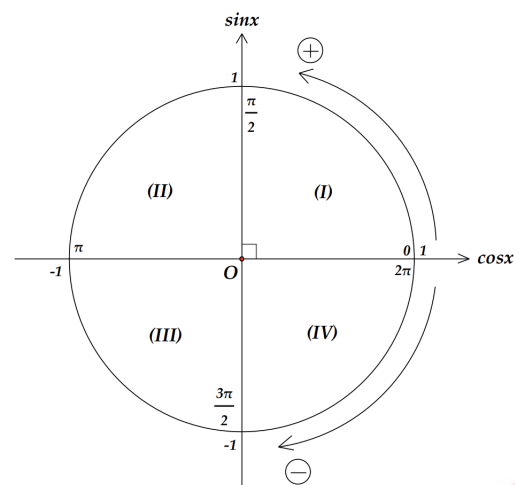


Chương 1

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC VÀ DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

1. Đường tròn lượng giác và dấu của các giá trị lượng giác



Đường tròn lượng giác

Giá trị LG	Cung phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

Nhất cả - Nhì sin - Tam tan - Tứ cos

2. Các công thức lượng giác

Công thức lượng giác cơ bản	
$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Cung góc liên kết**Cung đối nhau**

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

Cung bù nhau

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

Cung phụ nhau

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

Cung hơn kém π

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

Công thức cộng cung

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

Hệ quả

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \text{ và } \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

Công thức nhân đôi và hạ bậc**Nhân đôi**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2 \tan \alpha \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

Hạ bậc

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$\cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$

Nhân ba

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$$

Đặc biệt

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Bài 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Dạng toán 1: Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

- $y = \tan f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)} \rightarrow \cos f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $y = \cot f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)} \rightarrow \sin f(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Một số trường hợp tìm tập xác định thường gặp

- $y = \frac{1}{P(x)} \rightarrow P(x) \neq 0$
- $y = \sqrt[n]{P(x)} \rightarrow P(x) \geq 0$.
- $y = \frac{1}{\sqrt[n]{P(x)}} \rightarrow P(x) > 0$. (có mẫu không?, có tan, cot không? Có căn không?)

Lưu ý rằng: $-1 \leq \sin f(x); \cos f(x) \leq 1$ và $A \cdot B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta cần nhớ những trường hợp đặc biệt:

$$\begin{cases} +\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ +\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ +\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ +\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ +\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad \begin{cases} +\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ +\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ +\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Câu 1. Hãy tìm tập xác định D của hàm số lượng giác

a) $y = \frac{\tan 2x}{\cos x + 1} + \sin x$

b) $y = \frac{2 \tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}$

c) $y = \frac{\cos 3x}{1 - \sin x} + \tan x$

d) $y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$

e) $y = \frac{1}{\tan x - 1}$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$

g) $y = \sqrt{\frac{2 - \sin x}{\cos x + 1}}$

h) $y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$

i) $y = \sqrt{\frac{2 - \cos x}{1 - \sin x}}$

Câu 2. Tìm tập xác định của các hàm số lượng giác sau

$$\text{a) } y = \frac{1 - 3 \cos x}{\sin x}$$

$$\text{b) } y = \frac{\cos 3x}{1 - \sin x} + \tan x .$$

$$\text{c) } y = \frac{2 \tan 2x - 5}{\sin 2x + 1}$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{\tan x - 1}$$

$$\text{e) } y = \frac{3}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \tan x$$

$$\text{f) } y = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} .$$

$$\text{g) } y = \sqrt{\frac{2 - \sin x}{\cos x + 1}} .$$

$$\text{h) } y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$$

$$\text{i) } y = \sqrt{\frac{\cos x + 4}{\sin x + 1}}$$

$$\text{j) } y = \sqrt{\frac{2 - \cos x}{1 - \sin x}}$$

$$\text{k) } y = \sqrt{4\pi^2 - x^2} + \cot 2x$$

$$\text{l) } y = \sqrt{\pi^2 - x^2} + \cot 2x$$

$$\text{m) } y = \frac{\sqrt{\pi^2 - x^2}}{\sin 2x}$$

$$\text{n) } y = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4x^2}}{\cos 2x} .$$

Dạng toán 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

Phương pháp 1. Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \begin{array}{l} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \end{array} \quad \text{hoặc} \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow \begin{array}{l} 0 \leq |\cos x| \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{array}$$

Biến đổi về dạng: $m \leq y \leq M$

Kết luận $\max y = M$ và $\min y = m$

Phương pháp 2. Đưa về tổng bình phương

Phương pháp 3. Áp dụng bất đẳng thức (hệ quả từ bất đẳng thức Cauchy – Schwars)

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Bài tập

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a) $y = 5 - 3 \cos 4x$

b) $y = \frac{1 + 4 \cos^2 x}{3}$

c) $y = \frac{3}{3 - \sqrt{1 - \cos x}}$

d) $y = \cos^2 x - 2 \cos x - 4$

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a) $y = 2 + 3 \cos x$

b) $y = 3 - 2 \sin 2x$

c) $y = 3 - 2|\sin 2x|$

d) $y = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x.$

e) $y = \sin x + \sin(x + 2\pi/3)$

f) $y = \cos x + \cos(x + \pi/3)$

g) $y = \frac{4}{2 - \sin x}$

h) $y = \frac{8}{3 - \cos^2 x}$

i) $y = \frac{1}{\sqrt{2 - \sin^2 3x}}$

j) $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 12$

k) $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 5$

l) $y = \cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x + 4$

m) $y = \sqrt{3} (\cos^4 x - \sin^4 x) + \sin 2x + 1.$

n) $y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3$

o) $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$

p) $y = \cos^4 x - 2 \sin^2 x + 1$

q) $y = 3 - \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

r) $y = \sin 2x + 2$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

s) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$

t) $y = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$ trên $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

u) $y = \sin^4 x + \cos^4 x - 1$

v) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

Dạng toán 3: Xét tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

- Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số lượng giác. Nếu $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ thì D là tập đối xứng, chuyển sang bước 2
- Bước 2: Tính $f(-x)$, nghĩa là thay x bằng $-x$. Nếu $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm chẵn. Nếu $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm lẻ.

Lưu ý:

- Nếu D không đối xứng thì hàm số không chẵn không lẻ
- Nếu $f(-x) \neq f(x)$ hoặc $-f(x)$ thì $f(x)$ không chẵn không lẻ
- $\cos(-a) = \cos a, \sin(-a) = -\sin a, \tan(-a) = -\tan a, \cot(-a) = -\cot a$

Bài tập

Câu 5. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$

b) $f(x) = \cos^2 3x + \cos x$

e) $f(x) = \frac{\sin^2 x - \cos 2x}{\sin 3x}$

e) $f(x) = \cos \sqrt{x^2 - 16}$

e) $f(x) = \tan x + \cot x$

e) $f(x) = \cot(4x + 5\pi) \tan(2x - 3\pi)$

e) $y = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| + \left| \sin x + \frac{1}{2} \right|$.

