trong mỗi trường hợp sau:

a) $A = [-4; 4), B = [1; 7)$

c) $A = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty), B = [-3; 4]$

b) $A = [3; +\infty), B = (0; 4)$

Câu 2. Tìm $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$, $C_{\mathbb{R}}A$, $C_{\mathbb{R}}B$ và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ hay } x \geq 2\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2\}$,
 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 3\}$.

Câu 3. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục

a) $(-\infty; 3] \cap (-2; +\infty)$

b) $\mathbb{R} \setminus ((0; 1) \cup (2; 3))$

c) $(-15; 7) \cup (-2; 14)$

d) $\mathbb{R} \setminus ((3; 5) \cap (4; 6))$

e) $(0; 12) \setminus [5; +\infty)$

f) $(-2; 7] \setminus [1; 3]$

g) $\mathbb{R} \setminus (1; 1)$

h) $((-1; 2) \cup (3; 5)) \setminus (1; 4)$

Câu 4. Giải các hệ bất phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x - 4 > 0 \\ 8 - x \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 6 \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} 3x - 9 \leq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 8 - 2x \geq 0 \end{cases}$

Câu 5. (VD) Cho hai tập hợp $A = [m; m + 2)$ và $B = (5; 6)$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

a) Tìm tham số m để $A \subset B$?

b) Tìm tham số m để $B \subset A$?

c) Tìm tham số m để $A \cap B = \emptyset$ (Cố định tập $B = (5; 6)$ thì tập A nằm bên trái hoặc bên phải).

Câu 6. (VD) Cho hai tập hợp $A = (3m - 1; 3m + 7)$ và $B = (-1; 1)$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

a) Tìm tất cả các tham số m để $B \subset A$?

b) Tìm tất cả các tham số m để $A \cap B = \emptyset$?

Câu 7. (VD) Cho hai tập hợp $A = (2; 7 - m)$ và $B = (m - 1; +\infty)$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

a) Tìm tất cả các tham số m để $A \subset B$?

b) Tìm tất cả các tham số m để $A \cap B = \emptyset$?

c) Tìm tất cả các tham số m để $A \cup B = (1; +\infty)$?

Câu 8. (VD) Cho hai tập hợp $A = (m - 1; 4]$ và $B = (-2; 2m + 2)$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

a) Tìm tất cả các tham số m để $A \cap B \neq \emptyset$?

b) Tìm tất cả các tham số m để $A \subset B$?

c) Tìm tất cả các tham số m để $B \subset A$?

d) Tìm các tham số m để $(A \cap B) \subset (-1; 3)$?

ÔN TẬP CHƯƠNG

Câu 1. Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó

- a) P : "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật" và Q : "Tứ giác $ABCD$ có hai đường thẳng AC và BD vuông góc với nhau".
- b) P : " $\sqrt{3} > -\sqrt{2}$ " và Q : " $(-\sqrt{3})^3 > (-\sqrt{2})^3$ ".
- c) P : "Tam giác ABC có $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ " và Q : "Tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ".
- d) P : "Tổ Hữu là nhà Toán học lớn của Việt Nam" và Q : "Évariste Galois là nhà Thơ lỗi lạc của Thế giới".

Câu 2. Phát biểu các định lý sau đây bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ"

- a) Nếu trong mặt phẳng, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.
- b) Nếu số nguyên dương có chữ tận cùng bằng 5 thì chia hết cho 5.
- c) Nếu tứ giác là hình thoi thì hai đường chéo vuông góc với nhau.
- d) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có các góc tương ứng bằng nhau.
- e) Nếu số nguyên dương a chia hết cho 24 thì chia hết cho 4 và 6.

Câu 3. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó

- a) A : "Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau";
- b) B : "Tổng hai cạnh của một tam giác nhỏ hơn cạnh còn lại";
- c) C : "Trong tam giác tổng ba góc không bằng 180° "
- d) D : "Tồn tại hình thang là hình vuông".

Câu 4. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 75x - 77 = 0\}$
- c) $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$.
- d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} \leq 4 \cap x \text{ là bội của } 3\}$.
- e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x - 1)\sqrt{2x - 3} = 0\}$.
- f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^3 - 3x^2 - 5x = 0\}$
- g) $G = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$.
- h) $H = \{x \mid x = 3k \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 12\}$
- i) $I = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 2x)(2x^2 - 3x - 5) = 0\}$.
- j) $J = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \left(x - \frac{1}{2}\right) \left[x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}\right] = 0\right\}$

Câu 5. Cho các tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$, $C = \{3; 4; 5; 6\}$. Tìm $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $A \cup (B \cap C)$.

Câu 6. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3k - 1, k \in \mathbb{N}, k \leq 3\}$. Xác định tập $A, B, A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A$.

Câu 7. Cho các tập hợp sau
 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 6\}$
 $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (1 - 3x)(x^4 - 3x^2 + 2) = 0\}$,
 $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- a) Viết các tập hợp A, B dưới dạng liệt kê các phần tử.
 b) Tìm $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, C_{B \cup A} A \cap B$.
 c) Chứng minh rằng $A \cap (B \cup C) = A$.

Câu 8. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

Câu 9. Cho các tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 7\}$. Tìm $A \cap B; A \cup B$

Câu 10. Cho đoạn $A = [-5; 1]$ và khoảng $B = (-3; 2)$. Xác định $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, C_{\mathbb{R}} B$.

Câu 11. Cho hai nửa khoảng $A = (-1; 0]$ và $B = [0; 1)$. Xác định $A \cup B, A \cap B, C_{\mathbb{R}} A, A \setminus B, B \setminus A$.

Câu 12. Cho hai nửa khoảng $A = (0; 2]$ và $B = [1; 4)$. Xác định $C_{\mathbb{R}}(A \cup B), C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

Câu 13. Tìm x thỏa

- a) Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}, B = \{1; 2; 3; 4; x\}$.
 Tìm x để $B \subset A$.
 b) Cho $A = \{2; 5\}, B = \{5; x\}, C = \{x; y; 5\}$.
 c) Tìm x, y để $A = B = C$.
 Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}, B = \{1; 2; 3; 4; x\}$.
 d) Tìm x để $B \subset A$. Cho $A = \{1; 2; 3\}$,
 $B = \{1; 2; 3; x\}$. Tìm x để $A = B$.

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

Lý thuyết

1. Định nghĩa

Giả sử có hai đại lượng biến thiên x và y , trong đó x nhận giá trị thuộc tập số D .

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thì ta có một hàm số của x .

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x . Tập hợp D được gọi là tập xác định hàm số.

Tập xác định của $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

2. Các cho hàm số

Cho bảng bảng, biểu đồ, công thức $y = f(x)$.

3. Sự biến thiên của hàm số

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị từ trái sang phải đi xuống, hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì đồ thị từ trái sang phải đi lên.

4. Đồ thị hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy với mọi $x \in D$.

5. Tính chẵn, lẻ của hàm số

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là hàm số chẵn nếu

$$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = f(x)$$

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là hàm số lẻ nếu

$$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

Tính chất:

- + Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
- + Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.

B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

Phương pháp giải

Để tính giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại a , ta thế $x = a$ vào biểu thức $f(x)$ và được ghi $f(a)$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 4x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ -x^3 + 3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính $f(3), f(2), f(-2), f(\sqrt{2})$ và $f(2\sqrt{2})$

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho hàm số $y = g(x) = -5x^2 + 4x + 1$. Tính $g(-3)$ và $g(2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = h(x) = \begin{cases} -2(x^2 + 1) & \text{khi } x \leq 1 \\ 4\sqrt{x-1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính $h(1), h(2), h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), h(\sqrt{2})$.

Câu 4. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+8} & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+7} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Tính $f(-3), f(2), f(1)$ và $f(9)$.

Dạng toán 2. Đồ thị của hàm số**Phương pháp giải**

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D . Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ $(x; f(x))$ với $x \in D$, gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.
- Để biết điểm $M(a; b)$ có thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ không, ta thế $x = a$ vào biểu thức $f(x)$:
 - Nếu $f(a) = b$ thì điểm $M(a; b)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.
 - Nếu $f(a) \neq b$ thì điểm $M(a; b)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + \sqrt{x-3}$. Các điểm $A(2; 8)$, $B(4; 12)$ và $C(5; 25 + \sqrt{2})$ điểm nào thuộc đồ thị hàm số đã cho?

.....

.....

.....

.....

Câu 6. Cho hàm số $y = g(x) = \frac{-2x}{x^2 - 2x - 3}$. Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số mà có tung độ là 2 .

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & (x \leq 1) \\ \sqrt{x^2 - 1} & (x > 1) \end{cases}$

- a) Tìm tọa độ các điểm thuộc đồ thị (G) của hàm số f có hoành độ lần lượt là $-1; 1$ và $\sqrt{5}$.
- b) Tìm tọa độ các điểm thuộc đồ thị của hàm số f có tung độ bằng 7 .

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{khi } x \leq 1 \\ x^2 - 3x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$.

- a) Điểm nào trong các điểm sau thuộc đồ thị hàm số: $A(3; 3)$, $B(-1; -5)$, $C(1; -2)$ và $D(3; 0)$.
- b) Tìm các điểm thuộc đồ thị hàm số mà có tung độ là -2 .

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ có đồ thị (G) . Điểm nào sau đây thuộc đồ thị (G) của hàm số:
 $A\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right), B\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{2}\right)$

Dạng toán 3. Tìm tập xác định của hàm số**Phương pháp giải**

Các trường hợp thường gặp khi tìm tập xác định:

- Hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ xác định $\Leftrightarrow Q(x) \neq 0$
- Hàm số $y = \sqrt{P(x)}$ xác định $\Leftrightarrow P(x) \geq 0$.
- Hàm số $y = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ xác định $\Leftrightarrow Q(x) > 0$

Câu 10. Tìm tập xác định các hàm số sau.

a) $y = \frac{2x-1}{3x+2}$

b) $y = \frac{1-2x}{2x^2-5x+2}$

c) $y = \sqrt{4x-2} + \sqrt{5-x}$

d) $y = \frac{x}{x-1} + \sqrt{2x+4}$

e) $y = \frac{2017}{\sqrt{4-x^2}}$

f) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2+2x+1}$

g) $y = \frac{3x+1}{x^2-x+1}$

h) $y = \frac{x^2-2017}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

i) $y = \frac{x+3}{2x^2-18} + \frac{5}{1+x^2} - 2x+1$

j) $y = \frac{x^2-\sqrt{7-3x}}{(x^2-4x)\sqrt{2x+2}}$

k) $y = \frac{x^3-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{7-3x}}$

l) $y = 4\sqrt{2x+1} - (x-4)\sqrt{3-x}$

Câu 11. Tìm tập xác định các hàm số sau.

a) $y = \frac{x\sqrt{2x+5}-3\sqrt{2-5x}}{4\sqrt{x^2+4}}$

b) $y = \frac{3x+4+\sqrt{x^2+2}}{(2x^2+x+5)(|x|+1)}$

c) $y = \frac{2x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{7-2x}}$

d) $y = \frac{x^2-4x+3}{(x^2+2x+4)\sqrt{2x^2+1}}$

e) $y = \frac{2x^2+x-3}{(x^2-5x)\sqrt{x-2}}$

f) $y = \frac{\sqrt{2x-3}}{3-x} + \sqrt{5-x}$

g) $y = \frac{\sqrt{2x+4}+3\sqrt{4-x}}{x^2-3x+2}$

h) $y = \frac{3x+\sqrt{6-x}}{1+\sqrt{x+4}}$

i) $y = \frac{2x^2-5\sqrt{9-2x}}{2-\sqrt{x-2}}$

j) $y = \frac{3x+\sqrt{\frac{x^2+2}{2x+10}}}{1-\sqrt{3-x}}$

k) $y = \frac{\sqrt{3-4x}-x\sqrt{x}}{|2x-7|+2}$

l) $y = \frac{\sqrt{x^2+10}-\sqrt{2x+11}}{|3x-2|-4}$

Câu 12. Tìm tập xác định các hàm số sau.

a) $y = x^2-3x+2$

b) $y = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$

c) $y = \frac{x^2+2x-3}{(x^2-9x)(x^2+x+1)}$

Câu 13. Tìm m để hàm số $y = \frac{3x+5}{x^2+3x+m-1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Câu 14. Tìm m để hàm số $y = x^2+2\sqrt{3x-2m+1}$ có tập xác định là $D = [-1; +\infty)$

Câu 15. Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2+2}{x^2-4x+m-5}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Câu 16. Tìm m để hàm số $y = \frac{2x^2-5}{3mx-4m+8}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Dạng toán 4. Sự biến thiên của hàm số

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

Câu 17. Xét sự biến thiên của các hàm số sau

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

b) $f(x) = 2x - x^2 + 1$ trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

c) $f(x) = x^2 + 10x + 9$ trên khoảng $(-5; +\infty)$.

d) $f(x) = -2x^2 + 4x$ trên khoảng $(-\infty; -1)$.

e) $f(x) = x^3 + 3x - 1$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

f) $f(x) = -2020x^3 - x$ trên $(-\infty; +\infty)$

g) $f(x) = \frac{2}{x-2}$ trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

h) $f(x) = \frac{3}{1-x}$ trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

i) $f(x) = \frac{x}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.

j) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$

k) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x}$ trên khoảng $(3; +\infty)$

l) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 18. (VD) Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}$ trên khoảng $(4; +\infty)$

b) $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}$ trên $(3; +\infty)$

c) $f(x) = \sqrt{5-x}$ trên $(-\infty; 2)$

d) $f(x) = |2x-4| + x$ trên khoảng $(-\infty; 2)$

Câu 19. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số

1. $y = (m-2)x + 5$ nghịch biến $(-\infty; +\infty)$.

2. $y = (m+1)x + m$ đồng biến $(-\infty; +\infty)$.

3. $f(x) = \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

4. $f(x) = \frac{m+1}{x}$ nghịch biến khoảng $(0; +\infty)$.

Dạng toán 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số**Phương pháp giải**

Bước 1 Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$

Bước 2 Xét D có là tập đối xứng không ?

- Nếu $\exists x \in D$ sao cho $-x \notin D$ thì ta kết luận hàm số không phải là hàm số chẵn, cũng không phải là hàm số lẻ.
- Nếu $\forall x \in D$, ta có $-x \in D$ thì ta làm sang bước 3.

Bước 3 Với mọi $-x \in D$, tính $f(-x)$, (nghĩa là chỗ nào có x sẽ thế bằng $-x$).

- Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì hàm số đã cho là hàm số chẵn.
- Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 20. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $f(x) = (2x - 2)^{2020} + (2x + 2)^{2020}$

b) $f(x) = (5x + 1)^{2018} + (1 - 5x)^{2018}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

b) $f(x) = -2x^3 + 3x - \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \frac{x^{2020} + 4}{x^{2021}}$

e) $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$

f) $f(x) = \frac{2x^2 - |x|}{\sqrt[3]{x}}$

g) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$

h) $g(x) = 2x - 1 + \sqrt{3 + x} + \sqrt{3 - x}$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} + \sqrt{3 - x}}{x^2}$

j) $y = f(x) = \frac{2x^4}{x^2 - 9}$

k) $y = g(x) = \sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}$

l) $y = u(x) = \frac{\sqrt{5 + x} + \sqrt{5 - x}}{x - 1}$

m) $y = 3x^2 - 1$

n) $y = (2x - 2)^{2017} + (2x + 2)^{2017}$

o) $y = -5x^4 - 3|x| + 8$

p) $y = |2x + 1| + |2x - 1|$

q) $y = h(x) = x^2 - 3x$

$$\text{r) } y = k(x) = \frac{x^3 - 5x}{|x - 1| + |x + 1|}$$

$$\text{s) } y = v(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{6 + 3x} - \sqrt{6 - 3x}}$$

$$\text{t) } y = 6x^3$$

$$\text{u) } y = |x + 2| - |x - 2|$$

$$\text{v) } y = \sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x}$$

$$\text{w) } f(x) = x^3 + |x|$$

Câu 22. (VD) Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

$$\text{a) } f(x) = \frac{|x + 3| + |x - 3|}{|x + 3| - |x - 3|}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{|x - 1| + |x + 1|}{|x - 1| - |x + 1|}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{|2 - x| - |2 + x|}{x^2 - 1}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{|3 - x| - |x + 3|}{x^2 - 4}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{\sqrt{x + 5} + \sqrt{5 - x}}{x^2 - 9}$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{\sqrt{7 - x} - \sqrt{x + 7}}{x^2 - 16}$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} - x} - 2x^2 - 1$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 2}}{\sqrt{4x^2 + 2} - 2x} - 4x^2 - 1$$

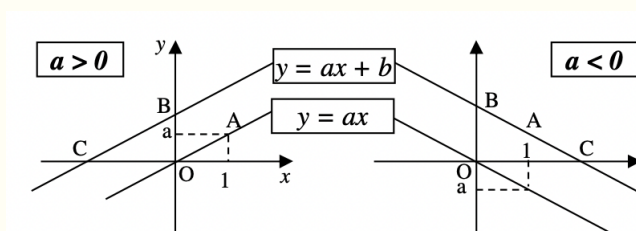
BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. LÝ THUYẾT

Lý thuyết

1. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$
- Sự biến thiên
 - Khi $a > 0$: Hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$.
 - Khi $a < 0$: Hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.
- Đồ thị hàm số là đường thẳng có hệ số góc bằng a , cắt trục hoành tại $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, cắt trục tung tại điểm $B(0; b)$ (b là tung độ).



- Vị trí tương đối của hai đường thẳng: Cho: $d: y = ax + b$ và $d': y = a'x + b'$ (với $a, a' \neq 0$) :
 - $d \equiv d' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'$
 - $d // d' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b \neq b'$
 - d cắt $d' \Leftrightarrow a \neq a'$
 - $d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$
 - d cắt d' tại một điểm trên trục tung $\Leftrightarrow a \neq a' \text{ và } b = b'$

2. Hàm số $y = |ax + b|$, ($a \neq 0$)

$$y = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{khi } x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax + b|$, ($a \neq 0$) ta có thể vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$, rồi xóa đi hai phần đường thẳng nằm ở phía dưới trục hoành.