Dạng 4: Tìm chu kì của hàm số lượng giác

Phương pháp giải

- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì $T_o = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ và $\cos(x + k2\pi) = \cos x$
- $\Rightarrow$ Hàm số $y = \sin(ax + b), y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_o = \frac{2\pi}{|a|}$
- Hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_o = \pi$.
- $\Rightarrow$ Hàm số $y = \tan(ax + b), y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kì $T_o = \frac{\pi}{|a|}$

Lưu ý: Hàm số $g(x), h(x)$ tuần hoàn với chu kì T_1, T_2 thì hàm $f(x) = g(x) + h(x)$ tuần hoàn với chu kì T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2

Bài tập

Câu 6. Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x$

b) $y = \tan 2x$

c) $y = 3 \sin \frac{x}{2}$

d) $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2}$

BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. LÝ THUYẾT VÀ VÍ DỤ

Phương trình lượng giác cơ bản

$$\begin{aligned} \sin a = \sin b &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi \end{cases} \\ \cos a = \cos b &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi \end{cases} \\ \tan a = \tan b &\Leftrightarrow a = b + k\pi \\ \cot a = \cot b &\Leftrightarrow a = b + k\pi \end{aligned}$$

Trường hợp đặc biệt và lưu ý

Trường hợp đặc biệt

$$\begin{aligned} \bullet \quad &\begin{cases} +\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ +\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ +\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \\ \bullet \quad &\begin{cases} \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Lưu ý

- Nếu đề bài cho dạng độ (α°) thì ta chuyển $k2\pi \rightarrow 360^\circ, k\pi \rightarrow 180^\circ$
- Nếu $\alpha \in [-1; 1], k \in \mathbb{Z}$ không là cung góc đặt biệt thì:

$$\begin{aligned} \sin x = \alpha &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin \alpha + k2\pi \end{cases} \\ \cos x = \alpha &\Leftrightarrow x = \pm \arccos \alpha + k2\pi \\ \tan x = \alpha &\Leftrightarrow x = \arctan \alpha + k\pi \\ \cot x = \alpha &\Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \alpha + k\pi \end{aligned}$$

Câu 1. Giải phương trình

a) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

b) $\sin 3x = 0$

c) $2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$

d) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giải phương trình

a) $2 \cos 2x = -\sqrt{2}$

b) $2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} = 0$

c) $2 \cos \left(3x + 15^\circ \right) - \sqrt{3} = 0.$

d) $\cos 3x = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Giải phương trình

a) $\tan\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

c) $\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

d) $\cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. BÀI TẬP

Câu 4. Giải các phương trình lượng giác sau

a) $2 \sin\left(x - 20^\circ\right) - \sqrt{3} = 0$

b) $\sin 3x = -1$.

c) $2 \sin x - 1 = 0$

d) $\sin 3x = 0$

e) $2 \cos x + 1 = 0$

f) $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

g) $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

h) $\cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 5. Giải các phương trình lượng giác sau (phương trình tích)

a) $(\sqrt{3} \tan x + 3)(2 \cos 2x + 1) = 0$.

b) $(\sqrt{2} \sin 2x + 2)(2 \cos x + \sqrt{2}) = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) $(\sin x + 1)(2 \cos 2x - \sqrt{2}) = 0$

c) $(2 \sin x - 1)(\sqrt{3} \cos x - 5) = 0$

c) $2 \sin x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$

c) $\sin 4x + \sqrt{3} \sin 2x = 0$

c) $\sin x - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} = 0$

c) $\sin x + \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} = 0$

Câu 6. Giải các phương trình lượng giác sau (phương trình đưa về phương trình tích)

a) $\sin 3x \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$

c) $\sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{4}$

b) $\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x + \frac{1}{8} = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 7. Giải các phương trình lượng giác sau (áp dụng cung liên kết)

a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) = 0$

c) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x$

b) $\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}\end{aligned}$$

Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned}\cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} \cdot [\sin(a-b) + \sin(a+b)]\end{aligned}$$

Công thức hạ bậc

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\end{aligned}$$

Câu 9. Giải phương trình

a) $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0$

b) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 10. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 7x + \sin 4x + \sin x = 0$

b) $\sin x - 4 \cos x + \sin 3x = 0$

c) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$

d) $\sin x - 4 \cos x + \sin 3x = 0$

e) $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$

f) $\cos 3x + 2 \sin 2x - \cos x = 0$

g) $\cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0$

h) $1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x = 0$

i) $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$

j) $\sin 3x + \cos 2x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x - 2 \sin 2x - \cos x - \sin x = 1$

l) $4 \sin 3x + \sin 5x = 2 \sin x \cos 2x$

Câu 11. Giải phương trình

a) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$

b) $\sin 4x \sin 2x + \sin 9x \sin 3x = \cos^2 x$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 12. Giải phương trình

a) $\sin^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$

b) $\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$
- b) $4 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$
- c) $\cos 8x \cos 5x = \cos 7x \cos 4x$
- d) $\cos x \cos 5x = \cos 2x \cos 4x$
- e) $\sin 7x \cos x = \sin 5x \cos 3x$
- f) $\cos 5x \sin 4x = \cos 3x \sin 2x$

Câu 14. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin^2 \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$
- b) $\cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$
- c) $\sin^2 \left(3x + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin^2 \left(\frac{7\pi}{4} - x \right)$
- d) $\sin^2 \left(3x + \frac{2\pi}{5} \right) - \cos^2 \left(\frac{x}{4} - \pi \right) = 0$
- e) $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$
- f) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