B. BÀI TẬP

Dạng 1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Phương pháp giải

Cho: $d : y = ax + b$ và $d' : y = a'x + b'$ (với $a, a' \neq 0$) :

- $d \equiv d' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'$
- $d // d' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b \neq b'$
- $d \text{ cắt } d' \Leftrightarrow a \neq a'$
- $d \perp d' \Leftrightarrow a \cdot a' = -1$
- $d \text{ cắt } d' \text{ tại một điểm trên trục tung} \Leftrightarrow a \neq a' \text{ và } b = b'$

Câu 1. Cho đường thẳng $(D) : y = (m^2 - 2)x + m - 1$. xác định giá trị của m sao cho:

a) (D) song song với $(d_1) : y = 2x + 1$

b) (D) cắt $(d_2) : y = m(2x - 1) + 3 + x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Định m để đường thẳng sau đồng quy:

a) $(d_1) : y = -2x + 2; (d_2) : y = -4x; (d_3) : y = (m - 1)x + 2m + 1$

b) $(d_1) : y = -2(x + 1); (d_2) : y = 3mx - m^2 + \frac{2}{3}; (d_3) : y = x - m$

Câu 3. Định m để đường thẳng sau đồng quy:

- a) $d_1 : y = 2x - 1$, $d_2 : y = 3 - x$, $d_3 : y = mx + 2$.
- b) $d_1 : y = 3x + 2$, $d_2 : y = -x - 3$, $d_3 : y = mx + 5$
- c) $d_1 : 5x - y + 2 = 0$, $d_2 : y = 10x + 2$, $d_3 : y = x + m$
- d) $d_1 : y = x + 1$, $d_2 : y = -x + m$, $d_3 : y = 3x$
- e) $d_1 : y = 2x$, $d_2 : y = -x - 3$, $d_3 : y = mx + 5$
- f) $d_1 : 3x - 4y + 15 = 0$, $d_2 : 5x + 2y - 1 = 0$, $d_3 : mx - (2m - 1)y + 9m - 3 = 0$

Dạng toán 2. Lập phương trình đường thẳng

Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B .

Nếu $x_A \neq x_B$ ta có:

- Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b(1)$.
- Thế tọa độ A và B vào (1) được hệ phương trình 2 ẩn a và b .
- Giải hệ phương trình này, tính được a và b .

Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng qua điểm A và song song với $\Delta : y = ax' + b'$.

- Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b(1)$.
- Vì $A \in d$ nên thế tọa độ điểm A vào (1) ta được phương trình (*)
- Vì $d // \Delta$ nên $a = a'(**)$.
- Giải hệ (*) và (**) ta tìm được a và b .

Dạng 3. Viết phương trình đường thẳng qua điểm A và vuông góc với $\Delta : y = a'x + b'$.

- Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b(1)$.
- Vì $A \in d$ nên thế tọa độ điểm A vào (1) ta được phương trình (*)
- Vì $d \perp \Delta$ nên $a \cdot a' = -1(**)$.
- Giải hệ (*) và (**) ta tìm được a và b .

Câu 4. Viết phương trình đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- a) d đi qua 2 điểm A, B với: $A(-1; 3), B(4; 1)$
- b) d đi qua $M(1; -2)$ và song song với đường thẳng $\Delta : y = 3x + 2017$.
- c) d đi qua $N(-3; 3)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = -\frac{1}{4}x - 2017$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Tìm a, b sao cho đồ thị hàm số $y = ax + b$:

- a) Đi qua 2 điểm $A(-1; 3)$ và $B(2; 1)$.
- b) Đi qua hai điểm $A(-1; -20)$ và $B(3; 8)$.
- c) Đi qua hai điểm $A(-1; 3)$ và $B(1; 2)$.
- d) Đi qua điểm $A(1; 3)$ và song song với $d : y = -2x + 1$.
- e) Đi qua điểm $B(3; 2)$ và vuông góc với $d : x - 2y - 2017 = 0$
- f) Đi qua $M(-5; 4)$ và song song Oy .
- g) Đi qua $M(-12; -5)$ và song song Oy .
- h) Đi qua $N(\sqrt{2}; 1)$ và song song Ox .
- i) Đi qua $P(2; -3)$ và vuông góc với Ox .

Câu 6. Tìm phương trình đường thẳng D , biết rằng:

- a) D đi qua 2 điểm $M(-2; 2)$ và $N(4; -1)$

- b) D đi qua $A(2; 1)$ và song song với đường thẳng $(d) : y = 2x + 1$.
- c) Đi qua điểm $A(1; -1)$ và song song với đường thẳng $d : y = 2x + 7$.
- d) Đi qua $M(1; -2)$ và có hệ số góc $k = -\frac{1}{3}$.
- e) Đi qua điểm $I(-3; 2)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.
- f) Đi qua điểm $K(-2; 3)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ tư.

Câu 7. (VD) Tìm đường thẳng d đi qua điểm M cho trước và chắn trên hai trục tọa độ một tam giác vuông cân trong các trường hợp sau:

- a) Qua $M(1; 2)$
- b) Qua $M(-3; 1)$

Câu 8. (VD) Tìm phương trình đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

- a) (d) song song với $(d_1) : y = \frac{1}{2}x$ và cắt $(d_2) : y = 2x - 3$ tại 1 điểm trên trục hoành.

- b) (d) song song với đường thẳng $(D) : y = \frac{2}{3}x$ và qua giao điểm của hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = 3x - 2$

Câu 9. (VD) Cho đường thẳng $(d) : y = ax + b$. Xác định a và b sao cho (d) cắt đường thẳng $(d_1) : y = \frac{3}{2}x - 5$ tại điểm có hoành độ bằng 4 và cắt đường thẳng $(d_2) : y = 2x - 1$ tại điểm có tung độ bằng 4.

Câu 10. Tìm phương trình đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

- a) Qua $A(1; -1)$ và song song với trục Ox .
- b) Qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = 2x$.
- c) Đi qua điểm $E(1; -2)$ và có hệ số góc là 0,5

- d) d qua $A(-1; 2)$ và tạo với hai trục tọa độ thành một tam giác cân.
- e) Đi qua điểm $A(1; 3)$ và vuông góc với $d : 2x - y + 1 = 0$
- f) Đi qua $M(2; 3)$ và song song với $d : 3x - y - 2017 = 0$
- g) Đi qua điểm $M(-1; 4)$ và cắt trục tung tại điểm N có tung độ bằng -2
- h) Cắt trục tung tại điểm E có tung độ bằng 3 và cắt trục hoành tại F có hoành độ là 1.
- i) Đi qua điểm $A(2; -30)$ và điểm B là giao điểm của hai đường thẳng $14x + y + 2 = 0$ và $y = -2x - 26$

Dạng toán 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

Phương pháp giải Thực hiện theo các bước trong lý thuyết.

Câu 11. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

- a) $y = -\frac{4}{3}x + 2$
- b) $y = \frac{2}{3}x - 5$
- c) $y = 4x$
- d) $y = 4$

Câu 12. Vẽ đồ thị các hàm số sau

- a) $y = \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 2 \\ x + 2 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$
- b) $y = \begin{cases} 2 & \text{khi } x \geq -1 \\ x + 3 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$
- c) $y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

$$d) y = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 0 \\ y = -\frac{1}{2}x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$e) y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq -1 \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 2 \\ x - 1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f) y = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } -2 \leq x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{khi } 1 < x \leq 2 \\ 2x - 4 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

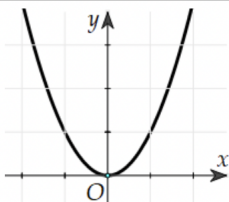
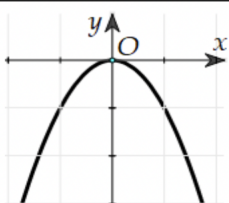
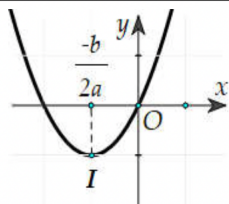
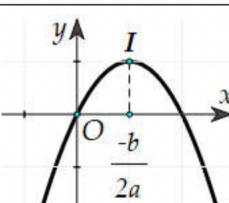
Câu 13. Cho hàm số:

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } -2 \leq x \leq 1 \\ -2x + 4 & \text{khi } 1 < x \leq 2 \\ 2x - 4 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

Hãy cho biết miền xác định, lập bảng biến thiên, vẽ đồ thị, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

BÀI 3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. LÝ THUYẾT

Hàm số	Tính chất	Bảng biến thiên	Đồ thị								
$y = ax^2$ $(a \neq 0)$	Đồ thị $y = ax^2$ là một parabol (P) có: - Đỉnh $O(0;0)$. - Trục đối xứng: Oy. - Bề lõm: $a > 0$: quay lên. $a < 0$: quay xuống.	Khi $a > 0$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y	$+\infty$	0	$+\infty$	
		x	$-\infty$	0	$+\infty$						
y	$+\infty$	0	$+\infty$								
Khi $a < 0$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y	$-\infty$	0	$-\infty$			
x	$-\infty$	0	$+\infty$								
y	$-\infty$	0	$-\infty$								
$y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$	Đồ thị $y = ax^2 + bx + c$ một là parabol có: - Đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. - Trục đ/x: $x = -\frac{b}{2a}$. - Bề lõm: $a > 0$: quay lên. $a < 0$: quay xuống.	Khi $a > 0$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>$-\frac{\Delta}{4a}$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$	
		x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$						
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$								
Khi $a < 0$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{\Delta}{4a}$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$			
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$								
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$								

B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị

Phương pháp giải Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$

Câu 1. Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị sau:

a) $d: y = x - 1$ và $(P): y = x^2 - 2x - 1$

b) $d: y = 3x + 2$ và $(P): y = x^2 + 2x + 3$

c) $d: y = 2x - 5$ và $(P): y = x^2 - 4x + 4$

d) $(P)_1: y = 3x^2 - 4x + 1$ và $(P)_2: y = -3x^2 + 2x - 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Tìm tọa độ giao điểm của các đường sau

- | | |
|--|---|
| a) $d : y = x - 2$ và $(P) : y = -x^2$ | d) $d : y = 2x + 3$ và $(P) : y = x^2$ |
| b) $d : y = -x + 1$ và $(P) : y = 2x^2$ | e) $d : x + y - 1 = 0$ và $(P) : y - x^2 + 4x - 3 = 0$ |
| c) $d : 2x - y - 11 = 0$ và $(P) : y = x^2 - 6x + 5$ | f) $d : x + 2 - y = 0$ và $(P) : 2y - x^2 + 2x - 8 = 0$ |

Dạng 2. Xác định các hệ số của hàm số bậc hai

Phương pháp giải

Ta thiết lập hệ phương trình với các a, b, c biểu thị các tính chất của đồ thị học của hàm số. Giải hệ phương trình này để tính a, b, c .

Câu 3. Xác định parabol (P) trong các trường hợp sau:

- $(P) : y = ax^2 + bx - 3$ có đỉnh $I(3; 6)$.
- $(P) : y = -x^2 + bx + c$ qua điểm $M(1; 6)$ và có hoành độ đỉnh bằng 2.
- Đồ thị (P) đi qua 3 điểm $A(1; 0), B(-3; -4)$ và $C(0; -4)$.
- Đồ thị (P) có đỉnh $S(2; -1)$, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

.....

.....

Câu 4. Xác định parabol (P) trong các trường hợp sau:

- a) $(P) : y = ax^2 + bx - 3$ có đỉnh $I(-1; -5)$.
- b) $(P) : y = ax^2 - 4x + c$ qua điểm $M(2; 3)$ và có hoành độ đỉnh bằng 1.
- c) $(P) : y = ax^2 + bx + 5$ đi qua $M(3; 2)$ và có trục đối xứng $x = 2$.
- d) $(P) : y = -2x^2 + bx + c$ đi qua $M(5; 9)$ và có trục đối xứng $x = 3$.
- e) $(P) : y = x^2 + bx + c$ qua hai điểm $M(6; 5)$ và điểm $N(1; -5)$.
- f) $(P) : y = ax^2 + 3x + c$ qua hai điểm $M(3; 2)$ và điểm $N(-1; -2)$.
- g) $(P) : y = ax^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(2; 1)$ và có tung độ đỉnh bằng -2 .
- h) $(P) : y = ax^2 + bx + 7$ đi qua điểm $A(3; 1)$ và có tung độ đỉnh bằng 9.

i) $(P) : y = ax^2 - 4x + c$ có trục đối xứng $x = 2$ và cắt trục Oy tại điểm $M(0; 3)$.

j) $(P) : y = ax^2 + 8x + c$ có hoành độ đỉnh bằng 4 và cắt trục Ox tại điểm $M(1; 0)$.

k) $(P) : y = ax^2 - 4x + c$ có trục đối xứng $x = 2$ và cắt trục Oy tại điểm $M(0; 3)$.

l) $(P) : y = ax^2 + 8x + c$ có hoành độ đỉnh bằng 4 và cắt trục Ox tại điểm $M(1; 0)$.

m) $(P) : y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm: $A(2; 5)$, $B(3; 8)$ và $C(0; 5)$

n) $(P) : y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm: $A(-1; -8)$, $B(3; -8)$ và $C(0; -2)$

Câu 5. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng đồ thị của nó:

a) Qua 3 điểm $A(0; -1)$, $B(1; 0)$ và $C(2; -7)$.

b) Qua 3 điểm $A(1; 1)$, $B(-1; 3)$ và $O(0; 0)$.

- c) Qua 3 điểm $A(0; -1)$, $B(1; -1)$ và $C(-1; 1)$.
- d) Có đỉnh $S(3; -4)$ và qua $I(1; 0)$.
- e) Có đỉnh $S(8; 0)$ và qua $I(6; -12)$
- f) Qua $A(1; 0)$ và đỉnh I có tung độ bằng -1 .
- g) Có đỉnh $I(3; -1)$ và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 1 .

- h) Cắt trục hoành tại điểm $M(-1; 0)$, cắt trục tung tại điểm $N(0; 3)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.
- i) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{8}$ khi $x = \frac{1}{4}$ và nhận giá trị bằng -5 khi $x = 2$.
- j) Đi qua $A(4; 7)$, $B(-2; -5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x - 10$.

Dạng toán 3. Vẽ đồ thị hàm số bậc hai

Phương pháp giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Đỉnh I : $\begin{cases} x_I = -\frac{b}{2a} \\ y = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$
- Trục đối xứng: $x = -\frac{b}{2a}$
- Bảng biến thiên: ...
- Bảng giá trị: ...
- Vẽ đồ thị: ...
- Nhận xét đồ thị: ...

Câu 6. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $y = x^2 + 1$

b) $y = -3x^2 - 6x + 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Lập bảng biến thiên và vẽ các đồ thị hàm số sau

a) $y = x^2 - 3x + 2$

b) $y = -x^2 + 4x - 4$

c) $y = 2x^2 - x$

d) $y = -x^2 - 2x + 3$

e) $y = x^2 + 2x - 2$

f) $y = -x^2 + 4x - 3$

Câu 8. Cho parabol $(P) : -x^2 + 2x + 3$

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ (P) .
- b) Đường thẳng $d : y = 2x - 1$ cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B . Tìm tọa độ A, B và tính độ dài đoạn thẳng AB .

Câu 9. Cho parabol $(P) : y = x^2 + bx + c$

- a) Tìm b, c biết đỉnh $I(1; 1)$.
- b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + bx + c$ trên đoạn $[0; 3]$.
- c) Tìm m để đường thẳng $d : y = 2x + m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của AB là $K \in d' : y = 2x$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ (P)

- a) Vẽ đồ thị (P)
- b) Xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $(0; 1)$

c) Xác định giá trị của x sao cho $y \leq 0$

d) Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0; 3]$

Câu 11. Tìm tham số m để đường thẳng $d : y = x + m$ cắt parabol $(P) : y = x^2 - 4x + 3$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu ?

Câu 12. Cho parabol $(P) : y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt trục hoành Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Câu 13. Cho parabol $(P) : y = x^2 + (2m + 1)x - m - 1$. Tìm tham số m để (P) cắt trục hoành Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 1$.

Câu 14. * Cho parabol $(P) : y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d : y = mx + 3$. Tìm tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Câu 15. "Tìm tham số m để parabol $(P) : y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA = 3OB$?

Câu 16. Cho parabol $(P) : y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d : y = mx + 3$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$

Câu 17. Tìm tọa độ điểm các điểm cố định của parabol (P) khi m thay đổi trong các trường hợp sau:

a) $(P) : y = (m - 1)x^2 + 2mx - 3m + 1$

b) $(P) : y = (m - 2)x^2 - (m - 1)x + 3m - 4.$

c) $d : y = 2mx + 1 - m$

d) $(C_m) : y = (2 - m)x^2 + (3m + 1)x - 2m$

e) $y = mx^2 - 2(m - 2)x - 3m + 1$

f) $y = mx^2 - 2mx + 1$

g) $y = (m - 1)x^2 - m + 2$

h) $y = (m - 1)x^2 + 2mx - 3m + 1$

i) $y = (m - 2)x^2 - (m - 1)x + 3m - 4$

j) $y = m^2x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 1$

k) $y = (m + 1)x - 3m + 1$

l) $y = 2mx + 1 - m$

m) $y = (2m + 5)x + m + 3$

Câu 18. Cho parabol $(P) : y = x^2 - 3x + 2.$ a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $(P).$ b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 3 - 2m = 0$ **Câu 19.** Vẽ đồ thị hàm số $(P) : y = -x^2 + 5x + 6.$ Sử dụng đồ thị để biện luận theo m số điểm chung của (P) và đường thẳng $y = m.$ **Câu 20.** Dùng đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $-x^2 + 4x + m = 0$

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. LÝ THUYẾT

Lý thuyết

1. Điều kiện xác định của phương trình

Điều kiện xác định của phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f(x), g(x)$ cùng được xác định và các điều kiện khác (nếu có trong đề bài).

Một số điều kiện cơ bản:

- $\sqrt{f(x)}$ xác định khi $f(x) \geq 0$.
- $\frac{1}{f(x)}$ xác định khi $f(x) \neq 0$.
- $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định khi $f(x) > 0$.

2. Giải phương trình bằng phép biến đổi tương đương và hệ quả

Để giải phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng

- Cộng (hoặc trừ) cả hai vế của phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương phương trình đã cho.
- Nhân (chia) vào hai vế với một biểu thức khác không và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.

- Bình phương hai vế của phương trình ta thu được phương trình hệ quả của phương trình đã cho. Sau đó ta thử lại nghiệm của phương trình.
- Bình phương hai vế của phương trình(hai vế luôn cùng dấu) ta luôn thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.