Dạng toán 1. Phương trình bậc hai và bậc cao theo một hàm lượng giác

Phương pháp giải

$$+ a \sin^2 u + b \sin u + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sin u$$

$$\text{Điều kiện: } -1 \leq t \leq 1$$

$$(1) \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$$

$$+ a \tan^2 u + b \tan u + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \cos u \neq 0. \text{ Đặt } t = \tan u,$$

$$(1) \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$$

$$+ a \cos^2 u + b \cos u + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \cos u$$

$$\text{Điều kiện: } -1 \leq t \leq 1$$

$$(1) \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$$

$$+ a \cot^2 u + b \cot u + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \sin u \neq 0$$

$$\text{Đặt } t = \cot u,$$

$$(1) \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$$

Nhóm 1: Phương trình bậc hai cơ bản

Câu 1. Giải các phương trình sau

a) $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$

c) $3 \cot^2 x + 3 \cot x - 2 = 0$

b) $3 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$

d) $3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giải các phương trình sau

a) $\tan^3 x - 3 \tan^2 x - 2 \tan x + 4 = 0$

b) $4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x - 3 \sin x = 3$

Câu 3. Giải các phương trình sau

a) $2 \cos^2 x + (\sqrt{2} - 2) \cos x - \sqrt{2} = 0$

b) $-2 \sin^3 x + \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$

c) $6 - 4 \cos^2 x - 9 \sin x = 0$

d) $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7$

e) $\cos 2x + 3 \cos x + 2 = 0$

f) $4 \cos 2x = 5 \sin x + 1$

g) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

h) $3 \cot^2 x + 2\sqrt{3} \cot x + 1 = 0$

i) $4 \sin x + 3 = 2(1 - \sin x) \tan^2 x$

j) $\cos 2x - 4 \cos x + \frac{5}{2} = 0$

k) $2 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x - 2 = 0$

l) $6 \sin^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$

m) $\tan^2 3x + (1 - \sqrt{3}) \tan 3x - \sqrt{3} = 0$

n) $4 \cos^2 \frac{x}{2} - 2(\sqrt{2} + 1) \cos \frac{x}{2} + \sqrt{2} = 0$

o) $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 5 = 0$

p) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

q) $\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + 1 = 0$

r) $4 \cot^2 \frac{x}{3} - 2(\sqrt{3} - 1) \cot \frac{x}{3} - \sqrt{3} = 0$

s) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} - 2 = 0$

t) $2 \tan^2 x + 3 \tan x + 1 = 0$

Nhóm 2: Sử dụng công thức : $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$

Câu 4. Giải các phương trình sau

a) $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 2 = 0$

b) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$

c) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$

d) $2 \sin^2 x + (\sqrt{3} + 4) \cos x = 2\sqrt{3} + 2$

e) $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x = 7$

f) $3 \sin^2 x + 2 \cos^4 x = 2$

Sử dụng công thức $\cos 2x = \begin{cases} 2 \cos^2 x - 1 & (1) \\ 1 - 2 \sin^2 x & (2) \end{cases}$

khi cung góc gấp đôi nhau.

Câu 5. Giải các phương trình sau

a) $2 \cos 2x - 8 \cos x + 5 = 0$.

b) $\cos 2x + 5 \sin x + 2 = 0$

c) $\cos 2x + 9 \cos x + 5 = 0$

d) $\cos 4x + 9 \sin 2x - 8 = 0$

e) $5 \cos x - 2 \sin(x/2) + 7 = 0$

f) $\sin^2 x + \cos 2x + \cos x - 2 = 0$

Câu 6. Giải các phương trình sau

a) $\sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$

b) $2 \cos 2x + 4 \sin x + 1 = 0$

c) $\cos 2x + 9 \cos x + 5 = 0$

d) $\cot^4 x - 4 \cot^2 x + 3 = 0$

e) $\tan^2 x - \frac{4}{\cos x} + 5 = 0$

f) $\tan x - 2 \cot x + 1 = 0$

g) $\tan x + \cot x = 2$

h) $2 \tan x + \cot x - 3 = 0$

i) $\frac{3}{\cos^2 x} = 3 + 2 \tan^2 x$

j) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$

k) $2 \cos 2x - 2(\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} + 2 = 0$

l) $\frac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} = 3 \cot x + \sqrt{3}$

m) $9 + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 13 \cos x$

Câu 7. (VD) Giải các phương trình sau

a) $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$

b) $1 + \cos 4x - 2 \sin^2 x = 0$

c) $\cos 4x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$

d) $8 \cos^2 x - \cos 4x = 7$

e) $6 \cos^2 3x + \cos 12x = 7$

f) $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$

g) $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$

h) $\cos 2x + 2 \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$

i) $5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$

j) $\frac{4}{\cos^2 x} + \tan x = 7$

k) $2 \tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$

l) $4 \cos^2(6x - 2) + 16 \cos^2(1 - 3x) = 13$

m) $\cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 4$

Dạng toán 2. Phương trình lượng giác bậc nhất đối với sin và cos

Dạng tổng quát: $a \sin x + b \cos x = c$ (1) với $a, b, c \in \mathbb{R}$, và $a^2 + b^2 \neq 0$

Điều kiện có nghiệm của phương trình: $a^2 + b^2 \geq c^2$, (kiểm tra trước khi giải)

Phương pháp giải:

- Chia 2 vế $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, thì $(*) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

- Giả sử: $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, (\alpha \in [0; 2\pi])$ thì:

$$(**) \Leftrightarrow \sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} : \text{dạng cơ bản.}$$

Câu 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

c) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$

b) $3 \sin 3x - 4 \cos 3x = 5$

d) $2 \sin x + 2 \cos x - \sqrt{2} = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\sin 4x + \cos 4x = \sqrt{3}$

c) $3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

d) $\cos x + 4 \sin x + 1 = 0$

e) $\cos(2x - 15^\circ) + \sin(2x - 15^\circ) = -1$

f) $5 \cos 2x + 12 \sin 2x = 13$

g) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = -\sqrt{2}$

h) $2 \sin x - 9 \cos x = \sqrt{85}$

i) $2 \cos x - 3 \sin x + 2 = 0$

j) $\sqrt{2} \sin 2x + 3 \cos 2x = 4$

k) $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 1$

l) $2 \sin x + 2 \cos x = \sqrt{2}$

Câu 3. VD Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin \frac{\pi}{12}$

b) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$

d) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 3x$

e) $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

f) $\sqrt{3}(\cos 2x + \sin 3x) = \sin 2x + \cos 3x$

g) $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$

h) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$

i) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$

j) $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$

Dạng toán 3. Phương trình lượng giác đẳng cấp

Dạng tổng quát $a \cdot \sin^2 X + b \cdot \sin X \cos X + c \cdot \cos^2 X = d$ (1)

Nhận dạng Đồng bậc hoặc lệch nhau hai bậc của hàm sin hoặc cos

TH1: Xét $\cos X = 0$ và thay vào phương trình (1)

TH2: Xét $\cos X \neq 0$, chia hai vế của (1) cho $\cos^2 X$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow a \frac{\sin^2 X}{\cos^2 X} + b \frac{\sin X \cos X}{\cos^2 X} + c \frac{\cos^2 X}{\cos^2 X} = \frac{d}{\cos^2 X}$$

Giải phương trình bậc hai theo $\tan X$.

$$\Leftrightarrow a \tan^2 X + b \tan X + c = d(1 + \tan^2 X)$$

Câu 1. Giải các phương trình sau:

a) $2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x = 1$

b) $2 \cos^2 x - 3\sqrt{3} \sin 2x - 4 \sin^2 x = -4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Giải các phương trình sau:

- a) $4 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x - \sin^2 x = 3$
- b) $2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$
- c) $\sin^2 x + 2 \cos^2 x = 3 \sin x \cos x$
- d) $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x = -1$
- e) $2 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$
- f) $\sin^2 x + \sin 2x - 2 \cos^2 x = \frac{1}{2}$
- g) $\sin^2 x - 10 \sin x \cos x + 21 \cos^2 x = 0$
- h) $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x - \sin^2 x = 1$
- i) $3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x - 1 = 0$
- j) $3 \cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 1$
- k) $\sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x - 1 = 0$
- l) $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 2$
- m) $2 \cos^2 x + \sin 2x - 4 \sin^2 x = -4$

n) $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$

o) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$

p) $3 \cos^2 x + \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 2$

q) $\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x - \sqrt{3} \sin^2 x = 1$

r) $2 \cos^2 x + 3 \sin 2x - 8 \sin^2 x = 0$

Câu 3. (VD) Giải các phương trình sau:

a) $\cos^3 x + 2 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x = 0$

b) $3 \cos^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$

c) $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x + \cos x$

d) $3 \cos^4 x - 4 \cos^2 x \sin^2 x - \sin^4 x = 0$

e) $2\sqrt{2} \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 3 \cos x - \sin x = 0$

f) $\sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - 3 \cos^3 x = 0$

g) $\sin x - 4 \sin^3 x + \cos x = 0$

Dạng toán 4. Phương trình đối xứng

Phương trình có dạng: $a \cdot (\sin x \pm \cos x) + b \cdot \sin x \cos x + c = 0$

Phương pháp giải

Đặt $t = \sin x \pm \cos x, t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow t^2 = \dots$ và viết $\sin x \cos x$ theo t .

Lưu ý, khi đặt $t = |\sin x \pm \cos x|$ thì điều kiện là: $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Câu 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x - \cos x + 2 \sin 2x + 1 = 0$

b) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$

Câu 5. Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - \sin x \cos x = 1$

b) $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 5$

c) $5 \sin 2x + 12 = 12(\sin x - \cos x)$

d) $\sin x \cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$

e) $\cos x \sin x + |\cos x + \sin x| = 1$

f) $|\cos x - \sin x| + 3 \sin 2x = 1$

g) $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1 = \sin x \cos x$

h) $4 \sin x \cos x + 1 = \cos x - \sin x$

i) $|\cos x - \sin x| + 6 \sin x \cos x = 1$

j) $\cos x \sin x + |\cos x + \sin x| = 1$

k) $(\cos x - \sin x) + 2 \sin 2x - 1 = 0$

l) $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$

m) $(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = \cos 2x$

Chương 2

CHƯƠNG 2: TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

BÀI 1. CÁC QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

1. Lý thuyết và bài tập minh hoạ

Quy tắc cộng

Giả sử đối tượng X có m cách chọn khác nhau, đối tượng Y có n cách chọn khác nhau và không trùng nhau. Khi đó có $m + n$ cách chọn một trong hai đối tượng ấy.

Theo quy tắc cộng có: $(m_1 + m_2 + m_x + \dots + m_k)$ cách

Câu 1. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc cỡ 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu áo và cỡ áo)?

- A. 9.
- B. 5.
- C. 4.
- D. 1.

Câu 2. Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau. Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn khác nhau là:

- A. 13.
- B. 72 .
- C. 12.
- D. 30.

Câu 3. Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là

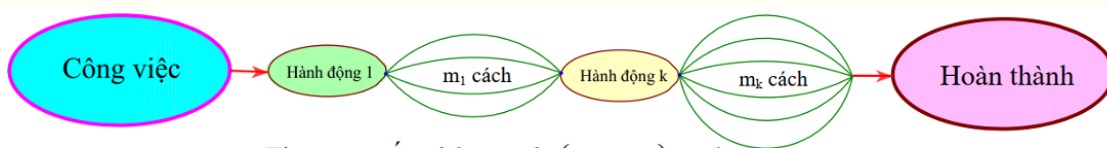
Câu 4. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ. Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

Câu 5. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp 11A hoặc lớp 12 . B Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến?

Câu 6. Trong một hộp chứa sáu quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 6 và ba quả cầu đen được đánh số 7, 8, 9. Có bao nhiêu cách chọn một trong các quả cầu ấy?

Quy tắc nhân

Giả sử có hai hành động được thực hiện liên tiếp. Hành động thứ nhất có m kết quả, hành động thứ hai có n kết quả. Khi đó có $m \times n$ kết quả của hai hành động liên tiếp đó



Theo quy tắc nhân ta có: $(m_1 \times m_k)$ cách

Câu 7. Có 3 kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn, elip) và 4 kiểu dây (kim loại, da, vải và nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

Câu 8. Một người có 4 cái quần, 6 cái áo, 3 chiếc cà vạt. Để chọn mỗi thứ một món thì có bao nhiêu cách chọn bộ " quần-áo-cà vạt " khác nhau?

Câu 9. Một bó hoa có 5 hoa hồng trắng, 6 hoa hồng đỏ và 7 hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu.

.....

Bài toán đếm số phương án liên quan đến số tự nhiên

Khi lập một số tự nhiên $x = \overline{a_1 \dots a_n}$ ta cần lưu ý:

$a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ và $a_1 \neq 0$

x là số chẵn $\Leftrightarrow a_n$ là số chẵn

x là số lẻ $\Leftrightarrow a_n$ là số lẻ

x chia hết cho 3 $\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n$ chia hết cho 3

x chia hết cho 5 $\Leftrightarrow a_n \in \{0; 5\}$

Câu 10. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số được lập từ X sao cho:

- a) Khác nhau từng đôi một
 b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ
 c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn

.....

Câu 11. Cho tập hợp $X = \{0; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho:

- a) Khác nhau từng đôi một.
 b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ.
 c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn.

.....

2. Bài tập

Câu 12. Bạn cần mua một áo sơ mi cỡ 30 hoặc 32. Áo cỡ 30 có 3 màu khác nhau, áo cỡ 32 có 4 màu khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu cách lựa chọn ?

Câu 13. Có 10 cuốn sách Toán khác nhau, 11 cuốn sách Văn khác nhau và 7 cuốn sách Anh văn khác nhau. Một học sinh được chọn một quyển sách trong các quyển sách trên. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn.

Câu 14. Từ thành phố A đến thành phố B có 6 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 7 con đường. Có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố C, biết phải đi qua thành phố B.

Câu 15. Từ thành phố A có 10 con đường đi đến thành phố B, từ thành phố A có 9 con đường đi đến thành phố C, từ B đến D có 6 con đường, từ C đến D có 11 con đường và không có con đường nào nối B với C. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D

Câu 16. Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả tráng miệng trong 5 loại quả tráng miệng và một nước uống trong 3 loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn

Câu 17. Trên giá sách có 10 quyển sách Văn khác nhau, 8 quyển sách Toán khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Có mấy cách chọn hai quyển sách khác môn ?

Câu 18. Có 7 bông hồng đỏ, 8 bông hồng vàng và 10 bông hồng trắng, các bông hồng khác nhau từng đôi một. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 3 bông hồng có đủ ba màu ?

Câu 19. Cho tập hợp $X = \{1; 3; 4; 5; 7; 8\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho:

- a) Khác nhau từng đôi một
- b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ
- c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn
- d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5

Câu 20. Cho tập hợp $X = \{2; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số được lấy từ X sao cho:

- a) Khác nhau từng đôi một
- b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ
- c) Khác nhau từng đôi một và chia hết cho

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho

Câu 21. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số được lấy từ A sao cho:

a) Khác nhau từng đôi một

b) Khác nhau từng đôi một và nó là số lẻ

c) Khác nhau từng đôi một và nó là số chẵn

d) Khác nhau đôi một và chia hết cho 5

Bài toán sử dụng quy tắc bù trừ và các bài toán khác

Câu 22. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$, từ A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có chữ số 0 và 3

Câu 23. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau mà không bắt đầu bởi 12 ?

Câu 24. Hỏi từ 10 chữ số: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau, sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1 ?

Câu 25. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau đôi một được lấy từ tập A và trong đó có chứa chữ số 4 ?

Câu 26. Từ các chữ số: 0; 1; 2; 3; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm có sáu chữ số đôi một khác nhau, trong đó phải có mặt chữ số 7.

Câu 27. Có 20 thẻ đựng trong hai hộp khác nhau, mỗi hộp chứa 10 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 10. Có bao nhiêu cách chọn hai thẻ (mỗi hộp một thẻ) sao cho tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn

BÀI 2. HOÁN VỊ- CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

1. Lý thuyết và ví dụ

Hoán vị

- $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$ (đọc là n giai thừa)
- Sắp xếp n phần tử theo một hàng, ta có $n!$ cách xếp.
- Sắp xếp n phần tử theo một vòng tròn (bàn tròn) có $(n-1)!$ cách xếp

Câu 1. Trên một kệ sách dài có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lí, 3 quyển sách Văn. Các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các quyển sách trên nếu

a) Xếp một cách tùy ý

c) Theo từng môn và sách Toán nằm ở giữa

b) Xếp Theo từng môn

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Một trường THPT có 4 học sinh giỏi khối 12, có 5 học sinh giỏi khối 11, có 6 học sinh giỏi khối 10. Có bao nhiêu cách xếp 20 học sinh trên thành 1 hàng ngang nhận thưởng nếu:

a) Những học sinh đứng tùy ý.

c) Cùng khối đứng cạnh và khối 11 ở giữa

b) Các học sinh cùng khối đứng cạnh nhau

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Có hai dãy ghế, mỗi dãy 5 ghế. Xếp 5 nam, 5 nữ vào hai dãy ghế trên, có bao nhiêu cách xếp nếu:

a) Nam, nữ được xếp tùy ý.

b) Nam 1 dãy ghế, nữ 1 dãy ghế

Chỉnh hợp và tổ hợp

- Chọn k phần tử trong n phần tử và sắp xếp $\Rightarrow$ Sử dụng chỉnh hợp $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- Chọn k phần tử trong n phần tử và không sắp xếp $\Rightarrow$ Sử dụng tổ hợp $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Câu 4. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D mà không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng được tạo thành ?

b) Có bao nhiêu vectơ được tạo thành ?

c) Có bao nhiêu tam giác được tạo thành ?

Câu 5. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) Gồm 4 chữ số

b) Gồm 3 chữ số đôi một khác nhau

c) Gồm 4 chữ số khác nhau và là số chẵn

Câu 6. Cho $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số được tạo từ tập X , sao cho:

- a) Khác nhau đôi một và số đó là số lẻ ?
- b) Khác nhau đôi một và là số chẵn
- c) Khác nhau và luôn có mặt 1, 2, 3

2. Bài tập

Câu 7. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn một ban cán sự lớp gồm 4 em. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

- a) Gồm 4 học sinh tùy ý
- b) Có 1 nam và 3 nữ
- c) Có 2 nam và 2 nữ
- d) Có ít nhất 1 nam

Câu 8. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn một bó hoa sao cho:

- a) Có đúng 1 bông hồng đỏ.
- b) Có ít nhất 3 bông vàng và ít nhất 3 đỏ.

Câu 9. Xếp 5 học sinh A, B, C, D, E vào một ghế dài, có mấy cách sắp xếp nếu:

- a) 5 học sinh này ngồi bất kì
- b) A và E luôn ngồi ở hai đầu ghế

- c) A và E luôn ngồi cạnh nhau
- d) A, B, C luôn ngồi cạnh nhau
- e) A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau

Câu 10. Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F, vào một ghế dài, có mấy cách sắp xếp nếu:

- a) 6 học sinh này ngồi bất kì
- b) A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế
- c) A và F luôn ngồi cạnh nhau
- d) A, B, C luôn ngồi cạnh nhau
- e) A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau

Câu 11. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi

- a) Có tất cả bao nhiêu số ?
- b) Có bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ ?
- c) Có bao nhiêu số bé hơn 432000 ?

Câu 12. Xét các số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số

a) Bắt đầu bằng chữ số 5 ?

b) Không bắt đầu bằng chữ số 1 ?

Câu 13. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 thiết lập tất cả các số có sáu chữ số khác nhau. Hỏi trong các số đã thiết lập được, có bao nhiêu số mà hai chữ số 1 và 6 không đứng cạnh nhau ?

Câu 14. Từ tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, lập được bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5, gồm năm chữ số khác nhau sao cho trong đó luôn có mặt các chữ số 1, 2, 3 và chúng đứng cạnh nhau ?

Câu 15. Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4; 7\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau chia hết cho 3 được lập từ tập X ?

Câu 16. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh để trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, nếu:

a) 5 học sinh được chọn tùy ý.

b) Có 3 nam và 2 nữ

c) Có không quá 3 nữ

d) Có ít nhất 1 nữ

Câu 17. Trong một hộp có 18 bi, trong đó có 9 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 4 bi vàng có kích thước đôi một khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn ra 6 viên bi sao cho những viên bi được chọn thỏa mãn:

a) Có đúng 2 viên bi màu đỏ ?

b) Số bi xanh bằng số bi đỏ ?