B. BÀI TẬP

Câu 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình

a) $\frac{5}{x^2 - x - 1} = \sqrt[3]{x}$

b) $1 + \sqrt{2x - 4} = \sqrt{2 - 4x}$

c) $1 + \sqrt{x - 2} = \sqrt{x - 1}$

d) $\sqrt{2x - 6} = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

Câu 2. Giải các phương trình sau

a) $x - \sqrt{2 - x} = 5 - \sqrt{2 - x}$

b) $\sqrt{3 - x} + x = \sqrt{3 - x} + 1$

c) $x + \sqrt{x - 2} = \sqrt{2 - x} + 2$

d) $\sqrt{3x - 12} + 2 = \sqrt{4 - x} + 2x$

e) $\frac{\sqrt{4x + 12}}{x + 3} + x = \sqrt{-x - 3} + 1$

f) $\frac{x^2}{\sqrt{x - 1}} = \frac{9}{\sqrt{x - 1}}$

g) $x^2 - \sqrt{1 - x} = \sqrt{x - 2} + 3$

h) $5x - \sqrt{x - 7} = \sqrt{7 - x} + 35$

Câu 3. Giải các phương trình sau

a) $x + 1 + \frac{2}{x + 3} = \frac{x + 5}{x + 3}$

b) $2x + \frac{3}{x - 1} = \frac{3x}{x - 1}$

c) $\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2}$

d) $\frac{2x^2 - x - 3}{\sqrt{2x - 3}} = \sqrt{2x - 3}$

Câu 4. Giải các phương trình sau

a) $(x^2 - 6x + 5)\sqrt{x - 3} = 0$

b) $(x + 1)(\sqrt{4x + 1} - 1) = 0$

c) $1 + \frac{1}{x - 3} = \frac{5}{x^2 - x - 6}$

d) $\sqrt{x + 3}(x^4 - 3x^2 + 2) = 0$

e) $\frac{x^2}{\sqrt{x - 2}} = \frac{1}{\sqrt{x - 2}} - \sqrt{x - 2}$

f) $\sqrt{\sqrt{x} - 1}(x^2 - x - 2) = 0$

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT - BẬC HAI

Dạng toán 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất

Phương trình bậc nhất có dạng $ax + b = 0$ (1)

TH1 $a \neq 0$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

TH2 $a = 0$

– $b = 0$ thì (1) nghiệm đúng với mọi x

– $b \neq 0$ thì (1) vô nghiệm

Câu 1. Giải và biện luận phương trình:

a) $(m - 1)x + 2 - m = 0$

c) $m(mx - 1) = 9x + 3$

b) $(m + 1)^2x = (3m + 7)x + 2 + m$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giải và biện luận các phương trình

a) $m(mx - 1) = 9x + 3$

b) $m^2x + 2 = m + 4x$

c) $(m^2 - 2m - 8)x = 4 - m$

d) $(4m^2 - 2)x = 1 + 2m - x$

e) $m^2(x - 2) + 24 = 16x - 2m$

f) $(m^2 - 2m - 8)x = 4 - m$

g) $m^2(x - 2) - 6m(x - 1) + 9m = 0$

h) $m^2(x-1) + 2mx = 3(5x-m)$

i) $m^2x - 18 = (6x-3)m$

Câu 3. Tìm các tham số thực m để phương trình vô nghiệm ?

a) $(m^2 - 5)x = 2 + m - x$

b) $m^2(x-1) = 2(2x-m-4)$

c) $(m^2 - 5)x = 2 + m - x$

d) $(m^2 - 3m)x + 4 = 4x + m$

Câu 4. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất ?

a) $m(mx-1) = (4m-3)x-3$

b) $mx-1 = x+m$

c) $m(m-1)x = m^2-1$

d) $m^2(mx-1) = 2m(2x+1)$

e) $m^2(x+1) - m = x(6-5m)$

Câu 5. Tìm tham số m để phương trình sau có vô số nghiệm

a) $m^2(x-1) = 2(mx-2)$

b) $(m^2 + 2m - 3)x = m - 1$

c) $m^2(mx-1) = 2m(2x+1)$

d) $(m^2 - 5m)x + 1 = m - 4x$

e) $m^2(x-1) + 2m = m^2x - 3$

f) $m^2(x+1) = 2mx + m + 2$

Câu 6. Tìm m để phương trình có nghiệm nguyên

a) $(m-2)x = m+1$

b) $m(x+3) = x-m$

c) $(m-2)x = m-1$

d) $(m+1)(x-2) = 3m-1$

e) $(m-1)x = 2x + m - 3.$

f) $(m-2)x = m^2 - 4m + 9.$

Dạng 2. Giải và biện luận phương trình bậc hai

Phương trình bậc hai có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ với $a \neq 0$ (2)

- Nếu $a = 0$ trở về giải và biện luận phương trình dạng (1)
- Nếu $a \neq 0$, ta xét $\Delta = b^2 - 4ac$.

TH1 $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

TH2 $\Delta = 0$ phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$.

TH3 $\Delta < 0$ phương trình vô nghiệm.

Câu 7. Giải và biện luận phương trình bậc hai: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$

.....

Câu 8. Giải và biện luận các phương trình sau

a) $x^2 - 2(m+3)x + m^2 = 0$

b) $x^2 - x + m = 0$

c) $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$

d) $mx^2 - 2(m-1)x + m - 5 = 0$

e) $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$

f) $(m-2)x^2 - (2m-1)x + m + 2 = 0$

g) $(m^2 + m - 2)x^2 + (m+2)x + 1 = 0$

h) $(2m^2 + 5m + 2)x^2 - 4mx + 2 = 0$

Câu 9. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$.

Câu 10. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m = 2$.

Câu 11. Tìm tham số m để các phương trình sau $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$ có nghiệm kép. Tính nghiệm kép đó ?

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ vô nghiệm ?

Câu 13. Tìm tham số m để phương trình sau $2x^2 + 3x + m - 1 = 0$ có nghiệm ?

Câu 14. Tìm tham số m để phương trình sau $(m^2 - 1)x^2 - 2(m+1)x + 1 = 0$ có nghiệm ?

Định lí Viet và ứng dụng

1. Định lí Viet

Hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi chúng thỏa mãn hệ thức $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

2. Ứng dụng

Phân tích thành nhân tử: Nếu đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì nó có thể phân tích thành nhân tử $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng: Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

Xét dấu của các nghiệm phương trình bậc hai: Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0(*)$,

kí hiệu $S = -\frac{b}{a}, P = \frac{c}{a}$, khi đó:

- Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$
- Phương trình (*) có hai nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- Phương trình (*) có hai nghiệm âm khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Câu 15. Tìm m để phương trình có một nghiệm cho trước. Tìm nghiệm còn lại ?

- $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 4 = 0 \rightarrow x = -7$
- $(m - 4)x^2 + x + m^2 + 1 - 4m = 0 \rightarrow x = -1.$
- $mx^2 - (m + 2)x + m - 1 = 0 \rightarrow x = 2$
- $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0 \rightarrow x = 0$

Câu 16. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu ?

- $(m - 2)x^2 + 2mx + m + 1 = 0$
- $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$
- $(m + 2)x^2 - mx + m - 2 = 0$
- $mx^2 + 4(m - 3)x + m - 5 = 0.$
- $(m + 1)x^2 + 2(m + 4)x + m + 1 = 0$
- $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$

Câu 17. Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng dấu ?

- $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$
- $mx^2 + 2(m + 3)x + m = 0$
- $(m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + m = 0$

d) $(m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 1 = 0$

Câu 18. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt dương?

- $x^2 - 3x + m - 1 = 0$
- $3x^2 - 10x - 3m + 1 = 0$
- $x^2 + (2m - 3)x + m^2 + 2 = 0$
- $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$

Câu 19. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt âm?

- $mx^2 + 2(m + 3)x + m = 0$
- $(m + 1)x^2 + 2(m + 4)x + m + 1 = 0$
- $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$
- $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$

Câu 20. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa điều kiện ?

- Cho $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 4 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 17$.
- Cho $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

c) Cho $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 0$.

d) Cho $x^2 + (2m+1)x - m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 + 1$.

e) Cho $x^2 - 4x + m - 1 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 40$.

f) Cho $(m+1)x^2 - (2m-3)x + m = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3|x_1 - x_2| = 2$.

Câu 21. Cho phương trình $2x^2 - (m+3)x + m - 1 = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x = 2$.
Tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.

Câu 22. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 4 + x_1 + x_2$.

Câu 23. Cho phương trình $(m-2)x^2 + (2m-1)x + m = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 + 5x_1x_2 = 2$.

Câu 24. Xác định giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2 + 1$

Câu 25. Tìm m để $mx^2 - (2m+5)x + m + 11 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = 22$.

Câu 26. Cho phương trình $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ (*)

a) Định m để phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt. Định m để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1x_2 = 6 - 2\sqrt{x_1x_2}$. Định m để phương trình (*) có đúng 1 nghiệm dương.

Câu 27. Cho phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m + 5 = 0$ (*)

a) Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm cùng âm.

b) Tìm m để phương trình

c) (*) có 2 nghiệm cùng dương.

d) Tìm m để phương trình

e) (*) có 2 nghiệm phân biệt là độ dài của 2 cạnh góc vuông trong một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{42}$. Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt sao cho tổng lập phương 2 nghiệm và tổng 2 nghiệm bằng nhau.

Câu 28. Cho phương trình $mx^2 - 2x + 1 = 0$ (*)

a) Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm cùng dương.

b) Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm đối nhau.

c) Tìm m để phương trình (*) có 2 nghiệm là độ dài của 2 cạnh góc vuông trong một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.

Dạng toán 4. Phương trình chứa ẩn dưới dấu trị tuyệt đối

Nhóm 1 Phương trình $|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$ hoặc $\sqrt{A^2} = |B| \Leftrightarrow |A| = |B|$ hoặc $\sqrt{A} = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$.

Nhóm 2 $|A| = B$ Phương pháp $\rightarrow$ Điều kiện $B \geq 0$ thì phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$

Nhóm 3 Sử dụng định nghĩa $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$.

Nhóm 4 Đặt ẩn phụ của giá trị tuyệt đối

$$|u(x)|^2 = u^2(x) \text{ và nếu đặt } t = |u(x)| \geq 0 \Rightarrow t^2 = [u(x)]^2.$$

Câu 29. Giải các phương trình sau

a) $|2x + 1| = |x^2 - 3x - 4|$

b) $|x^2 + 2x| = |x^2 + 2|$

c) $|6 - x^2| - |2 - 3x^2| = 0$

d) $|5x^2 - 3x - 2| - |x^2 - 1| = 0$

Câu 30. Giải các phương trình sau:

a) $|5x + 1| = 2x - 3$

b) $|3x^2 - 2x| = |6 - x^2|$

c) $|x^2 - 2x| - |x^2 - 4| = 0$

d) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x^2 - 9|$

e) $\sqrt{x + 4} = |x + 2|$

f) $\sqrt{2x^2 - 4x - 2} = |x - 1|$

g) $|3x - 4| = |x - 2|$.

h) $|x^2 - 2x| = |2x^2 - x - 2|$

i) $|x^2 - 3x + 2| - |2x^2 + 5x - 18| = 0$.

j) $\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = |x^2 - 3x - 4|$.

k) $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2|$.

l) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = |x - 2|$.

Câu 31. Giải các phương trình sau:

a) $|2x^2 - 3x - 5| - 5x = 5$

b) $|2x^2 - 13x - 20| = 16 + x$

c) $|x^2 - 8x + 4| = x - 4$

d) $|x^2 - 6x + 5| = x + 5$

Câu 32. Giải các phương trình sau:

a) $|2x^2 - 3x - 5| = 5x + 5$

b) $|5x^2 - 3x - 4| = 3x - 4$

c) $|x^2 + 5x - 9| = 2x + 1$

d) $|x^2 - 4x + 2| = x - 2$

e) $|x^2 - 5x + 7| - 2x + 5 = 0$

f) $|x^2 - x - 3| = x + 1$

Câu 33. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 - x|x - 1| = x$

b) $|x - 2| = x^2 - 4x + 2$

c) $|3x - 5| = 2x^2 + x - 3$

d) $(x + 1)|x - 3| = 4(x - 2)$

e) $\frac{4x^2 + 2x + |2x + 1|}{4x + 3} = 2x + 1$

f) $\frac{x - 1}{x} - \frac{1}{|x + 1|} = \frac{2x - 1}{x^2 + x}$

Câu 34. Giải các phương trình sau:

a) $(x + 3) \cdot |x - 1| = 4x$

b) $x^2 - 5|x - 1| - 1 = 0$

c) $x^2 - 2x + |x - 1| - 1 = 0$

d) $x^3 + 1 = |2x - 1|(x + 1)$

e) $\frac{x - 1}{2x - 3} = \frac{1 - 3x}{|x + 1|}$

f) $\frac{3x}{|x - 1|} = \frac{x - 2}{x}$

Câu 35. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + 4x - 3|x + 2| + 4 = 0$

b) $(x + 2)^2 - 3|x + 2| - 4 = 0$

c) $\left| \frac{2x - 1}{x + 2} \right| - 2 \cdot \left| \frac{x + 2}{2x - 1} \right| = 1$

d) $x^2 + \frac{1}{x^2} - 10 = 2 \cdot \left| x - \frac{1}{x} \right|$

e) $(x^2 - 3)^2 - 6|x^2 - 3| + 5 = 0$

f) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 1} + \frac{|2x - 4|}{x - 1} = 3$

g) $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left| 2x - \frac{1}{x} \right| - 6 = 0$

h) $8x^2 + \frac{2}{x^2} - 9 \cdot \left| 2x - \frac{1}{x} \right| - 1 = 0$

Dạng toán 5. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

- Phương trình $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ $\xrightarrow{\text{Phương pháp}}$ Điều kiện $\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}$ và bình phương.
- Phương trình $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$
- Giải các phương trình dạng $\sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0$

Câu 36. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2 - 8x + 5} - \sqrt{11 - x} = 0$

b) $\sqrt{x - 3} = 3\sqrt{x^2 - 9}$

c) $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{2x + 3} = \sqrt{x^2 + x - 1}$

d) $\sqrt{x^2 + 6x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{x^3 + \sqrt{x - 2}}$

Câu 37. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - x + 2} = |3x - 4|$

b) $\sqrt{2x^2 - 3x + 12} = 2\sqrt{-x^2 + x + 3}$

c) $\sqrt{x^2 - 3x + 18} = \sqrt{14x + 2}$

d) $3\sqrt{x - 1} = \sqrt{x^2 + 8x - 11}$

e) $\sqrt{3x^2 + 1} = |x + 1|$

f) $\sqrt{x^2 - 3x - 2} = \sqrt{x - 3}$

g) $\sqrt{x^2 - 5x + 2} = \sqrt{-x - 1}$

h) $\sqrt{x - 1} = 2\sqrt{2x + 5}$

Câu 38. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2 + 7x - 2} = x + 1$

b) $-6 + \sqrt{25x^2 - 10x + 1} = x$

c) $\sqrt{x^2 - 2x - 4} - x = 1$

d) $(x-2)(\sqrt{x^2-4x+3}-x)=0$

e) $\sqrt{5x^2-25x+31}=5-2x$

f) $\sqrt{2x^2+7}=x+2$

Câu 39. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{-2x^2+5x-3}-1+2x=0$

b) $\sqrt{8x^2-6x+1}=4x-1$

c) $\sqrt{x^2-2x-2}=x-2$

d) $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$

e) $\sqrt{2x^2+9x+7}=x+1$

f) $\sqrt{4x-3}=x-2$

g) $\sqrt{x^2-x+16}=4-2x$

h) $\sqrt{3x^2-2x-5}=x-1$

i) $\sqrt{x^2+1}=2x-1$

j) $\sqrt{x^2+24x-48}=2x-1$

k) $(x+1)(\sqrt{4x+1}-1)=0$

l) $(x^2-4x+3)(\sqrt{2-x}-x)=0$

Câu 40. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$

b) $\sqrt{12x+4}-\sqrt{x+4}=\sqrt{4x+5}$

c) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$

d) $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$

Câu 41. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$

b) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+2}=1$

c) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-2}=3$

d) $\sqrt{3x+1}=8-\sqrt{x+1}$

e) $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$

f) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}$

g) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$

h) $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}$

i) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$

j) $2\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=4$

k) $\sqrt{6x+1}-\sqrt{2x+1}=2$

l) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2+7}=2$

m) $\sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3}$

n) $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2x+4}$

o) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-4}$

p) $\sqrt{4x^2-7x-2}=2\sqrt{x^2-x+1}-1$

q) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-3}$

r) $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$

s) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$

t) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

Câu 42. Giải các phương trình sau (phương pháp đặt ẩn phụ):

a) $3\sqrt{x^2-4x+5}+x^2-4x+1=0$

b) $x^2-3x+2\sqrt{x^2-3x+11}=4$

c) $3\sqrt{x^2+2x-3}=2x^2+4x-5$

d) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

e) $(x-2)(x+3)+\sqrt{x^4-2x^3+2x^2-x}=-4$

f) $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2=2$

g) $3x^2-19x+2\sqrt{x^2-6x+1}=2$

h) $4x^2+x+4\sqrt{4x^2+x-4}=9$

i) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

j) $5\sqrt{x^2 + 2x - 7} = x^2 + 2x - 3$

k) $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} - x(x - 2) = 0$

Câu 43. Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ tổng/ tích):

a) $\sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x} = 3 + \sqrt{(3 + x)(6 - x)}$

b) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{5 - x} + \sqrt{(x + 2)(5 - x)} = 4.$

c) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x + 1} = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - 16.$

d) $\sqrt{2 - x^2} + x = 2x\sqrt{2 - x^2}.$

Câu 44. Giải các phương trình sau (phương pháp đặt ẩn phụ):

a) $3\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} = 2x + \frac{1}{2x} - 7$

b) $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} = 2x + \frac{1}{2x} + 4$

Câu 45. Giải các phương trình sau (chia để trị):

a) $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$

b) $\sqrt{2x^2 + 8x + 5} + \sqrt{2x^2 - 4x + 5} = 6\sqrt{x}$

c) $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$

d) $x^2 - 6x + x \cdot \sqrt{\frac{x^2 - 6}{x}} - 6 = 0$

e) $\frac{3x^2}{3 + \sqrt{x}} + 6 + 2\sqrt{x} = 5x$

f) $\frac{x^2}{4 - 3\sqrt{x}} + 8 = 3(x + 2\sqrt{x})$

Câu 46. Giải các phương trình sau:(Hai căn lệch bậc)

a) $5\sqrt{x + 1} - 2\sqrt[3]{7x + 6} = 4$

b) $2\sqrt[3]{3x - 2} + 3\sqrt{6 - 5x} - 8 = 0$

c) $2\sqrt{3x + 7} - 5 \cdot \sqrt[3]{x - 6} = 4$

Câu 47. Giải các phương trình sau:(Đặt ẩn phụ đưa về đẳng cấp)

a) $4\sqrt[3]{(x + 2)^2} - 7\sqrt[3]{4 - x^2} + 3\sqrt[3]{(2 - x)^2} = 0$

$4\sqrt[3]{(2x + 1)^2} + 3\sqrt[3]{(1 - 2x)^2} = 8\sqrt[3]{4x^2 - 1}$

$2\sqrt[4]{(1 + x)^2} - 3\sqrt[4]{1 - x^2} + \sqrt[4]{(1 - x)^2} = 0$

Câu 48. Giải các phương trình sau:(Sử dụng đồng nhất đưa về đẳng cấp)

a) $2x^2 - 6x + 10 - 5(x - 2)\sqrt{x + 1} = 0.$

b) $3x^2 - 13x + 37 = 8(x - 3)\sqrt{x + 2}$

c) $73(x + 1)\sqrt{x^2 + 12} = 9x^2 + 20x - 2.$

d) $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$

e) $2(x^2 + 18) = 7\sqrt{x^3 + 27}$

f) $\sqrt{3}(x^2 - 3x + 1) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$

g) $\sqrt{4x^2 + x + 6} = 4x - 2 + 7\sqrt{x + 1}.$

h) $x + 2 = \sqrt{x^2 - 2x - 2} + 2\sqrt{x + 1}$

i) $x + 1 + \sqrt{2x + 1} = \sqrt{3x^2 + 8x + 4}$

Câu 49. Giải các phương trình sau:(Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2)

a) $x^2 + 4x = \sqrt{x + 6}$

b) $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$

c) $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x + 5}$

BÀI 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Dạng toán 1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Dạng tổng quát:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (I) \quad (\text{với } a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0).$$

Giải và biện luận: Tính các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1; D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1; D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

$D \neq 0$		Hệ có nghiệm duy nhất $\left(x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}\right)$
$D = 0$	$D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$	Hệ vô nghiệm
	$D_x = D_y = 0$	Hệ có vô số nghiệm thỏa $a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$

Câu 1. Giải và biện luận theo m hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - my = 1 \\ -mx + 3y = m - 4 \end{cases}$$
 có nghiệm.

Câu 3. Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} (m-1)x - y = m+2 \\ (m+1)x + 2y = m-5 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

Câu 4. Tìm m để hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 2y = m \\ (m-1)x + (m-1)y = 1 \end{cases}$$
 có nghiệm nguyên.

Câu 5. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + ay = 1 \\ ax - 3ay = 2a + 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} ax - y = b \\ bx + y = a \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2ax + 3y = 5 \\ (a + 1)x + y = 0 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2, +3 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} mx + y = 4 - m \\ 2x + (m - 1)y = m \end{cases}$$

Dạng toán 2. Hệ phương trình cơ bản

Phương pháp chung:

- Phương pháp cộng đại số.
- Phương pháp thế.
- Phương pháp dùng đồ thị .
- Phương pháp dùng định thức (Cramer).
- ...

Câu 6. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{5}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}x - \frac{4}{4}y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ -5x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} -4x + 5y = -3 \\ 7x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x + (\sqrt{5} - 2)y = 1 \\ (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{3}y = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y = 5 \\ \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} -4x + 5y = -3 \\ 7x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} -4x + 5y = -3 \\ 7x + 3y = 8 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} \sqrt{2}x + 4y = 1 \\ 2x + 4\sqrt{2}y = 5 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y = 5 \\ \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} 0,4x - 0,3y = 0,6 \\ -0,3x - 0,2y = -1,3 \end{cases}$$

Câu 7. Giải các hệ phương trình:(Đặt ẩn phụ)

$$\text{a)} \begin{cases} 3|x| + 5y - 9 = 0 \\ 2x - |y| = 7 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x + y = 2 \\ |3x - y| = 1 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} \frac{6}{x-2y} + \frac{2}{x+2y} = 3 \\ \frac{3}{x-2y} + \frac{4}{x+2y} = -1 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1 \\ y = 3 - |x-1| \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} |x-1| + y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} x + y = 1 \\ |y| - x = 1 \end{cases}$$

$$\text{h)} \begin{cases} \frac{4}{2x+y-1} + \frac{3}{x+2y-3} = 4,75 \\ \frac{4}{2x+y-1} - \frac{3}{x+2y-3} = 2,5 \end{cases}$$

Câu 8. Giải các hệ phương trình: (Phương pháp rút thế)

$$\text{a)} \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 164 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} (x+y+2)(2x+2y-1) = 0 \\ 3x^2 - 32y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 7x + 12y - 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} 4x + 9y = 6 \\ 3x^2 + 6xy - x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} (x+2y+1)(x+2y+2) = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{h)} \begin{cases} (2x+3y-2)(x-5y-3) = 0 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{i)} \begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{j)} \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{k)} \begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{l)} \begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 = 7x + 12y - 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{m)} \begin{cases} (2x+3y-2)(x-5y-3) = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{n)} \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

$$\text{o)} \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\text{p)} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + 2y^2 - 2xy = 5 \end{cases}$$

$$\text{q)} \begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y = 4 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{r)} \begin{cases} (x+2y+1)(x+2y+2) = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Dạng toán 3. Hệ đối xứng loại 1

Giải hệ phương trình (I) $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$

- Đặt $S = x + y$ và $P = xy$
- Đưa hệ phương trình (I) và (II) với các ẩn S và P .
- Giải hệ (II) ta tìm được S và P .
- Tìm nghiệm (x, y) bằng cách giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$

Câu 9. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1 \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(x + y)^2 - xy = 1 \\ x^2y + xy^2 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3(x + y) = xy \\ x^2 + y^2 = 160 \end{cases}$

$$g) \begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102 \\ xy + x + y = 69 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1 \end{cases}$$

Dạng toán 4. Hệ đối xứng loại 2

Giải hệ phương trình: (I) $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0 \end{cases}$

- Trừ (1) và (2) vế theo vế ta được: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$
- Biến đổi (3) về phương trình tích: $(3) \Leftrightarrow (x - y)g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$
- Lúc đó $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x = y \end{cases} \vee \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$
- Giải các hệ trên ta tìm được nghiệm của hệ (I).

Câu 11. Giải các hệ phương trình

$$a) \begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ y^2 - 3y = 2x \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7x \\ y^2 - 2x^2 = 7y \end{cases}$$

Câu 12. Giải các hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} xy + x^2 = 1 - y \\ xy + y^2 = 1 - x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 2y = 4 + xy \\ x^2 + y^2 + x + y = 18 \end{cases}.$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + xy + y = 3 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y + 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ xy + 7 = x + y \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} x + y + 2xy = 4 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} x + xy + y = -1 \\ x^2y + y^2x = -6 \end{cases}$$

$$\text{k) } \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 5xy = -7 \\ xy - x - y = 7 \end{cases}$$

$$\text{l) } \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = -4 \end{cases}$$

Dạng toán 5. Hệ đối xứng loại 3 (Hệ phương trình đẳng cấp)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

- Giải hệ khi $x = 0$ (hoc $y = 0$).
- Khi $x \neq 0$, đặt $y = tx$. Thế vào hệ (I) ta được hệ theo t và x . Khử x ta tìm được phương trình bậc hai theo t . Giải phương trình này ta tìm được t , từ đó tìm được (x, y)

Câu 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Giải các hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 18 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 14x^2 - 21y^2 + 22x - 39y = 0 \\ 35x^2 + 28y^2 + 111x - 10y = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x^2 - x(y - 1) + y^2 = 3y \\ x^2 + xy - 3y^2 = x - 2y \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + 3) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

Chương 4

BẤT PHƯƠNG TRÌNH - BẤT ĐẲNG THỨC

BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức Cauchy

- 1. $\forall a \geq 0; b \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
- 2. $\forall a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0$ thì ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu " $=$ " $\Leftrightarrow a = b = c$.

Hệ quả $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ và $a.b.c \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$

2. Một số bất đẳng thức luôn đúng

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">• $A^2 \geq 0$• $A^2 + B^2 \geq 0$ | <ul style="list-style-type: none">• $A.B \geq 0$ với $A, B \geq 0$• $A^2 + B^2 \geq 2A.B$ |
|---|---|

B. Bài tập

- Câu 1.** Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$
- Câu 2.** Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab - bc - ac$.
- Câu 3.** Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b), \forall a, b \in \mathbb{R}$
- Câu 4.** Chứng minh rằng

- $a^4 - 4a + 3 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$
- Câu 5.** Chứng minh rằng với mọi $a^2 + b^2 > 0$ thì ta luôn có $a^2 + ab + 2b^2 + \frac{ab^3}{a^2 - ab + b^2} > 0$.
- Câu 6.** Chứng minh rằng $\forall a; b \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $\frac{a^4 + b^4 + 1}{2} \geq a^2b^2 - a^2 + b^2$.
- Câu 7.** Chứng minh rằng $\forall a; b \in \mathbb{R}$ thì ta luôn có $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Câu 8. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 \geq ab^3 + a^3b, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Câu 9. Chứng minh rằng:

$$x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geq 0, \forall x + y \geq 0.$$

Câu 10. Chứng minh:

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2, \forall a \geq 0; b \geq 0.$$

Câu 11. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $(a + b)^2 \geq 4ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$

b) $a + b + \frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \forall a, b \geq 0$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 4(a + b + c), \forall a, b, c.$

d) $a^4 + 3 \geq 4a, \forall a \in \mathbb{R}$

e) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc, \forall a, b, c.$

f) $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$

g) $x^2 + y^2 + 5 > xy + x + 3y, \quad \forall x, y$

h) $x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 5y + 4 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$

i) $x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 7 \geq 0, \forall x, y$

j) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y, \forall x, y \in \mathbb{R}$

k) $x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z), \forall x, y, z$

l) $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2, \forall a, b \in \mathbb{R}$

m) $a + b + c + \frac{3}{4} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}, \forall a, b, c \geq 0$

n) $a^4 \pm a + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}.$

o) $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b, \forall a, b, c.$

p) $4a^4 + 5a^2 \geq 8a^3 + 2a - 1, \forall a \in \mathbb{R}$

q) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1).$

r) $4a^2 + 4b^2 + 6a + 3 \geq 4ab, \forall a, b \in \mathbb{R}.$

s) $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

t) $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z, \forall x, y, z$

u) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$

v) $ab + 2bc + 3ca \leq 0, \forall a + b + c = 0$

BÀI 2. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Dạng toán 1. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình

Phương pháp giải

- Dạng $\frac{1}{Q(x)}$ $\rightarrow$ Điều kiện: $Q(x) \neq 0$
- Dạng $\sqrt[n]{P(x)} (n \in \mathbb{N}) \rightarrow$ Điều kiện: $P(x) \geq 0$
- Dạng $^{2n+1}\sqrt{P(x)} (n \in \mathbb{N}) \rightarrow$ Điều kiện: $P(x)$ có nghĩa
- Dạng $\frac{1}{\sqrt{Q(x)}}$ $\rightarrow$ Điều kiện: $Q(x) > 0$

Câu 1. Tìm điều kiện xác định của mỗi bất phương trình sau

a) $\frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$

b) $2\sqrt{1-x} > 3x + \frac{1}{x+4}$

c) $\frac{1}{x^2-4} \leq \frac{2x}{x^2-4x+3}$

d) $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+1} \leq x^2$

e) $2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} < \frac{2x}{x+1}$

f) $x + \frac{1}{x} < 1 + \frac{1}{x}$

Dạng toán 2. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

Phương pháp giải

Bước 1 Đặt điều kiện cho bất phương trình có nghĩa (nếu có).

Bước 2 Chuyển về và giải.

Bước 3 Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S .

Câu 2. Giải các bất phương trình sau

a) $(x+2)(2x-1)-2 \leq x^2+(x-1)(x+3)$

b) $\frac{x+2}{3}-x+1 > x+3$

c) $(1-\sqrt{2})x < 3-2\sqrt{2}$

d) $(2x-1)(x+3)-3x+1 \leq (x-1)(x+3)+x^2-5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{3x+1}{2}-\frac{x-2}{3} < \frac{1-2x}{4}$

b) $(x+\sqrt{3})^2 \geq (x-\sqrt{3})^2+2$

c) $\frac{3x+5}{2}-1 \leq \frac{x+2}{3}+x$

d) $(x+\sqrt{2})^2 \leq (x-\sqrt{2})^2+2$

e) $\frac{x+2}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-1}{4} \geq 3+\frac{x}{2}$

f) $x+\sqrt{x} > (2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)$

g) $2(x-1)+x > \frac{x+3}{3}+3$

h) $x(7-x)+6(x-1) < x(2-x)$

i) $(x+1)(2x-1)+x \leq 3+2x^2$

j) $(x+1)(x+2)(x+3)-x > x^3+6x^2-5$

Câu 4. Giải các bất phương trình sau

a) $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0$

b) $(x+2)\sqrt{x+3}\sqrt{x+4} \leq 0$

c) $\sqrt{(x-1)^2(x-2)} \geq 0$

d) $\sqrt{(x+2)^2(x-3)} > 0$

e) $(x+2)\sqrt{(x+3)(x+4)} < 0$

f) $\sqrt{2x-8}-\sqrt{4x-21} > 0$

Dạng toán 3. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn**Phương pháp giải**

Bước 1 Đặt điều kiện cho hệ bất phương trình có nghĩa (nếu có).

Bước 2 Giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao các tập nghiệm thu được.

Bước 3 Giao nghiệm với điều kiện được tập nghiệm S .

Câu 5. Giải các hệ bất phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \frac{3x - 14}{2} \end{cases}$$

Câu 6. Giải các hệ bất phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{3x + 1}{2} - \frac{3 - x}{3} \leq \frac{x + 1}{4} - \frac{2x - 1}{3} \\ 3 - \frac{2x + 1}{5} > x + \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (1 - x)^2 > 5 + 3x + x^2 \\ (x + 2)^3 < x^3 + 6x^2 - 7x - 5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4 \\ 5x + 3 \geq 8x - 9 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} \frac{4x - 5}{7} < x + 3 \\ \frac{3x + 8}{4} > 2x - 5 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \frac{3x - 14}{2} \\ \frac{6x - 3}{2} < 2x + 1 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} \frac{5x + 2}{3} \geq 4 - x \\ \frac{6 - 5x}{13} < 3x + 1 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x - 1 \leq 2x - 3 \\ 3x < x + 5 \\ \frac{5 - 3x}{2} \leq x - 3 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} -2x + \frac{3}{5} > \frac{2x - 7}{3} \\ x - \frac{1}{2} < \frac{5(3x - 1)}{2} \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} \frac{4x + 5}{6} < x - 3 \\ 2x + 3 > \frac{7x - 4}{3} \end{cases}$$

Dạng toán 4. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất

Xét bất phương trình có dạng $ax + b < 0$

Điều kiện		Kết quả tập nghiệm
$a > 0$		$S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
$a < 0$		$S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$a = 0$	$b \geq 0$	$S = \emptyset$
	$b < 0$	$S = \mathbb{R}$

Câu 7. Giải và biện luận bất phương trình sau theo tham số m

a) $mx + 1 > x + m^2$

b) $2mx \geq x + 4m - 3$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

a) $m(x - m) \leq 4x + 5$

b) $(a + 1)x + a + 3 \geq 4x + 1$

c) $k(x - 1) + 4x \geq 5$

d) $mx + 6 > 2x + 3m$

e) $m(x - m) > 2(4 - x)$

f) $b(x - 1) \leq 2 - x$

g) $(x + 1)k + x < 3x + 4$

h) $3x + m^2 \geq m(x + 3)$

Câu 9. Tìm m để mỗi bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $m^2x + 4m - 3 < x + m^2$

b) $3 - mx < 2(x - m) - (m + 1)^2$

c) $mx + 6 > 2x + 3m$

d) $mx + 1 > m^2 + x$

Câu 10. Tìm m để mỗi bất phương trình sau có nghiệm:

a) $m(x - m) \leq x - 1$

b) $(m + 1)x + m < 3m + 4$

c) $mx + 6 > 2x + 3m$

d) $mx + 1 > m^2 + x$

BÀI 2. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT - BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Dạng toán 1. Dấu nhị thức bậc nhất

Xét nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$			
$a > 0$	-	0	+
$a < 0$	+	0	-

Câu 1. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{-4}{3x+1}$

c) $f(x) = \frac{3}{2-x}$

d) $f(x) = -2x + 5$

e) $f(x) = \frac{(4x-1)(x+2)}{-3x+5}$

f) $f(x) = \frac{4-3x}{2x+1}$

Câu 2. Xét dấu các biểu thức

a) $f(x) = (2x-1)(x+3)$

b) $f(x) = x(x-2)^2(3-x)$

c) $f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$

d) $f(x) = (4x-1)(x+2)(3x-5)(7-2x)$

e) $f(x) = (-3x-3)(x+2)(x+3)$

f) $f(x) = (-2x+3)(x-2)(x+4)$

g) $f(x) = \frac{x(x-3)^2}{(x-5)(1-x)}$

Câu 3. VD Xét dấu các biểu thức

a) $f(x) = 4x^2 - 1$

b) $f(x) = -x^3 + 7x - 6$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 8x - 9}$

e) $f(x) = 2x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$

f) $f(x) = 1 - \frac{2-x}{3x-2}$

g) $f(x) = x^2 - x - 2\sqrt{2}$

h) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^4 - 2x^2}$

i) $f(x) = -x^2 + x + 6$

j) $f(x) = \frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x+2}$

k) $f(x) = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x}$

Dạng toán 2. Áp dụng dấu nhị thức bậc nhất giải bất phương trình**Bước 1.** Đưa bất phương trình về dạng tích hoặc thương của các nhị thức bậc nhất.**Bước 2.** Tìm các nghiệm của các nhị thức.**Bước 3.** Sắp xếp các nghiệm theo thứ tự tăng dần, xét dấu.**Bước 4.** Dựa vào bảng xét dấu và kết luận.**Câu 4.** Giải các bất phương trình sau:

a) $(x+1)(x-1)(3x-6) > 0$

b) $(2x-7)(4-5x) \geq 0$

c) $\frac{(2x-5)(x+2)}{3-4x} > 0$

d) $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{(x-1)^2}$

Câu 5. Giải các bất phương trình sau:

- a) $x^2 - x - 20 > 2(x - 11)$
- b) $(2x - 7)(4 - 5x) \geq 0$
- c) $3x(2x + 7)(9 - 3x) \geq 0$
- d) $(x + 1)(x - 1)(3x - 6) > 0$
- e) $(-\sqrt{2}x + 2)(x + 1)(2x - 3) > 0$

Câu 6. Giải các bất phương trình

- a) $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 < 0$
- b) $(x^2 - 2x - 3)^2 \geq (3x - 3)^2$
- c) $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2 \leq 0$
- d) $x^3 - 2x - 4 < 0$
- e) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 > 0$
- f) $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 > 0$
- g) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \geq 0$
- h) $2x^3 - 5x^2 - 2x + 2 < 0$
- i) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < 0$
- j) $x^3 + 4x^2 - 17x - 60 \geq 0$

Câu 7. Giải các bất phương trình

- a) $\frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} < 1$
- b) $\frac{3 - 2x}{(3x - 1)(x - 4)} < 0$
- c) $\frac{x}{x - 5} \geq \frac{1}{2}$
- d) $\frac{-4}{3x + 1} < \frac{3}{2 - x}$
- e) $x + 1 > \frac{4}{x + 1}$
- f) $\frac{x - 1}{x - 3} \geq 2$

$$\text{g) } \frac{3}{1 - x} \geq \frac{5}{2x + 1}$$

$$\text{h) } \frac{-3x + 1}{2x + 1} \leq -2$$

$$\text{i) } \frac{4x + 3}{2x - 5} \leq 6$$

$$\text{j) } \frac{2x^2 + x}{1 - 2x} \geq 1 - x$$

$$\text{k) } \frac{1}{x - 1} < \frac{2}{x - x^2}$$

$$\text{l) } \frac{x + 2}{3x + 1} > \frac{x - 2}{2x - 1}$$

$$\text{m) } \frac{(3 - x)(x - 2)}{x + 1} \leq 0$$

$$\text{n) } \frac{x + 2}{3x + 1} \leq \frac{x - 2}{2x - 1}$$

$$\text{o) } \frac{2x - 5}{3x + 2} < \frac{3x + 2}{2x - 5}$$

$$\text{p) } \frac{2}{x - 1} \leq \frac{5}{2x - 1}$$

$$\text{q) } \frac{5x - 6}{x + 6} \leq 1$$

$$\text{r) } \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 2} > \frac{3}{x + 3}$$

$$\text{s) } \frac{(x + 2)^4(x + 6)}{(x - 7)^3(x - 2)^2} \geq 0$$

$$\text{t) } \frac{(x - 1)^3(x + 2)^4}{x^2(x - 7)^5} \geq 0$$

Câu 8. Giải các bất phương trình

$$\text{a) } \frac{(3x + 1)(x - 3)}{5 - 2x} \leq 0$$

$$\text{b) } \frac{2}{x - 1} \leq \frac{5}{2x - 1}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x - 1} < \frac{2}{x - x^2}$$

$$\text{d) } \frac{(5 - 6x)^6}{(4x + 1)^3} \leq 0$$

$$\text{e) } \frac{x^2 - (2x - 6)^2}{(1 - x)(x + 4)} \leq 0$$

$$\text{f) } \frac{(x - 1)(x + 2)^2}{-1 - x} \leq 0$$

$$\text{g) } \frac{(x - 3)(x + 2)}{x^2 - 1} < 1$$

$$\text{h) } x + 1 > \frac{4}{x + 1}$$

$$\text{i) } \frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 2} > \frac{3}{x + 3}$$

$$\text{j) } \frac{-1}{x - 2} < \frac{3}{3x - 4}$$

$$\text{k) } \frac{x + 2}{3x + 1} > \frac{x - 2}{2x - 1}$$

$$\text{l) } \frac{x^2 + 3x - 1}{2 - x} \geq -x$$

Dạng toán 3. Bất phương trình chứa trị tuyệt đối

Phương pháp giải

Dạng 1: $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$

Dạng 2: $|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A : \text{ có nghĩa} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} B \geq 0 \\ \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases} \end{cases}$

Dạng 3: $a|f(x)| + b|g(x)| > h(x)$: dùng phương pháp chia khoảng.

Câu 9. Giải các bất phương trình sau

$$\text{a) } |-2x + 1| + x - 3 < 5$$

$$\text{b) } 2|x - 3| - |3x + 1| \leq x + 5$$

$$\text{c) } \left| \frac{2}{x - 4} \right| < 1$$

$$\text{e) } \left| \frac{2x - 1}{x - 1} \right| > 2$$

Câu 10. Giải các phương trình và bất phương trình

$$\text{a) } |x + 1| + |x - 1| = 4$$

$$\text{b) } |2x - 4| \geq x + 1$$

$$\text{c) } \left| \frac{-5}{x + 2} \right| < \left| \frac{10}{x - 1} \right|$$

$$\text{d) } \frac{3}{|x - 4| - 1} \leq |x + 3|$$

e) $|x - 1|2 > 2x - 3$

f) $|2x - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - x| > 3x - 2$

g) $\frac{|2x - 1|}{(x + 1)(x - 2)} > \frac{1}{2}$

h) $\begin{cases} \frac{2}{2x - 1} \leq \frac{1}{3 - x} \\ |x| \leq 1 \end{cases}$

i) $|3x - 5| < 2$

j) $|x + 1| \leq |x| - x + 2$

k) $|2x - 5| \leq x + 1$

l) $\left| \frac{2 - x}{x + 1} \right| \geq 2$

m) $\frac{|x - 2|}{x^2 - 5x + 6} \geq 3$

n) $|(\sqrt{2} - \sqrt{3})x + 1| \leq \sqrt{3} + \sqrt{2}$

BÀI 3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI - BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dạng toán 1. Xét dấu của tam thức bậc hai

Xét tam thức bậc hai có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Trường hợp 1: $\Delta < 0$: $f(x)$ vô nghiệm

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a	

- Trường hợp 2: $\Delta = 0$: $f(x)$ có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu a	0	cùng dấu a

- Trường hợp 3: $\Delta > 0$: $f(x)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	cùng	0	trái	0	cùng

Câu 1. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$

c) $f(x) = 9x^2 - 24x + 16$

d) $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4}$

Câu 2. Xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$

b) $f(x) = (2x - 3)(x + 5)$

c) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4}$

d) $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$

e) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$

f) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

g) $f(x) = 3x^2 + x + 5$

h) $f(x) = -3x^2 + 5x + 1$

i) $f(x) = x^2 + 12x + 36$

j) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

k) $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$

Câu 3. Xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$

b) $f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)$

c) $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$

d) $f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$

e) $f(x) = \frac{3x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{x^4 - 4x^3 + 8x - 5}$

g) $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$

h) $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$

i) $f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$

j) $f(x) = \frac{x - 7}{4x^2 - 19x + 12}$

k) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{\sqrt{6}x^2 + 3x + \sqrt{2}}$

l) $f(x) = \frac{15x^2 - 7x - 2}{6x^2 - x + 5}$

m) $f(x) = \frac{11x + 3}{-x^2 + 5x - 7}$

n) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{-x^2 + x - 1}$

o) $f(x) = \frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)}$

Dạng toán 2. Giải bất phương trình bậc hai

Phương pháp giải tương tự áp dụng bảng xét dấu giải bất phương trình bậc nhất

Câu 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2 + 2x + 5 > 0$

e) $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

i) $2x^2 + 4x + 3 < 0$

b) $9x^2 - 24x + 16 \geq 0$

f) $16x^2 + 40x + 25 > 0$

j) $-3x^2 + 7x - 4 < 0$

c) $-x^2 + 6x - 9 > 0$

g) $-3x^2 + 7x - 4 < 0$

k) $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

d) $-2x^2 + 3x + 5 > 0$

h) $-2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

l) $2x^2 + 4x + 3 < 0$

Câu 5. Giải các bất phương trình sau

a) $4x^2 - x + 1 < 0$	f) $-3x^2 + x + 4 \geq 0$	k) $x^2 - x - 6 \leq 0$
b) $x^2 - 2x + 3 > 0$	g) $-5x^2 + 4x + 12 < 0$	l) $16x^2 + 40x + 25 < 0$
c) $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$	h) $x^2 - x - 6 \leq 0$	m) $x^2 + 9 > 6x$
d) $6x^2 - x - 2 \geq 0$	i) $\frac{1}{3}x^2 - 3x + 6 < 0$	n) $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$
e) $2(x + 2)^2 - 3,5 \geq 2x$	j) $x(x + 5) \leq 2(x^2 + 2)$	

Câu 6. Giải các bất phương trình sau

- | | |
|--|--|
| a) $(1 - 2x)(x^2 + x - 30) < 0$ | c) $\frac{(2 - x^2)(x^2 - 2x + 1)}{-x^2 + 3x + 4} > 0$ |
| b) $\frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ | d) $\frac{2x^2 - 16x + 27}{x^2 - 7x + 10} \leq 2$ |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Câu 7. Giải các bất phương trình

- | | |
|--|--|
| a) $x^4 - 3x^2 \leq 0$ | h) $\frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} > 0$ |
| b) $(1 - 2x)(x^2 + x - 30) < 0$ | i) $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} \leq 0$ |
| c) $x^4 - 3x^2 + 2 > 0$ | j) $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} \geq 0$ |
| d) $(2x + 1)(x^2 + x - 30) \geq 0$ | k) $\frac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} < 0$ |
| e) $x^4 - 5x^2 + 4 < 0$ | l) $\frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 + 4x + 5} > 0$ |
| f) $x^6 + 19x^3 - 216 \geq 0$ | Câu 8. Giải các bất phương trình |
| g) $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$ | a) $\frac{1}{x - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}$ |

b) $\frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} \geq 1$

c) $\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \leq 0$

d) $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$

e) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} \geq \frac{x+1}{x}$

f) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$

g) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) \geq 15$

h) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) < -5$

i) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5$

j) $2x^2 + 2x - \frac{15}{x^2 + x + 1} + 1 < 0$

Câu 9. Giải các hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-1)(2x+3) > 0 \\ (x-4)\left(x+\frac{1}{4}\right) \leq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0 \\ x^2 - 8x + 20 > 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^2 \geq 4x \\ (2x-1)^2 < 9 \end{cases}$

i) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \geq 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x^2 \geq 0, 25 \\ x^2 - x \leq 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x^2 - \frac{1}{4} > 0 \\ -2x^2 + 5x - 5 > 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} 2x - 3 < (x+1)(x-2) \\ x^2 - x \leq 6 \end{cases}$

Dạng toán 3. Bất phương trình chứa trị tuyệt đối**Phương pháp giải**Dạng 1: $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$ Dạng 2: $|A| > B \Leftrightarrow \begin{cases} B < 0 \\ A : \text{có nghĩa} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} B \geq 0 \\ \begin{cases} A < -B \\ A > B \end{cases} \end{cases}$ Dạng 3: $a|f(x)| + b|g(x)| > h(x)$: dùng phương pháp chia khoảng.**Câu 10.** Giải các phương trình sau

a) $|x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5$

b) $|2x + 3| = |4 - 3x|$

c) $|x^2 - 2x - 3| = x^2 - 2x + 5$

d) $|x - 1| = 2x - 1$

e) $|x^2 - 2x - 3| = 2x + 2$

f) $|2x - 3| = |x - 1|$

g) $\left| \frac{x^2 - 2}{x + 1} \right| = 2$

h) $x^2 - |2x - 1| = 0$

Câu 11. Giải các bất phương trình sau:

a) $|-x^2 + x - 1| \leq 2x + 5$

b) $4x^2 + 4x - |2x + 1| \geq 5$

c) $|x^2 - x| \leq |x^2 - 1|$

d) $3x^2 - |5x + 2| > 0$

e) $|x^2 - 5x + 4| \leq x^2 + 6x + 5$

f) $\frac{|2x - 1|}{x^2 - 3x - 4} < \frac{1}{2}$

g) $|x - 1| + |x + 2| < 3$

h) $2|x - 3| - |3x + 1| \leq x + 5$

Dạng toán 4. Phương trình - Bất phương trình chứa căn thức

Phương pháp giải

Dạng 1: $\sqrt{A} > \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B \end{cases}$

Dạng 2: $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$

Dạng 3: $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \\ B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases}$

Câu 12. Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x - 1} \geq 1$

b) $\sqrt{4x + 2} \geq 3$

c) $\sqrt{x - 2} \leq x - 4$

d) $\sqrt{2x - 1} \leq x$

e) $\sqrt{2x^2 + x + 6} \leq 2(x + 2)$

f) $2\sqrt{x^2 + x - 2} \leq 1 + 2x$

g) $\sqrt{x + 2} \leq \sqrt{3x^2 - x + 1}$

h) $\sqrt{x^2 - x - 2} \leq \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

i) $\sqrt{2x - 1} \geq 2$

j) $\sqrt{x - 3} \leq 1$

k) $\sqrt{2x + 1} \geq 1 - 3x$

l) $5\sqrt{5x - 2} \geq x + 4$

m) $\sqrt{x^2 - x + 2} \geq x - 3$

n) $\sqrt{x^2 - 1} \geq \sqrt{2x^2 + 2x}$

o) $\sqrt{2x - 1} \geq \sqrt{x + 3}$

p) $\sqrt{4x^2 - 3} \geq \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$

Câu 13. Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + x - 6} < x - 1$

b) $\sqrt{x^2 - 5x - 14} \geq 2x - 1$

c) $\sqrt{2x^2 + 7x + 5} > x + 1$

d) $\sqrt{x^2 + 4x - 5} \leq x + 3$

e) $\sqrt{2x - 1} \leq 2x - 3$

f) $\sqrt{x^2 + 6x + 8} \leq 2x + 3$

g) $\sqrt{x^2 - x - 12} \geq x - 1$

h) $\sqrt{2x^2 - 1} > 1 - x$

i) $\sqrt{x^2 - 4x - 12} > 2x + 3$

j) $\sqrt{x^2 - 4x - 12} \leq x - 4$

Câu 14. Giải các bất phương trình

a) $\sqrt{x - 1} > x - 3$

b) $x - \sqrt{3 - 2x} < 0$

c) $\sqrt{x + 1} < 2x - 1$

d) $\sqrt{-3x + 2} + 1 < x$

e) $\sqrt{2x - 5} - x + 1 \leq 0$

f) $x + \sqrt{8 - x^2} \geq 4$

g) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < x + 1$

h) $\sqrt{x^2 + x - 6} \geq x + 2$

i) $\sqrt{-x^2 + 7x - 6} < 3 + 2x$

j) $\sqrt{3x^2 + 13} + 2x < 1$

k) $\sqrt{x^2 + 6x - 3} < x + 1$

l) $2x + \sqrt{4x - 1} > 0$

Câu 15. Giải các bất phương trình

a) $\sqrt{x^2 - x - 12} < 7 - x$

b) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$

c) $\sqrt{3x^2 + 13x + 4} + 2 - x < 0$

d) $\sqrt{2x^2 - 6x - 20} + 2 - x > 0$

e) $x < \sqrt{5x - 4}$

f) $\sqrt{5 - x} \leq 2x - 7$

g) $x - 2\sqrt{x - 3} \leq 3$

h) $\sqrt{7x + 11} + x + 1 \geq 0$

i) $\sqrt{x^2 - 2x} \geq x + 1$

j) $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$

k) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < 2x - 1$

l) $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$

m) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$

n) $\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 2x \geq 3$

o) $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} - x + 2 > 0$

p) $\sqrt{3x - 5x^2} \leq 5x - 2$

q) $1 - x + \sqrt{2x^2 - 3x - 5} \leq 0$

r) $3\sqrt{-x^2 + x + 6} > 2(1 - 2x)$

s) $2\sqrt{3x + x^2} \leq 2x - 1$

t) $\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leq x - 3$

Câu 16. (VD) Giải các bất phương trình

a) $\sqrt{1 - x} + \sqrt{4 + x} \leq 3$

b) $\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 + 7} \geq 2$

c) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1} < \sqrt{x - 2}$

d) $4x + 2 > \sqrt{5x^2 + 61x}$

e) $\frac{\sqrt{2 - x} + 4x - 3}{x} \geq 2$

f) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 6} > 2$

g) $\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 1} < \sqrt{x}$

h) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{7 - x} \geq \sqrt{2x - 8}$

i) $\sqrt{-x^2 - 8x - 12} > x + 4$

j) $\sqrt{x + 3} < 1 - x$

k) $\sqrt{22 - x} - \sqrt{10 - x} < 2$

l) $\sqrt{2x + 1} \leq 2\sqrt{x} - \sqrt{x - 3}$

m) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 1} < \sqrt{x - 2}$

n) $\sqrt{5x^2 + 61x} < 4x + 2$

o) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$

Câu 17. (VD) Giải các bất phương trình

a) $6\sqrt{(x-2)(x-32)} \leq x^2 - 34x + 48$

b) $x^2 - 4x - 6 \geq \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$

c) $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} \geq 7 - 2x - x^2$

d) $\sqrt{(4+x)(6-x)} \leq x^2 - 2x - 12$

e) $\sqrt{x(x+3)} \leq -x^2 - 3x + 6$

f) $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} < 6$

g) $2x(x-1) + 1 > \sqrt{x^2 - x + 1}$

h) $(x+1)(x+4) < 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$

i) $-4\sqrt{(4-x)(x+2)} \leq x^2 - 2x - 12$

j) $\sqrt{(x+1)(x+2)} < x^2 + 3x - 4$

Câu 18. (VD) Giải các bất phương trình

a) $\sqrt{x+8}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) \geq 3$

b) $(\sqrt{3x+6} + \sqrt{3x-3})(\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x-2}) \leq 3$

c) $4(x+1)^2 < (2x+10)(1 - \sqrt{3+2x})^2$

d) $\sqrt{x-1}(\sqrt{x-3} - \sqrt{8-x}) \geq 2x - 11$

e) $\frac{16x^2}{(\sqrt{4x+1} - 1)^2} \geq 4(3x-2)$

f) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 1$

g) $\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \leq \sqrt{x^2 + 4x - 5}$

h) $\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2\sqrt{x^2 - 5x + 4}} + \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{2\sqrt{x^2 - 5x + 4}} \geq$

i) $\frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{\sqrt{2x^2 + 9x + 7}} + \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}{\sqrt{2x^2 + 9x + 7}} \leq$

Dạng toán 5. Tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$

Từ định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta suy ra kết quả sau:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

1. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

2. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

3. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$

4. $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Câu 19. Tìm m để biểu thức $(m+2)x^2 + 2(m+2) + m + 3$ luôn dương