Câu 18. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp

C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy ?

Câu 19. Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách bầu sao cho trong 4 người được bầu nhất thiết phải có nữ ?

Câu 20. Lớp có 50 học sinh được chia thành 5 tổ, mỗi tổ có 10 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chia tổ ?

Câu 21. Một tổ có 8 học sinh đi trồng cây. Khi trồng cây cần có 2 em học sinh. Có bao nhiêu cách chia tổ thành những cặp như vậy ?

Câu 22. Trong một hộp có 100 viên bi được đánh số từ 1 đến 100. Có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên bi sao cho tổng ba số trên 3 bi chia hết cho 2

Câu 23. Cho hai đường thẳng $a//b$. Trên đường thẳng a có 5 điểm phân biệt và trên đường thẳng b có 10 điểm phân biệt. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu tam giác có các đỉnh là các điểm trên hai đường thẳng a và b đã cho ?

Câu 24. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên d_1 lấy 17 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên d_1 và d_2 đã cho ?

Câu 25. Trong một hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40. Có bao nhiêu cách chọn 3 tấm thẻ trong hộp sao cho tổng ba số trên 3 thẻ chia hết cho 3.

Câu 26. Trong ngân hàng đề kiểm tra 30 phút môn Vật Lí có 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 bài tập. Người ta cấu tạo thành các

đề thi. Biết rằng trong mỗi đề thi phải gồm 3 câu hỏi, trong đó nhất thiết phải có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 bài tập. Hỏi có thể tạo ra bao nhiêu đề thi có dạng như trên ?

Câu 27. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2

Câu 28. Giải phương trình

a) $P_2 \cdot x^2 - P_3x = 8$

b) $\frac{P_x - P_{x-1}}{P_{x+1}} = \frac{1}{6}$

c) $\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 3$

d) $\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 3$

e) $A_n^3 = 20n$

f) $A_n^3 + 2C_n^2 = 16n$

g) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$

h) $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$

i) $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$

BÀI 3. NHỊ THỨC NEWTON

1. Lý thuyết

Nhị thức Newton

Cho a, b là các số thực và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

Nhận xét:

- Trong khai triển $(a \pm b)^n$ có $n + 1$ số hạng và các hệ số của các cặp số hạng cách đều số hạng đầu và số hạng cuối thì bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}$.
- Số hạng tổng quát dạng: $T_{n+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} b^k$ và số hạng thứ N thì $k = N - 1$.
- Trong khai triển $(a - b)^n$ thì dấu đan nhau, nghĩa là $+$, rồi $-$, rồi $+$, $\dots$.
- Số mũ của a giảm dần, số mũ của b tăng dần nhưng tổng số mũ a và b bằng n .

Câu 1. Khai triển các nhị thức sau

a) $(x + 2)^4$

b) $(x + 2y)^5$

c) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

d) $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$

Tam giác Pascal

Các hệ số của khai triển $(a + b)^0, (a + b)^1, (a + b)^2, \dots, (a + b)^n$ có thể xếp thành một tam giác gọi là tam giác *PASCAL*.

Hàng đẳng thức $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$

2. Các dạng toán

Tìm hệ số hoặc số hạng trong khai triển nhị thức Newton

Cần nhớ: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} \cdot b^k$ và $x^n \cdot x^m = x^{m+n}$, $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$, $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$, $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

Câu 2. Tìm số hạng thoả yêu cầu trong khai triển

- a) Chứa x^{16} trong khai triển nhị thức $(x^2 - 2x)^{10}$
- b) Chứa x^6 trong khai triển nhị thức $(1 - 3x)^{11}$
- c) Chứa x^6y^7 trong khai triển nhị thức $(2x + y)^{13}$
- d) Chứa $x^{25}y^{10}$ trong khai triển nhị thức $(x^3 - xy)^{15}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^5, \forall x \neq 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right)^{12}, \forall x \neq 0$

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5. Tìm số hạng chứa x^{15} trong khai triển nhị thức $(3x - x^2)^{12}$

Câu 6. Tìm số hạng chứa x^8y^9 trong khai triển nhị thức $(2x - 3y)^{17}$

Câu 7. Tìm số hạng chứa x^6 trong khai triển nhị thức $(1 - 3x)^{11}$

Câu 8. Tìm số hạng chứa x^6 trong khai triển nhị thức $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^{10}$

Câu 9. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^7$

Câu 10. Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức $\left(3x^3 - \frac{2}{x}\right)^5$

Câu 11. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}, \forall x \neq 0$.

Câu 12. Tìm số hạng không chứa x (độc lập với x) trong khai triển $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6, \forall x \neq 0$

Bài tập nâng cao

Câu 13. Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển nhị thức $(1 + x + 3x^2)^{10}$

Câu 14. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{17} trong khai triển nhị thức $(1 + x + 2x^2)^{10}$

Câu 15. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$ biết $C_n^1 + C_n^2 = 55$

Câu 16. Tìm số hạng chứa x^{10} trong khai triển $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^n$, biết $C_n^4 = 13C_n^2$

Câu 17. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$ biết $C_n^1 + C_n^2 = 55$

Câu 18. Tìm hệ số của x^{20} trong khai triển $\left(x^4 - \frac{1}{2}\right)^n$, biết $A_n^2 + 3n = 440$.

BÀI 4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Trong thực tiễn, chúng ta thường gặp những hiện tượng ngẫu nhiên. Đó là những hiện tượng (biến cố) mà chúng ta không thể dự báo một cách chắc chắn là nó xảy ra hay không xảy ra.

Lý thuyết xác suất là bộ môn toán học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên. Sự ra đời của lý thuyết xác suất bắt đầu từ những thư từ trao đổi giữa hai nhà toán học vĩ đại người Pháp là Pascal (1623 – 1662) và Phéc – ma (1601 – 1665) xung quanh các giải đáp một số vấn đề rắc rối nảy sinh trong quá trình trò chơi cờ bạc của một nhà quý tộc Pháp đặt ra cho Pascal. Năm 1812, nhà toán học Pháp La – pha – xơ đã dự báo rằng: “Môn khoa học bắt đầu từ việc xem xét các trò chơi may rủi này sẽ hứa hẹn trở thành một đối tượng quan trọng nhất của tri thức loài người”.

Này nay, lý thuyết xác suất đã trở thành một ngành toán học quan trọng, được ứng dụng trong rất nhiều lĩnh vực của khoa học tự nhiên, khoa học xã hội, công nghệ, kinh tế, y tế, sinh học,.....