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm $(m - 2)x^2 + 2(m + 1)x + 2m > 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 21. Định m để $f(x)$ luôn dương

- a) $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1$
- b) $f(x) = (m - 1)x^2 - (m - 5)x + m - 1$
- c) $f(x) = (3m + 1)x^2 - (3m + 1)x + m + 4$
- d) $f(x) = mx^2 - 2(m - 1)x + 4m$
- e) $f(x) = (m^2 + 1)x^2 + 2(m + 3)x + 1$
- f) $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3$

Câu 22. Định m để $f(x)$ luôn không dương

- a) $f(x) = -2x^2 + 2(m - 2)x + m - 2$
- b) $f(x) = (m - 1)x^2 + 2(m + 2)x + m - 6$.
- c) $f(x) = (m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m - 1)x + 2$.
- d) $f(x) = (m + 4)x^2 - (m - 1)x - 1 - 2m$
- e) $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(m - 2)x + 2$
- f) $f(x) = (m - 4)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1$

Câu 23. Tìm m để bất phương trình có vô số nghiệm

- a) $x^2 - mx + m + 3 \geq 0$
- b) $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - 5m - 2 \geq 0$
- c) $-x^2 + 2(1 - m)x - 9 \leq 0$
- d) $2x^2 + (m - 2)x - m + 4 > 0$
- e) $mx^2 - 4(m + 1)x + m - 5 > 0$
- f) $5x^2 - 4mx + m \geq 0$
- g) $4x^2 - 2(m + 1)x + m > 0$
- h) $3x^2 + 2(m - 1)x + m + 4 > 0$
- i) $x^2 + (m + 1)x + 2m + 7 > 0$
- j) $x^2 - (m - 2)x + 8m + 1 > 0$
- k) $mx^2 + (m - 1)x + m - 1 < 0$
- l) $mx^2 - mx - 5 < 0$
- m) $mx^2 + 2mx - 1 < 0$
- n) $(1 - 3m)x^2 - 2mx + 1 - m \geq 0$

Câu 24. Tìm m để bất phương trình vô nghiệm

- a) $x^2 + 6x + m + 7 \leq 0$
- b) $(m - 2)x^2 + 2x - 4 \geq 0$

- c) $mx^2 + 2(m-1)x + 4 \geq 0$
- d) $mx^2 + 6mx + 8m - 10 \geq 0$
- e) $(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 3m - 2 > 0$
- f) $(m-2)x^2 + (m-2)x + m \leq 0$
- g) $(m-3)x^2 + (m+2)x - 4 > 0$
- h) $-x^2 + 2(m-1)x + 1 \geq 0$
- i) $mx^2 + 4x + m < 0$
- j) $mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 < 0$
- k) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 > 0$
- l) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 < 0$
- m) $(m-2)x^2 + 2(m-2) + m + 4 \leq 0$
- n) $(m+3)x^2 + 2(m-1)x + 4m < 0$

Câu 25. Tìm m để phương trình có nghiệm

- a) $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$
- b) $x^2 + (m-2)x - 2m + 3 = 0$
- c) $(m+1)x^2 + 2(m-1)x + 2m - 3 = 0$

Câu 26. Tìm m để phương trình vô nghiệm

- a) $(3-m)x^2 - 2(m+3)x + m + 2 = 0$
- b) $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$

Câu 27. (VD) Tìm m thoả

- a) $x^2 + 2(m+1)x - m + 3 \geq 0$ đúng $\forall x \leq 0$
- b) $(3-m)x^2 - 2(m+1)x + 1 > 0$ đúng $\forall x < 0$
- c) $x^2 - 2mx + 3m - 2 > 0$ đúng $\forall x \in (1; 2)$
- d) $x^2 - (m+1)x + 1 > 0$ đúng $\forall x > 0$
- e) $x^2 - 2(m-2)x + m - 2 \leq 0$ đúng $\forall x \in [0; 1]$

Câu 28. (VD) Tìm m để bất phương trình $mx^2 - 2(m-1)x - m - 5 \leq 0$

- a) Có nghiệm
- b) Có duy nhất một nghiệm
- c) Có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 2.

CHƯƠNG 1: VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VECTƠ

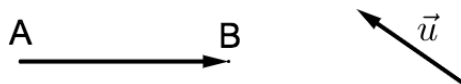
BÀI 1. VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VECTƠ

A. LÝ THUYẾT

Lý thuyết

1. Các định nghĩa mở đầu

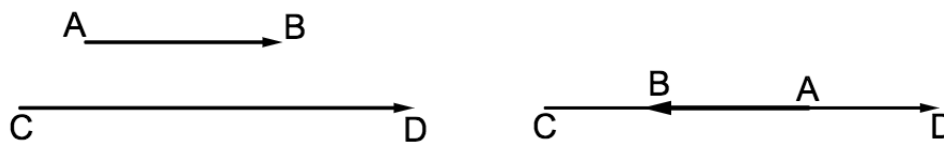
- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.
 - Một đầu xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn.
 - Hướng từ gốc đến ngọn, gọi là hướng của vectơ.
 - Độ dài của vectơ là độ dài đoạn thẳng xác định bởi điểm đầu và điểm cuối của vectơ.
- Vectơ có gốc A, ngọn B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}| = AB$ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ.
Ngoài ra, vectơ còn được kí hiệu bởi một chữ cái in thường, phía trên có mũi tên như $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$. Độ dài của $\vec{a}$ kí hiệu là $|\vec{a}|$.



- Vectơ không, kí hiệu là $\vec{0}$ có:
 - Điểm gốc và điểm ngọn trùng nhau.
 - Hướng bất kỳ.
 - Độ dài bằng 0.

- Hai vectơ cùng phương khi chúng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song nhau.

$$\overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ A, B, C, D : \text{ thẳng hàng.} \end{cases}$$



- Hướng của hai vectơ: Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Ta chỉ xét hướng của hai vectơ khi chúng cùng phương.

- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng hướng, ký hiệu:

$$\overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ \text{Hai tia } AB, CD \text{ cùng hướng.} \end{cases}$$

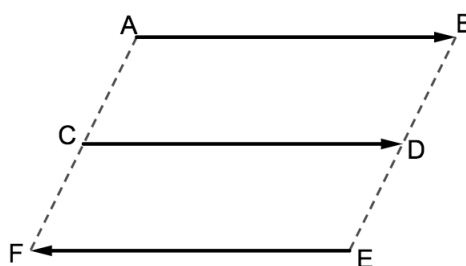
- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là ngược hướng, ký hiệu:

$$\overrightarrow{AB} \uparrow \downarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ \text{Hai tia } AB, CD \text{ ngược hướng.} \end{cases}$$



- Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi chúng cùng hướng (cùng phương, cùng chiều) và cùng độ dài.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ cùng hướng.} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ hay } AB = CD \end{cases}$$



- Hai vectơ được gọi là đối nhau khi chúng ngược hướng và cùng độ dài.

2. Các phép toán trên vectơ

a) Tổng của hai vectơ

- Hệ thức Chasles (Quy tắc 3 điểm, quy tắc tam giác):
 - Với 3 điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
 - Quy tắc 3 điểm dùng để cộng các vectơ liên tiếp, có thể mở rộng cho nhiều vectơ như sau:

$$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

- Quy tắc hình bình hành
 - Cho hình bình hành ABCD thì $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \end{cases}$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$.
 - Quy tắc hình bình hành dùng để cộng các vectơ chung gốc.
- Tính chất: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$.

b) Hiệu hai vectơ

- Vectơ đối: $\begin{cases} \text{Vectơ đối của vectơ } \vec{a}, \text{ kí hiệu là } -\vec{a} \\ \text{Tổng của hai vectơ đối là vectơ } \vec{0} : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \end{cases}$
- Hiệu hai vectơ: Với ba điểm A, B, C bất kỳ, ta luôn có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

c) Tích của một số với một vectơ

- Định nghĩa: Cho một số thực $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Khi đó:

$$\text{Tích } k \cdot \vec{a} \text{ là một vectơ có } \begin{cases} k \cdot \vec{a} : \text{ cùng hướng với } \vec{a} \text{ khi } k > 0. \\ k \cdot \vec{a} : \text{ ngược hướng với } \vec{a} \text{ khi } k < 0. \end{cases}$$

- Tính chất: $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$, $(k + h) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + h \cdot \vec{a}$, $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.
- Điều kiện để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là $\exists k \in \mathbb{R}$ để $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.
- Điều kiện để 3 điểm A, B, C thẳng hàng là $\exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

. Tính chất trung điểm và trọng tâm tam giác

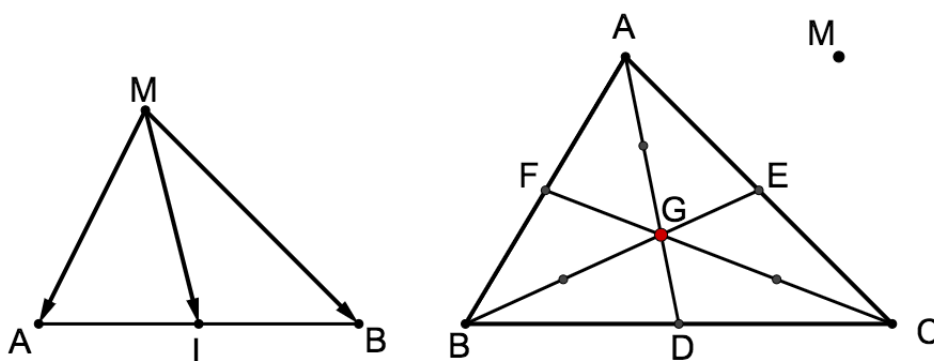
a) Tính chất trung điểm

Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ thì ta luôn có: $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.

b) Tính chất trọng tâm tam giác

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là điểm bất kỳ, khi đó ta luôn có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \text{và} \quad 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$



4. Biểu thị một vectơ thông qua hai vectơ không cùng phương

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó, mọi vectơ $\vec{c}$ đều có thể biểu thị được một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số thực m và n sao cho: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

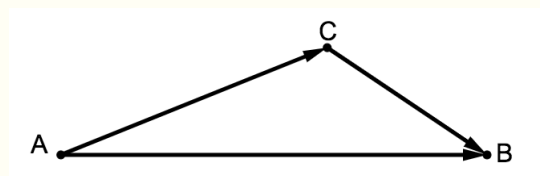
B. BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức vectơ

Quy tắc ba điểm

Chèn C vào vectơ $\overrightarrow{AB}$.

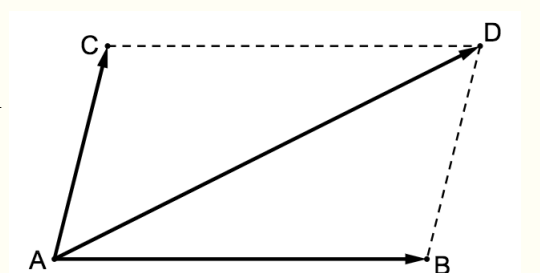
- Cộng: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (chèn giữa)
- Trừ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ (C cuối trừ C đầu)



Quy tắc hình bình hành

Cho hình bình hành $ABCD$ (Quy tắc đường chéo hình bình hành):

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$$



Tính chất trung điểm

Nếu I là trung điểm của AB và M là điểm bất kỳ: $2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$

Tính chất trọng tâm

G là trọng tâm của $\triangle ABC$ và M là điểm bất kỳ.

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Cần nhớ: G chia AE thành ba đoạn bằng nhau, tức có: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

Câu 1. Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{ED}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn AD, BC .

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.

c) Gọi I là trung điểm MN . Chứng minh rằng:

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{MN}$.

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có M trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{MG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Câu 4. Cho các điểm bất kì. Hãy chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$

e) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

f) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$

g) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Câu 5. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC, BD . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{IJ}$

Câu 6. Cho $\triangle ABC$ bất kỳ, gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AM .

a) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Với điểm O bất kì. Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và E là trung điểm AD . Chứng minh:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC có D, M lần lượt là trung điểm của BC và AB , điểm N thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$ và gọi K là trung điểm của MN .

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 9. Cho tam giác ABC . Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M là trung điểm của DE và I là trung điểm của BC .

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm của BC và H là điểm đối xứng của C qua G .

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{HB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

c) Chứng minh: $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$.

Câu 11. Cho tam giác ABC . Dựng bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABIF, BCPQ, CARS$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Câu 12. Dựng bên ngoài tứ giác $ABCD$ các hình bình hành $ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL$.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{IL} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{EL} - \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{GJ}$.

Lưu ý: Để chứng minh hai điểm A và B trùng nhau, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Câu 13. Chứng minh rằng các tam $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi đẳng thức sau được thỏa: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC . Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B , B' là điểm đối xứng của B qua C , C' là điểm đối xứng của C qua A . Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm?

Câu 15. Cho tam giác ABC và các điểm I, J, K xác định bởi: $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JA} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = \vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và IKJ có cùng trọng tâm.

Câu 16. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Chứng minh hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Dạng toán 2: Tìm môđun (độ dài) vectơ

Phương pháp: Để tính $|\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d}|$, ta thực hiện theo hai bước sau:

- Biến đổi và rút gọn biểu thức vécto $\vec{a} \pm \vec{b} \pm \vec{c} \pm \vec{d} = \vec{v}$ dựa vào qui tắc ba điểm, tính chất trung điểm, hình bình hành, trọng tâm, ... sao cho $\vec{v}$ đơn giản nhất.
- Tính độ dài (môđun) của $\vec{v}$ dựa vào tính chất hình học đã cho.

Một số kiến thức hình học phẳng thường dùng

- Chiều cao tam giác đều = cạnh $\times \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Đường chéo của hình vuông = cạnh $\times \sqrt{2}$. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có AH là đường cao,

AM là trung tuyến. Khi đó:

$$\bullet \text{ Pitago: } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \begin{cases} \cdot BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} \\ \cdot AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} \\ \cdot AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Trung tuyến: } AM = \frac{1}{2}BC.$$

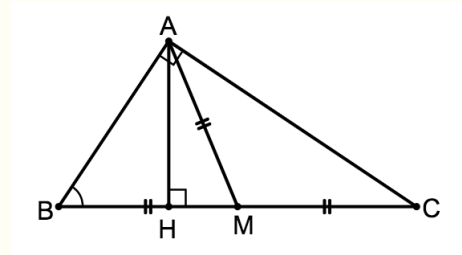
$$\bullet AB^2 = BH \cdot BC \text{ và } AC^2 = CH \cdot CB$$

$$\bullet \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \text{ và } AH^2 = HB \cdot HC.$$

$$\bullet \sin \widehat{ABC} = \frac{\text{đối}}{\text{huyền}} = \frac{AC}{BC};$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{kề}}{\text{huyền}} = \frac{AB}{BC};$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{đối}}{\text{kề}} = \frac{AC}{AB}.$$



Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm. Gọi I là trung điểm của BC . Xác định và tính độ dài các vectơ:

a) $\vec{u} = \vec{BA} + \vec{BC}$.

c) $\vec{w} = \vec{CA} + \vec{CB}$.

b) $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Cho tam giác ABC đều cạnh a , gọi G là trọng tâm tam giác và H là trung điểm BC . Tính:

a) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

d) $|\vec{GB} + \vec{GC}|$.

b) $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.

e) $|\vec{AH} + \vec{BC}|$.

c) $|\vec{GA} - \vec{GC}|$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, BC = 4$. Gọi E, F là trung điểm BC và CD , M là điểm bất kỳ. Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

c) $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.

b) $|\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}|$.

d) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}|$.

Hướng dẫn: Với M bất kỳ, ta tách *đồng hệ số* và *sử dụng phép trừ* để làm mất đi điểm M .

Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O , lấy M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng các vécto sau không đổi và tính độ dài của chúng:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$.

d) $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}$.

e) $\vec{z} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.

c) $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

Câu 21. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và cạnh là a . Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$
b) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$.

c) $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông tại A , có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$, cạnh $AB = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Tính độ dài các vécto sau:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c) $\vec{c} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

d) $\vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AC}$.

e) $\vec{e} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{IC}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 23. Cho hình thoi $ABCD$ cố định có tâm O , cạnh bằng a và góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm của đoạn DO và G là trọng tâm

tam giác ABO .

a) Tính: $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

b) Tính $|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}|$.

c) Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 24. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH , $AB = a$, $HC = 2a$, ($a > 0$).

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB}$.

b) Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|$ và $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}|$

Câu 25. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ $AD = a$ và đường cao $AH = a$, góc $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Hãy tính: $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$?

Câu 26. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , tâm O , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, G là trọng tâm tam giác ABD .

a) Tính $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}|$.

b) Tính $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AG}|$.

Câu 27. Cho tam giác ABC cân tại A , có $AB = 4$, $BC = 6$. Gọi AM , BN , CK lần lượt là trung tuyến của $\triangle ABC$ và G là trọng tâm.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$

b) Tính $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}|$.

Câu 28. Cho hình bình hành $ABCD$, có tam giác ABC vuông tại C , $AD = 8a$, $AC = 15a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm cạnh CD và AD .

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{MA}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{BD} - 2 \cdot \overrightarrow{CN} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$.

c) Tính: $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$ và $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CN}|$.

Câu 29. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , E là trung điểm của GD , F là trung điểm BC và M là điểm tùy ý.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{ME}$.

b) Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

c) Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}|$.

Dạng toán 3: Phân tích vectơ - Chứng minh thẳng hàng - Song song

Phân tích vectơ (Tính một vectơ theo 2 vectơ không cùng phương)

Dựa vào nội dung định lý: "Cho trước 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, ($\vec{u}$, $\vec{v} \neq 0$) không cùng phương. Với mọi vectơ $\vec{w}$ bao giờ cũng tìm được 1 cặp số thực α, β duy nhất sao cho: $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ ". Khi đó ta có hai hướng giải quyết:

- **Hướng 1:** Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm, hiệu hai vectơ cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,
- **Hướng 2:** Từ giả thiết lập được mối quan hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm, hiệu hai vectơ cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm,

Chứng minh 3 điểm thẳng hàng (cùng phương, cùng gốc)

Để chứng minh A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ (1). Để nhận được (1), ta có thể lựa chọn một trong hai hướng sau:

- **Hướng 1:** Sử dụng các qui tắc biến đổi vectơ.
 - **Hướng 2:** Tính vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp vectơ trung gian.
- Lưu ý:** Nếu không dễ nhận thấy k trong đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$, ta nên biểu thức phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để tìm ra số thực k .

Chứng minh song song (cùng phương, không cùng gốc)

Để chứng minh $AB \parallel DC$, ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{DC}$.

Nhóm 1: Phân tích vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Câu 30. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M trung điểm của cạnh AB , N là điểm sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Biểu diễn (phân tích) vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 31. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm của tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm của BC .

- | | |
|--|---|
| a) Phân tích $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. | c) Phân tích $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. |
| b) Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. | d) Phân tích $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AI}$. |

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD , G là trọng tâm của tam giác BCI . Hãy phân tích các vécto $\overrightarrow{BI}$ và $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Câu 33. Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$. Gọi J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$.

- a) Phân tích các vécto $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Câu 34. Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC .

- a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.
- b) Phân tích các vécto $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

Nhóm 2: Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Câu 35. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{PB} = -4\overrightarrow{PA}$. Chứng minh các điểm M, N, P thẳng hàng?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 36. Cho tam giác ABC . Lấy các điểm P, Q thỏa mãn: $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}, 3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh ba điểm P, Q, G thẳng hàng ?

Hướng dẫn: Tính $\overrightarrow{GP}, \overrightarrow{GQ}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Câu 37. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P được xác định bởi $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

- Xác định các điểm M, N, P và vẽ hình.
- Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Hướng dẫn: Phân tích hai vectơ $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Câu 38. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M, N là các điểm thỏa $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}, 2\overrightarrow{NC} + 3\overrightarrow{NA} = \vec{0}$ và G là trọng tâm tam giác ABC .

- Chứng minh: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
- Chứng minh ba điểm G, M, N thẳng hàng.

Câu 39. Cho tam giác ABC có trung tuyến BI và H, K thỏa $\overrightarrow{BC} = 5\overrightarrow{BH}$ và $2\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{IK} = \vec{0}$.

- Biểu diễn $\overrightarrow{AK}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Chứng minh ba điểm A, H, K thẳng hàng.

Câu 40. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có tâm O , $AB = 4a$, $AD = 3a$, M là một điểm tùy ý.

- Chứng minh $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M . Tính độ dài vectơ v .
- Gọi E, F là hai điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CA}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{DF}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$, suy ra ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Câu 41. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có G là trọng tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua B và E là điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ: $5\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$.

- Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ và $|\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}|$.
- Phân tích hai vectơ $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Chứng minh rằng ba điểm D, E, G thẳng hàng?

Câu 42. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi O là trọng tâm tam giác BCD .

- Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AO}$.
- Xác định và tính độ dài của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.
- Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M, N là các điểm được xác định bởi: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}, 5\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng: M, N, G thẳng hàng.

Câu 43. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, gọi I là trung điểm AB và M là trung điểm AI . Lấy điểm H đối xứng với C qua G .

- Chứng minh $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OG} = 4\overrightarrow{OM}$, O bất kì.
- Gọi N là điểm xác định bởi $2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Tính $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- Chứng minh ba điểm G, M, N thẳng hàng.

Câu 44. Cho $\triangle ABC$, có trọng tâm G . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Lấy hai điểm I, J sao cho: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}, 2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

- Chứng minh rằng M, N, J thẳng hàng và J là trung điểm của BI .
- Gọi E trên đoạn AB thỏa: $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

Câu 45. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc đoạn AB và CD sao cho: $AB = 3AM, CD = 2CN$

- Tính $\overrightarrow{AN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Gọi G là trọng tâm tam giác BMN , tính $\overrightarrow{AG}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Gọi I là điểm định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$. Tính vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Tìm k để đường thẳng AI qua điểm G .

Nhóm 3: Chứng minh song song

Câu 46. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn các đẳng thức: $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh: $DE \parallel AM$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 47. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của cạnh BC và I là điểm thỏa mãn hệ thức: $4\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$. Chứng minh rằng: $MP \parallel BG$.

Câu 48. Cho hình bình hành $ABCD$ có I là trung điểm CD . Gọi G là trọng tâm tam giác BCI và điểm J thỏa mãn đẳng thức vécto $\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{0}$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh: $CJ \parallel AG$.

Dạng 4: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn hệ thức vécto

Bài toán: Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện Ω cho trước?

Sử dụng các phép biến đổi, biến đổi Ω về một trong những dạng sau:

- **Trường hợp 1:** Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ với A, B cho trước (cố định) thì tập hợp điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- **Trường hợp 1:** Nếu $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$ với A, B, C cho trước (cố định) thì tập hợp điểm M thuộc đường tròn tâm C , bán kính $k \cdot AB$.
- **Trường hợp 1:** Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C cho trước (cố định) và
 - Nếu $k \in \mathbb{R}^+$ thì tập hợp điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC , theo hướng của $\overrightarrow{BC}$.
 - Nếu $k \in \mathbb{R}^-$ thì tập hợp điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC , ngược hướng của $\overrightarrow{BC}$.

Câu 49. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện:

a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$

b) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|$

c) $3|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$

d) $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA}|$

e) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$

f) $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

Câu 50. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện:

a) $k\overrightarrow{MA} + (1 - k)\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

b) $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$

c) $\overrightarrow{MA} + (1 - k)\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

d) $\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$

Câu 51. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$ tâm O . Hãy tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Câu 52. Cho hình thoi $ABCD$ cố định có tâm O , cạnh bằng a và góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm của đoạn DO và G là trọng tâm tam giác ABO . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ID}|$.

Câu 53. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi P, Q là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$

và $\overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

- a) Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.
- b) Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4a\sqrt{3}$.

Câu 54. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi $N \in CD$ sao cho $CD = 2CN$.

- a) Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- b) Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = 4AB$.

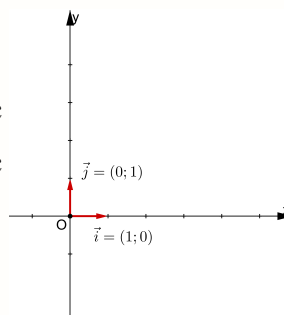
BÀI 2. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

A. LÝ THUYẾT

Hệ trục tọa độ

1. Định nghĩa:

Hệ trục tọa độ Oxy là hệ gồm hai trục Ox, Oy vuông góc với nhau. Trong đó Ox : trục hoành, Oy : trục tung, O : gốc tọa độ và $\vec{i} = (1; 0)$, $\vec{j} = (0; 1)$ là hai vectơ đơn vị.



2. Tọa độ vectơ:

$$\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

Ví dụ: $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (\dots\dots\dots)$ hoặc $\vec{a} = 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (\dots\dots; \dots), \dots$

3. Tọa độ điểm:

$$M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Ví dụ: $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 2\vec{j} \Leftrightarrow A(\dots\dots; \dots\dots)$ hoặc $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i} \Leftrightarrow B(\dots\dots; \dots\dots), \dots$

4. Các tính chất:

Cho hai vectơ $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó ta có các tính chất sau:

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \rightarrow$ (hai vectơ bằng nhau khi hoành = hoành và tung = tung)
- $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2) \rightarrow$ (hai vectơ cộng nhau là hoành + hoành và tung + tung)
- $k \cdot \vec{a} = (kx_1; ky_1) \rightarrow$ (nhân phân phối)
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 \rightarrow$ (hai vectơ nhân nhau = hoành nhân hoành + tung nhân tung)
- $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \rightarrow$ (môđun của vectơ = căn của hoành bình + tung bình)
- $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow$ (cos giữa hai vectơ = tích vô hướng chia tích độ dài)

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ (hai vécto vuông góc nhau thì nhân nhau = 0)
- $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \rightarrow$ (hai vécto cùng phương: hoành chia hoành = tung chia tung)

5. Liên hệ giữa vectơ và tọa độ điểm:

Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$. Khi đó:

- $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \rightarrow$ (nhớ: $B - A$)
- $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \rightarrow$ (nhớ: $\sqrt{(B - A)^2}$)
- I là trung điểm của $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \rightarrow$ (nhớ: $I = \frac{A + B}{2}$).
- G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \rightarrow$ (nhớ: $G = \frac{A + B + C}{3}$).

B. BÀI TẬP

Dạng 1: Bài toán cơ bản

Câu 1. Cho ba điểm $A(-2; 1), B(2; -3), C(0; 3)$.

- Tính $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ và AB, BC, CA . Chứng tỏ A, B, C là đỉnh một tam giác?
- Tìm chu vi của tam giác ABC ?
- Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$?
- Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ?
- Tìm điểm E thỏa mãn $\vec{CE} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$?
- Tìm điểm $F \in Ox$ để A, B, F thẳng hàng?

Câu 2. Cho ba điểm $A(-2; -1), B(-1; 4), C(3; 0)$.

- Tính $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ và AB, BC, CA . Chứng tỏ A, B, C là đỉnh một tam giác?
- Tìm chu vi của tam giác ABC ?
- Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$?

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ?

e) Tìm điểm E thỏa mãn $\vec{AE} + 2\vec{BC} = \vec{EB}$?

f) Tìm điểm $F \in Oy$ để A, C, F thẳng hàng?

Câu 3. Cho ba điểm $A(1; -2), B(0; 4), C(3; 2)$.

a) Tính $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$ và AB, BC, CA . Chứng tỏ A, B, C là đỉnh một tam giác?

b) Tìm chu vi của tam giác ABC ?

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

d) Tìm tọa độ M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC ?

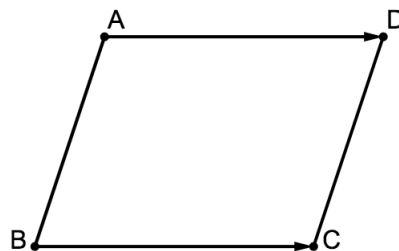
e) Tìm điểm E thỏa mãn $\vec{CE} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$?

f) Tìm điểm $F \in Ox$ để A, C, F thẳng hàng?

Dạng 2: Tìm điểm đặc biệt**Nhóm 1: Tìm đỉnh thứ tư của hình bình hành**

Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành, ta làm theo các bước:

- Gọi $D(x; y)$ và tính $\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (\dots; \dots) \\ \overrightarrow{BC} = (\dots; \dots) \end{cases}$
- Sử dụng $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Hoành} = \text{Hoành} \\ \text{Tung} = \text{Tung} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$



Câu 4. Cho ba điểm $A(-6; 2), B(2; 6), C(7; -8)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành? Xác định tâm I của hình bình hành?

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Cho ba điểm $A(-4; 1), B(2; 4), C(-1; -5)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. Xác định tâm I của hình bình hành?

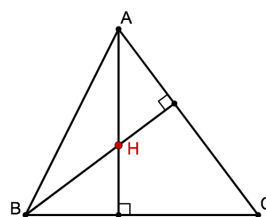
Câu 6. Cho ba điểm $A(-1; 1), B(1; 3), C(7; 3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành. Xác định tâm I của hình bình hành?

Câu 7. Cho tam giác ABC có $A(-2; 1), B(4; 1)$ và $C(-2; 7)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABDC$ là hình vuông?

Câu 8. Cho tam giác ABC có $A(5; 0), B(0; 4)$ và $C(-4; 0)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABDC$ là hình vuông?

Nhóm 2: Tìm tọa độ trực tâm

Tìm H là chân đường cao kẻ từ A đến BC (H là hình chiếu của A lên BC): $\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH} = 0 \end{cases}$



Câu 9. Cho tam giác ABC , biết tọa độ các đỉnh là $A(-6; 2), B(2; 6), C(7; -8)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Cho tam giác ABC , biết tọa độ các đỉnh là $A(2; 4), B(0; 2), C(-1; 3)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ?

Câu 11. Cho tam giác ABC với $A(1; 2), B(3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M để gốc tọa độ O là trực tâm của tam giác ABM ?

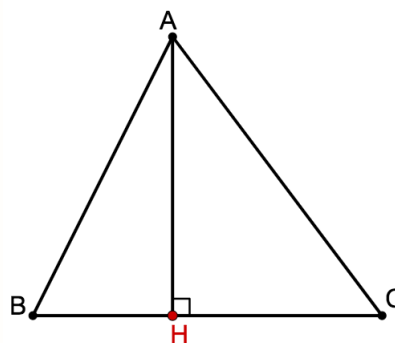
Câu 12. Cho tam giác ABC , biết tọa độ các đỉnh là $A(2; 5); B(-3; -2); C(5; -1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ?

Câu 13. Cho tam giác ABC với $A(4; -1), C(-2; 2)$ và $H\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm B ?

Nhóm 3: Tìm tọa độ chân đường cao

Tìm H là chân đường cao kẻ từ A đến BC (H là hình chiếu của A lên BC) :

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ B, H, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương} \end{cases}$$



Câu 14. Cho tam giác ABC với $A(1; -3), B(-5; 6)$ và $C(0; 1)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A đến BC . Tính diện tích của tam giác ABC ?

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Cho tam giác ABC với $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$ và $C(2; -2)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ B đến AC . Tính diện tích của tam giác ABC ?

Câu 16. Tìm tọa độ H là chân đường cao kẻ từ A đến BC của tam giác ABC . Biết rằng $A(1; -2)$, $B(2; -3)$, $C(3; 0)$.

Câu 17. Cho tam giác ABC có $A(2, 2)$, $B(0, 1)$ và $C(4, -2)$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng BC sao cho đoạn thẳng AM có độ dài ngắn nhất?

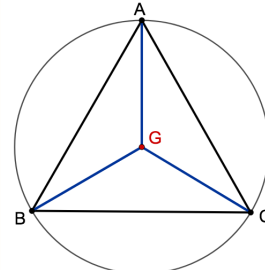
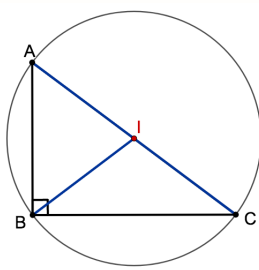
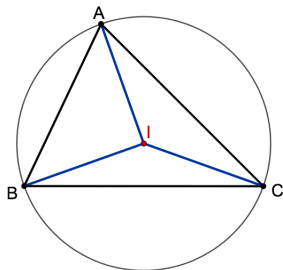
Câu 18. Cho tam giác ABC có $A(1; 1)$; $B(2; 5)$, $C(-1; 2)$. Tìm điểm H trên cạnh AB sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB là ngắn nhất?

Nhóm 4: Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Tọa độ điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thỏa mãn: $IA = IB = IC \Rightarrow$

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình sẽ tìm được $I(x; y)$.



Đặc biệt:

- Nếu tam giác ABC vuông $\Rightarrow$ Tâm ngoại tiếp I trùng với trung điểm của cạnh huyền.
- Nếu tam giác ABC đều $\Rightarrow$ Tâm ngoại tiếp I trùng với trọng tâm G của tam giác.
 $\rightarrow$ Do đó khi tìm tâm ngoại, ta cần kiểm tra hai trường hợp đặc biệt này trước.

Câu 19. Tìm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(1; 2)$, $B(-2; 6)$, $C(9; 8)$.

Câu 20. Tìm I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(1; 3), B(-1; -1), C(9; -1)$.

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , với $A(-4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$.

a) Tính chu vi của tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

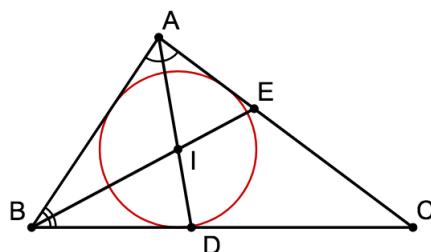
Câu 22. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\triangle ABC$ với $A(2; -1); B(0; 5); C(-3; 7)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Câu 23. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\triangle ABC$ với $A(-1; 1), B(3; 5), C(8; -1)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Nhóm 5: Tìm tọa độ chân đường phân giác

Nếu AD là đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$ thì: $\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$. Theo tính chất đường phân giác, ta có: $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow DB = \frac{AB}{AC} \cdot DC$.

Do hai vectơ $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ cùng phương, ngược chiều nên, ta có: $\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$ (dpcm).



Đặc biệt: Trong trường hợp tam giác ABC cân hoặc đều thì D là trung điểm của BC .

Mở rộng bài toán: Tìm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC :

- Tìm chân đường phân giác D dựa vào $\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC}$.
- Trong tam giác ABD có BI là phân giác nên $\overrightarrow{ID} = -\frac{BD}{BA} \cdot \overrightarrow{IA}$. Từ đó suy ra tọa độ điểm I .

Câu 24. Cho tam giác ABC với $A(-4; 1), B(2; 4)$ và $C(2; -2)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A . Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 25. Cho tam giác ABC với $A(-1; 0)$, $B(2; 3)$ và $C(5; 0)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A . Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 26. Cho tam giác ABC với $A(1; 1)$, $B(0; 4)$ và $C(4; 2)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A . Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 27. Cho $\triangle ABC$ với $A(1; 3)$, $B(-1; -1)$ và $C(9; -1)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A . Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 28. Cho tam giác ABC với $A(5; -1)$, $B(1; 3)$ và $C(-1; -3)$. Tìm tọa độ D là chân đường phân giác góc A . Tìm tọa độ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Nhóm 6: Tìm điểm thuộc trục Ox, Oy thoả điều kiện cho trước

Nếu $M \in Ox$ (trục hoành) $\Rightarrow M(x; 0)$.

Nếu $M \in Oy$ (trục tung) $\Rightarrow M(0; y)$.

Câu 29. Cho tọa độ điểm $B(5; 2)$. Tìm tọa độ điểm D trên Ox thỏa mãn $BD = 2\sqrt{2}$.

Câu 30. Tìm E trên đường thẳng $d : y = -0,5x$ cách điểm $A(1; -4)$ một khoảng $= \sqrt{10}$.

$A(-1; -1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $AM = \sqrt{17}$.

Câu 31. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm

Câu 32. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm

$A(-1; 3)$ và $B(2; 4)$.

- a) Tìm tọa độ điểm M là điểm đối xứng với A qua B .
- b) Tìm tọa độ điểm N nằm trên trục hoành Ox thỏa mãn $NA = NB$.
- c) Tìm tọa độ điểm C có hoành độ bằng 2 sao cho tam giác ABC vuông tại C .

Câu 33. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-2; 1)$ và $B(1; -2)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để tam giác ABM vuông tại A .

Câu 34. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 6)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để tam giác MAB cân tại M .

Câu 35. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(2; 1)$ và $B(1; 2)$. Tìm điểm M thuộc trục Oy để tam giác ABM cân tại B .

Câu 36. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 5)$ và $B(-7; 11)$. Tìm điểm M sao cho tam giác ABM vuông cân tại điểm M .

Câu 37. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; -2)$ và $B(2; 3)$.

- a) Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành Ox sao cho M, A, B thẳng hàng.
- b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tam giác OAD vuông cân tại gốc tọa độ O .