1. Lý thuyết

a. Biến cố

a) Phép thử và không gian mẫu

- Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà:
- + Kết quả của nó không đoán trước được.
- + Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.
- Tập hợp mọi kết quả của một phép thử T được gọi là không gian mẫu của T và được kí hiệu là Ω .
- Số phần tử của không gian mẫu được kí hiệu là $n(\Omega)$.

Câu 1. Phép thử “Gieo 1 con súc sắc” có không gian mẫu là :

.....

Câu 2. Xét phép thử: “Gieo hai đồng xu phân biệt”. Nếu kí hiệu S để chỉ đồng xu “sấp”, kí hiệu N để chỉ đồng xu “ngửa” thì không gian mẫu của phép thử trên là:

.....

Câu 3. Xét phép thử T là: “Gieo ba đồng xu phân biệt”. Hãy cho biết không gian mẫu và số phần tử của không gian mẫu đó ?

.....

b) Biến cố

Biến cố là một kết quả thuận lợi của không gian mẫu

Câu 4. Xét phép thử T : "Gieo một con súc sắc" có không gian mẫu là $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Xét biến cố A : "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn". Biến cố A xảy ra khi kết quả của phép thử T là:

.....
Biến cố B : "Số chấm trên mặt xuất hiện là một số lẻ"

.....
Biến cố C : "Số chấm xuất hiện trên mặt là nguyên tố"

b. Xác suất

Xác suất

Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng.

Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là một tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì xác suất của A là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức: $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

Từ định nghĩa, suy ra: $0 \leq P(A) \leq 1, P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$.

Câu 5. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất các biến cố sau:

A : "Mặt lẻ xuất hiện".

C : "Mặt xuất hiện có số chấm lớn hơn 2".

B : "Xuất hiện mặt có số chấm chia hết cho 3".

Câu 6. Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất của biến cố:

a) Số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là giống nhau.

d) Tổng số chấm trong hai lần gieo bằng 7

b) Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần.

e) Tổng số chấm trong hai lần gieo chia hết cho 5.

c) Tổng số chấm trong hai lần gieo không bé hơn

10.

.....

.....

.....

.....

2. Bài tập

Dạng toán 1. Xác suất liên quan đến sắp xếp hoặc chọn đồ vật

Câu 7. Từ hộp chứa 4 quả cầu trắng, 6 quả cầu xanh kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để 3 quả cầu lấy được có đúng 1 màu ?

.....

.....

.....

Câu 8. Một bể cá gồm có 5 chú cá bảy màu và 7 chú cá vàng. Một người vớt ngẫu nhiên 4 chú cá từ bể cá trên. Tính xác suất để vớt được 2 chú cá bảy màu và 2 chú cá vàng ?

.....

.....

.....

Câu 9. Một hộp đựng 11 viên bi được đánh số từ 1 đến 11. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp, rồi cộng các số trên các bi lại. Tính xác suất để kết quả thu được là 1 số lẻ.

.....

.....

.....

Câu 10. Trong một hộp đựng 8 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp trên. Tính xác suất để 4 viên bi được lấy ra có cả bi xanh và bi đỏ ?

.....

.....

.....

Câu 11. Từ hộp chứa 5 quả cầu trắng, 4 quả cầu xanh kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để 3 quả cầu lấy được có đúng 1 màu ?

Câu 12. Một hộp chứa 15 quả cầu xanh và 5 quả cầu đỏ. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp trên. Tính xác suất để chọn được 2 quả cầu khác màu

Câu 13. Một hộp chứa 12 quả cầu, trong đó có 7 quả cầu đỏ, 5 quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 quả cầu. Tính xác suất để lấy được ít nhất 2 quả cầu đỏ.

Câu 14. Một hộp có 7 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi (không kể thứ tự ra khỏi hộp). Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi đỏ

Câu 15. Một hộp đựng 5 bi đỏ, 6 bi xanh và 7 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để 6 bi được chọn có cùng màu.

Câu 16. Trong chiếc hộp có 6 bi đỏ, 5 bi vàng và 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 4 viên bi. Tính xác suất để trong 4 viên bi lấy ra không đủ cả ba màu ?

Câu 17. Một hộp đựng 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp. Tính xác suất để trong 5 bi lấy ra có đủ 3 màu và số bi xanh bằng bi đỏ ?

Câu 18. Để kiểm tra chất lượng sản phẩm từ công ty sữa, người ta đã gửi đến bộ phận kiểm nghiệm 5 hộp sữa cam, 4 sữa dâu và 3 sữa nho. Bộ phận kiểm nghiệm lấy ngẫu nhiên 3 hộp sữa để phân tích mẫu. Tính xác suất để 3 hộp được chọn có cả 3 loại

Dạng toán 2. Xác suất liên quan đến sắp xếp hoặc chọn người

Câu 19. Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ ?

.....

Câu 20. Một tổ có 11 học sinh, trong đó có 5 nam và 6 nữ. Giáo viên chọn 5 học sinh làm trực tuần. Tính xác suất để chọn được nhiều nhất 2 học sinh nam ?

.....

Câu 21. Một lớp học có 15 nam và 10 nữ để tham gia đồng diễn. Cần chọn ra 5 học sinh. Tính xác suất học sinh được chọn có cả nam lẫn nữ và số nữ ít hơn số nam ?

Câu 22. Một đội văn nghệ có 15 người gồm 9 nam và 6 nữ. Chọn ngẫu nhiên 8 người đi hát đồng ca. Tính xác suất để trong 8 người được chọn có số nữ nhiều hơn số nam ?

Câu 23. Một tổ có 11 học sinh, trong đó có 5 nam và 6 nữ. Giáo viên chọn 5 học sinh làm trực tuần. Tính xác suất để chọn được nhiều nhất 2 học sinh nam ?

Câu 24. Chuẩn bị chào mừng ngày nhà giáo Việt Nam 20/11, đội văn nghệ của trường THPT X gồm 9 học sinh, trong đó có 3 học sinh nữ chia thành 3 tổ đều nhau (mỗi tổ 3 học sinh) để làm công tác biểu diễn văn nghệ. Tính xác suất để mỗi tổ có đúng 1 nữ ?

Câu 25. (VD) Trong một giải cầu lông có 8 người tham gia, trong đó có 2 bạn tên Việt và Nam. Các vận động viên được chia làm hai bảng A và B, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng là ngẫu nhiên. Tính xác suất để cả hai bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đấu ?

Câu 26. (VD) Trong giải bóng truyền VTV Cup gồm 12 đội bóng tham dự, trong đó có 9 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm để chia thành 3 bảng đấu A, B, C mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 3 đội

bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau ?

Câu 27. Có 12 quyển sách, trong đó 3 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lí, 3 quyển sách Hóa và 3 quyển sách Sinh xếp thành 1 dãy. Tính xác suất để 3 quyển thuộc cùng 1 môn không xếp liền nhau

Câu 28. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

Câu 29. Trong một buổi liên hoan có 10 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 3 người để biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.