Câu 38. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC , tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình chữ nhật với:

- a) $A(1; 2), B(5; 4), C(7; 0)$
- b) $A(6; 3), B(4; 7), C(2; 1)$

Câu 39. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC , tìm tọa độ điểm I với:

- a) $A(1; 2), B(5; 4), C(7; 0)$ và $I \in xOx'$ thỏa mãn $|\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- b) $A(6; 3), B(4; 7), C(2; 1)$ và $I \in yOy'$ thỏa mãn $|\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 40. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(-4; 2), B(3; 5), C(5; -3)$. Tìm $D \in Oy$ sao cho $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy là AB .

Câu 41. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với $A(2; 4), B(1; 2), C(6; 2)$. Gọi M là trung điểm của BC . Tìm tọa độ giao điểm E của đường thẳng AM với trục tung Oy .

Câu 42. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; -2)$ và $B(2; -3)$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng (AB) và trục tung.

Câu 43. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm:

- a) $A(1; 1), B(2; 3)$ và $C(5; -1)$. Tìm điểm F thỏa mãn $4\vec{AF} - 3\vec{BF} + \vec{CF} = \vec{0}$. Tìm M trên Ox cách đều hai điểm B và C .
- b) $A(-2; 3), B(3; 2)$ và $C(4; 7)$. Tìm điểm Q thỏa mãn $\vec{AQ} - 4\vec{CQ} + 2\vec{BQ} = \vec{0}$. Tìm N trên Oy cách đều hai điểm A và C .

Câu 44. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(3; -1)$. Tìm tọa độ điểm $M \in Ox$ sao cho $MA + MB$ ngắn nhất ?

Câu 45. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-2; -1)$ và $B(2; -4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $\widehat{MBA} = 45^\circ$.

Câu 46. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(3; 1)$ và $B(1; 3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho $\widehat{ABM} = 60^\circ$.

Câu 47. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(3; 4), B(2; 1), C(-1; 2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC để $\widehat{AMB} = 45^\circ$?

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy , xác định tọa độ D và E biết $D \in Ox, E \in Oy$ thỏa $\triangle ADE$ vuông tại A và $DE = \sqrt{52}$, với $A(1; 5)$.

Câu 49. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác

ABC với $A(1; 3), B(-1; -1), C(9; -1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $MNEF$, biết A là trung điểm của cạnh MN, B là điểm thuộc đường chéo NF sao cho $NB = 3BF$.

C. BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-6; 2), B(2; 6), C(7; -8)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C lập thành tam giác. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn BC , tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2; 4), B(0; 2), C(-1; 3)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- Tính độ dài đường trung tuyến CM của tam giác ABC .
- Tìm D để B là trọng tâm $\triangle ACD$.
- Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC , với $A(-2; -1), B(-1; 4), C(3; 0)$.

- Chứng minh tam giác ABC cân. Tính diện tích tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm K sao cho $\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KB}$.
- Tìm tọa độ điểm H là trực tâm của tam giác ABC .

Câu 53. Cho đường thẳng $d : y = x - 1$ và parabol $(P) : y = x^2 - 2x$. Gọi I là đỉnh của (P) và M trên d để $MI = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm tọa độ điểm M .

Câu 54. Cho $\triangle ABC$ với $A(-1; 1), B(1; 2), C(3; -4)$. Gọi M là trung điểm BC, K là điểm trên đường thẳng AC sao cho $BK \perp AM$. Tìm tọa độ điểm K .

Câu 55. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(-2; 0), B(5; 3)$ và $C(3; -2)$.

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông cân.
- Tìm điểm E sao cho A là trung điểm BE .
- Tìm tọa độ điểm M, N sao cho M, N chia đoạn AB thành 3 đoạn bằng nhau.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tâm đường tròn ngoại tiếp I và trực tâm H của tam giác ABC .

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(5; -1), B(-1; 3), C(-1; 5)$.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.

CHƯƠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

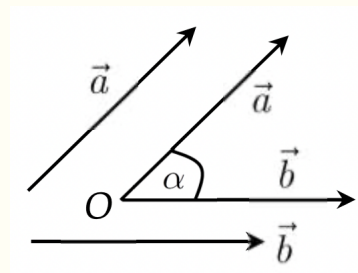
BÀI 1. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. LÝ THUYẾT

Lý thuyết

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Từ điểm O bất kì, ta vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó góc $\widehat{AOB}$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b}) = \alpha$.



2. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

3. Tính chất của tích vô hướng:

Với mọi vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k , ta luôn có:

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

$$\bullet \vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\bullet \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\bullet (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\bullet (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\bullet \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$$

4. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$, $M(x_M; y_M)$, $N(x_N; y_N)$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy'$$

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

$$\bullet |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\bullet |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ. Góc giữa hai vectơ

Câu 1. Cho tam giác đều ABC , đường cao AH . Hãy vẽ và tính các góc của các cặp vectơ sau:

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$

c) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC})$

d) $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB})$

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH . Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

Câu 3. Cho tam giác ABC vuông tại C có $CA = b$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O .

a) Hãy tìm $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

b) Hãy tính: $z = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

c) Hãy tính: $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$, với N là điểm trên cạnh BC .

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

a) Hãy tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$.

b) Hãy tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

Câu 6. Cho tam giác đều ABC , đường cao AH . Hãy vẽ và tính các góc của các cặp vectơ sau:

a) Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$.

b) Hãy tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

c) Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .

Câu 7. VD Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 5a$, $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $2AM = 3MC$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính độ dài đoạn BM .

Câu 8. Tính góc giữa hai vectơ trong các trường hợp sau:

a) $\begin{cases} \vec{a} = (1; -2) \\ \vec{b} = (-1; -3) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \vec{a} = (3; -4) \\ \vec{b} = (4; 3) \end{cases}$

$$c) \begin{cases} \vec{a} = (2; -5) \\ \vec{b} = (3; -7) \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \vec{a} = (2; -3) \\ \vec{b} = (6; 4) \end{cases}$$

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a .

Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$b) \vec{AB} \cdot \vec{BD}$$

$$c) (\vec{AC} - \vec{AB})(2\vec{AD} - \vec{AB})$$

$$d) \vec{OA} \cdot \vec{AB}$$

$$e) \vec{AC}(\vec{AB} + \vec{AD})$$

$$f) (\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC})$$

$$g) (\vec{AB} + \vec{AC})(\vec{BC} + \vec{BD} + \vec{BA})$$

$$h) (\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC})$$

Câu 10.

$$a) \text{ Tính } |\vec{a} + \vec{b}|, |\vec{a} - \vec{b}| \text{ nếu } |\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 8, (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ.$$

$$b) \text{ Cho } |\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = 24. \text{ Tính } |\vec{a} - \vec{b}|$$

Dạng toán 2: Chứng minh vuông góc và các dạng toán thường gặp

Hướng 1: Dùng tính chất tích vô hướng

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = 0 \\ \vec{b} = 0 \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \end{cases}$$

Hướng 2: Dùng tọa độ: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

Câu 11. Chứng minh rằng hai đường chéo của một hình thoi $ABCD$ vuông góc với nhau.

Câu 12. Cho ba điểm A, B, M . Gọi O là trung điểm của đoạn AB . Chứng minh: $4MO^2 = AB^2 \Leftrightarrow MA \perp MB$

Câu 13. Cho $\triangle ABC$ với $A(10; 5), B(3; 2), C(6; -5)$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông tại B .

Câu 14. Cho tam giác ABC bất kì, gọi I là trung điểm AB . Chứng minh: $CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Câu 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Gọi M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng

$$a) \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$$

$$b) \vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}$$

$$c) MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

$$d) MA^2 + \vec{MB} \cdot \vec{MD} = 2\vec{MA} \cdot \vec{MO}$$

Câu 16. Cho $\triangle ABC$ có AA', BB', CC' là các đường trung tuyến, G là trọng tâm, M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a) \vec{AA'} \cdot \vec{BC} + \vec{BB'} \cdot \vec{CA} + \vec{CC'} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$b) \vec{MA'} \cdot \vec{BC} + \vec{MB'} \cdot \vec{CA} + \vec{MC'} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$c) \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

$$d) \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 - \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

$$e) MA^2 + MB^2 + MC^2 = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Câu 17. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M sao cho

$$a) \vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$b) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

Câu 18. Cho tam giác AB có độ dài bằng $3a$.

Tìm tập hợp những điểm M thỏa:

$$a) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = AB^2$$

$$b) MA^2 + 2MB^2 = AB^2$$

Câu 19. Cho ΔABC cố định. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn:

$$a) \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$c) \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$d) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 6$$

$$e) \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$f) (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$$

Dạng toán 3: Các bài toán liên quan đến tọa độ

a) Biểu thức tọa độ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$, $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$.

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ (hoành $\times$ hoành + tung $\times$ tung)
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$
- $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ Khi tính tích vô hướng 2 vécto', ta nên để ý đến chiều nhằm xác định đúng góc của chúng.

b) Tìm các điểm đặc biệt trong tam giác

- Trọng tâm $G(x_G; y_G)$ là giao điểm ba đường trung tuyến:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$
- Trực tâm $H(x_H; y_H)$ là giao điểm ba đường cao:
 Ta có $AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
 $BH \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
 Từ đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

 Giải hệ trên ta tìm được x_H, y_H .
- Tìm $J(x_J; y_J)$ là chân đường cao vẽ từ A :
 Vì $AJ \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (1)
 Vì 3 điểm B, J, C thẳng hàng nên: $\overrightarrow{BJ}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương (2)
 Giải hệ phương trình gồm 2 phương trình (1) và (2) ta tìm được x_J, y_J .

- Tâm đường tròn ngoại tiếp $I(x_I; y_I)$ là giao điểm 3 đường trung trực
- Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$$

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (6; -2)$, $\vec{c} = (x; 1)$.

- Chứng minh $a \perp b$.
- Tìm x để $\vec{a} \perp \vec{c}$.
- Tìm x để a cùng phương với c .
- Tìm tọa độ vectơ $\vec{d}$ để $\vec{a} \perp \vec{d}$ và $\vec{b} \cdot \vec{d} = 20$

Câu 21. Cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(5; -3)$, $C(2; 0)$.

- Tính chu vi và nhận dạng tam giác ABC.
- Tìm tọa độ điểm M biết $\vec{CM} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$.
- Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 22. Cho $\triangle ABC$ có $A(4; 3)$, $B(0; -5)$, $C(-6; -2)$.

- Chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại B.
- Tìm tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 23. Cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(-2; 6)$, $C(9; 8)$.

- Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.
- Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- Tìm tọa độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC.
- Tính chu vi, diện tích tam giác ABC.
- Tìm tọa độ điểm M trên Oy để B, M, A thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm N trên Ox để tam giác ANC cân tại N.
- Tìm tọa độ điểm D để ABDC là hình chữ nhật.
- Tìm tọa độ điểm K trên Ox để AOKB là hình thang đáy AO.
- Tìm tọa độ điểm T thỏa $\vec{TA} + 2\vec{TB} - 3\vec{TC} = \vec{0}$
- Tìm tọa độ điểm E đối xứng với A qua B.

Câu 24. Cho tam giác ABC có $A(0; 2)$, $B(6; 9)$, $C(4; 1)$. Câu hỏi tương tự như bài trên.

BÀI 2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. LÝ THUYẾT

Lý thuyết

Qui ước kí hiệu dùng cho $\triangle ABC$:

- Độ dài các cạnh: $BC = a, CA = b, AB = c$
- Độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C : m_a, m_b, m_c .
- Độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C : h_a, h_b, h_c .
- Độ dài các đường phân giác vẽ từ các đỉnh A, B, C : l_a, l_b, l_c
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác: R, r .
- Nửa chu vi tam giác: p
- Diện tích tam giác: S

1. Định lí cosin

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$ hay $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$ hay $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C$ hay $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Hệ quả: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

2. Định lí sin

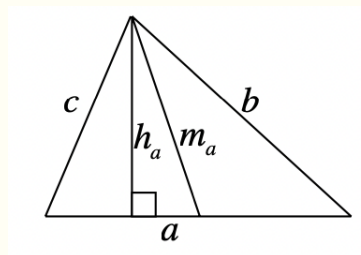
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Độ dài trung tuyến

$$m_a = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}; m_b = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}; m_c = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

4. Diện tích tam giác

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ \frac{abc}{4R} = p \cdot r \\ \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Herông)} \end{cases}$$



5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

$$(1) AB^2 = BH \cdot BC$$

$$(4) BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$(7) \frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$(2) AC^2 = CH \cdot BC$$

$$(5) AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$(3) AH^2 = HB \cdot HC$$

$$(6) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Giải tam giác

Câu 1. Cho tam giác ABC . Biết $a = 17,4$; $\hat{B} = 44^\circ 30'$, $\hat{C} = 64^\circ$. Tính góc $\hat{A}$ và các cạnh b, c .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho tam giác ABC . Biết $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\hat{C} = 54^\circ$. Tính góc $\hat{A}, \hat{B}$ và cạnh c

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Cho tam giác ABC . Biết $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$. Tính các góc $\hat{A}$, $\hat{B}$ và $\hat{C}$.

Câu 4. Giải tam giác ABC biết:

- a) $c = 14$; $\hat{A} = 60^\circ$; $\hat{B} = 40^\circ$
- b) $c = 35$; $\hat{A} = 40^\circ$; $\hat{C} = 120^\circ$
- c) $b = 4, 5$; $\hat{A} = 45^\circ$; $\hat{C} = 75^\circ$
- d) $a = 137, 5$; $\hat{B} = 60^\circ$; $\hat{C} = 40^\circ$
- e) $a = 6, 3$; $b = 6, 3$; $\hat{C} = 54^\circ$
- f) $a = 7$; $b = 23$; $\hat{C} = 130^\circ$
- g) $b = 32$; $c = 45$; $\hat{A} = 87^\circ$
- h) $b = 14$; $c = 10$; $\hat{A} = 145^\circ$

Câu 5. Giải tam giác ABC biết:

- a) $a = 6, 3$; $b = 6, 3$; $\hat{C} = 54^\circ$
- b) $a = 7$; $b = 23$; $\hat{C} = 130^\circ$
- c) $b = 32$; $c = 45$; $\hat{A} = 87^\circ$
- d) $b = 14$; $c = 10$; $\hat{A} = 145^\circ$

Dạng toán 2: Tìm các đại lượng

Câu 9. Cho $\triangle ABC$, biết:

- a) $a = 12, b = 13, c = 15$. Tính $\cos A$ và góc A .
 $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính
- b) $\hat{A}, \hat{B}, h_a$ và l_a
- c) $c = 3 \text{ cm}, a = 5 \text{ cm}, b = 6 \text{ cm}$. Tính S, h_a và R .
- d) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính m_a, S, h_a .

Câu 6. Giải tam giác ABC biết:

- a) $a = 14; b = 18; c = 20$
- b) $a = 4; b = 5; c = 7$
- c) $a = 6; b = 7, 3; c = 4, 8$
- d) $a = 2\sqrt{3}; b = 2\sqrt{2}; c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

Câu 7. Để lập đường dây cao thế từ vị trí A đến vị trí B , ta phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối thẳng đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 10 km rồi nối từ vị trí C thẳng đến vị trí B dài 8 km. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 75° . Hỏi so với việc nối thẳng từ A đến người ta tốn thêm bao nhiêu km dây?

Câu 8. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo khoảng cách AB và các góc $\widehat{CAD}, \widehat{CBD}$. Chẳng hạn ta đo được $AB = 24 \text{ m}, \widehat{CAD} = \alpha = 63^\circ, \widehat{CBD} = \beta = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp.

- e) $a = \sqrt{6}, b = 2, c = \sqrt{3} + 1$. Tính các góc của tam giác, R, m_a .
- f) $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, c = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. Tính $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, R, S$.
- g) $AB = 2, AC = 3, BC = 4$. Tính r .
- h) $a = 13, b = 14, c = 15$. Tính S, h_b, R, r .
- i) $a = 21, b = 17, c = 10$. Tính S, h_a, r, m_a .
- j) $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 45^\circ, b = 4$. Tính a và c .

- k) $\hat{A} = 60^\circ, a = 6$. Tính R .
- l) $\hat{A} = 60^\circ, b = 20, c = 25$. Tính S, h_a, R, r .
- m) $\hat{A} = 60^\circ, AB = 5 \text{ cm}, BC = 7 \text{ cm}$. Tính AC, R, r, h_a .
- n) $\hat{A} = 120^\circ, AB = 6 \text{ cm}, AC = 10 \text{ cm}$. Tính BC, R, S .
- o) $b = 7, c = 5, \cos A = 0,6$. Tính S, R và r .
- p) $AB = 3, AC = 4, S = 3\sqrt{3}$. Tính BC
- q) $\hat{A} = 120^\circ, BC = 7 \text{ cm}, AC = 5 \text{ cm}$. Tính AB, R, r, m_a, l_a

- r) $AC = 13 \text{ cm}, AB + BC = 22 \text{ cm}, \hat{B} = 60^\circ$.
Tính AB, BC

Câu 10. $\triangle ABC$ có $a = 5, b = 4, c = 3$. Lấy D đối xứng với B qua C . Tính AD .

Câu 11. Cho $\triangle ABC$. Biết $a = 3, b = 4, c = 6$. Tính góc lớn nhất và đường cao ứng với cạnh lớn nhất.

Câu 12. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 8, AC = 9, BC = 10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = 7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Dạng toán 3: Chứng minh các đẳng thức trong tam giác

Câu 13. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm. Chứng minh rằng:

- a) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$
- b) $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

Câu 14. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh

- a) $b^2 - c^2 = a(b \cdot \cos C - c \cdot \cos B)$
- b) $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cdot \cos C - b \cdot \cos B)$

Câu 15. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh

- a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$
- b) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$

Câu 16. Cho $\triangle ABC$ có $b - c = \frac{a}{2}$. Chứng minh:

- a) $\sin A = 2 \sin B - 2 \sin C$
- b) $\frac{1}{2h_a} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$

Câu 17. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh các khẳng định sau:

- a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$.
- b) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.
- c) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$.

Câu 18. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn: $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn.

Câu 19. Tam giác ABC thỏa hệ thức: $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$. CMR: $\triangle ABC$ cân tại A hay $\hat{A} = 120^\circ$

Câu 20. Tính góc A của $\triangle ABC$ thỏa: $b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2)$.

Câu 21. Cho $\triangle ABC$ có $a = 2\sqrt{2}, b = 2$ và $\hat{C} = 30^\circ$. Chứng minh tam giác ABC cân. Tính diện tích và chiều cao h_a .