Câu 30. Một lớp 40 học sinh trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh để làm cán sự lớp. Tính xác suất để 3 học sinh làm cán sự lớp mà không có cặp anh em sinh đôi nào.

Dạng toán 3. Xác suất liên quan đến sắp xếp hoặc chọn số

Câu 31. Một chiếc hộp gồm có 9 thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 9. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ trong hộp. Tính xác suất để 2 thẻ lấy được có tích của nó là số chẵn

.....

Câu 32. Một hộp chứa 18 thẻ được đánh số từ 1 đến 18. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ trong hộp. Tính xác suất để 2 thẻ lấy được tích của nó là số chẵn ?

.....

Câu 33. Cho 100 tấm thẻ được đánh số liên tiếp từ 1 đến 100, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên 3 thẻ được chọn là một số chia hết cho 2

Câu 34. Trong hộp có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40, chọn ngẫu nhiên 3 thẻ trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 thẻ lấy được là một số chia hết cho 3

Dạng toán 4. Xác suất liên quan đến hình học

Câu 36. Đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O .

- Số cạnh được tạo thành từ $2n$ đỉnh là bao nhiêu ?
- Số tam giác được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác đều bằng bao nhiêu ?
- Có bao nhiêu đường chéo được tạo thành ?
- Có bao nhiêu đường chéo đi qua tâm O ?
- Số hình chữ nhật được tạo thành ?
- Số hình vuông được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác bằng bao nhiêu ?
- Số tam giác vuông được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác bằng bao nhiêu ?
- Số tam giác cân tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác bằng bao nhiêu ?
- Có bao nhiêu tam giác vuông mà không cân được tạo từ $2n$ đỉnh của đa giác ?
- Đa giác đều có $3n$ đỉnh ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$) sẽ có bao nhiêu tam giác đều được tạo thành ?
- Đa giác đều có $3n$ đỉnh sẽ có bao nhiêu tam giác cân mà không đều ?

Câu 35. Trong hộp có 50 viên bi được đánh số từ 1 đến 50, chọn ngẫu nhiên 3 viên bi trong hộp. Tính xác suất để tổng 3 số trên 3 viên bi được chọn là một số chia hết cho 3

Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 16]$. Tính xác suất để ba số được viết ra có tổng chia hết cho 3.

Câu 37. Cho hai đường thẳng song song a và b . Trên đường thẳng a lấy 6 điểm phân biệt; trên đường thẳng b lấy 5 điểm phân biệt. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm trong các điểm đã cho trên hai đường thẳng a và b . Tính xác suất để 3 điểm được chọn tạo thành một tam giác

Câu 38. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên d_1 có 6 điểm phân biệt được tô màu đỏ. Trên d_2 có 4 điểm phân biệt được tô màu xanh. Xét tất cả các tam giác được tạo thành khi nối các điểm đó với nhau. Chọn ngẫu nhiên một tam giác, tính xác suất để thu được tam giác có hai đỉnh màu đỏ.

Câu 39. Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 2cm, 4cm, 6cm, 8cm và 10cm. Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng trên, tính xác suất để 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành một tam giác.

Câu 40. Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm. Lấy ngẫu nhiên ra 3 đoạn thẳng, tính xác suất để 3 đoạn thẳng được chọn ra là độ dài ba cạnh của 1 tam giác.

Câu 41. Cho đa giác đều 20 đỉnh. Trong các tứ giác có bốn đỉnh là đỉnh của đa giác, chọn ngẫu nhiên một tứ giác. Tính xác suất để tứ giác được chọn là hình chữ nhật.

Chương 3

CHƯƠNG 3: DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

BÀI 1. PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

1. Lý thuyết

Bài toán. Chứng minh mệnh đề chứa biến đúng với mọi số nguyên dương n .

Phương pháp

- Bước 1. Với $n = 1$, ta chứng minh $P(1)$ đúng.
- Bước 2. Giả sử $P(n)$ đúng với $n = k + 1$

Ta phải chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k + 1$.

Kết luận: mệnh đề $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n .

2. Bài tập

Câu 1. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1.4 + 2.7 + \cdots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2 (*)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, thì $u_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6

Câu 3. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Câu 4. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Câu 5. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$

Câu 6. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Câu 7. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

Câu 8. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Câu 9. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_n = 2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6

Câu 10. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_n = 4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

Câu 11. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $u_n = 4^n + 6n + 8$ chia hết cho 8.

BÀI 2. DÃY SỐ

1. Lý thuyết

Cách cho một dãy số

Cách 1: Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát

Cho dãy (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$

Dãy số được viết dưới dạng khai triển là:

$u_{50} = \dots\dots\dots$

$u_{99} = \dots\dots\dots$

Cách 2: Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (hay quy nạp):

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).
- Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó).

Câu 1. Cho dãy số u_n được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2) \end{cases}$, tính u_3, u_4

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho dãy số u_n xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases}$, tính: u_5, u_7

.....

.....

.....

.....

.....

2. Các dạng bài tập

Dạng toán 1. Xét tính tăng giảm của dãy số

Phương pháp 1. Xét dấu của hiệu $u_{n+1} - u_n$ (sử dụng khi đề cho đa thức)

- Nếu $u_{n+1} - u_n > 0$ thì (u_n) là dãy số tăng
- Nếu $u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Phương pháp 2. Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ thì so sánh tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với số 1 (sử dụng khi có a^n)

- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Câu 3. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

Câu 4. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

Câu 5. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$

Câu 6. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$

Câu 7. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$

Câu 8. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

Câu 9. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = \frac{n+1}{3^n}$

Câu 10. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = \frac{3^n}{n^2}$

Câu 11. Xét tính tăng giảm của dãy số $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

Dạng toán 2. Tìm công thức tổng quát và dãy số bị chặn

- Dãy số bị chặn trên: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq M$.
- Dãy số bị chặn dưới: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq m$.
- Dãy số bị chặn: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới. Nghĩa là tồn tại một số M và một số m sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*, m \leq u_n \leq M$.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ với $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$.

a) Xác định u_1, u_2, u_3, u_4 .

c) Xét tính bị chặn của u_n

b) Xác định công thức tổng quát của u_n

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 13. Cho dãy số (u_n) và đặt $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$, với $a_k = \frac{1}{k(k+4)}$

a) Xác định u_1, u_2, u_3, u_4 .

c) Xét tính bị chặn của u_n

b) Xác định công thức tổng quát của u_n

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 14. Tìm 5 số hạng đầu và công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 3. CẤP SỐ CỘNG

A. Lý thuyết

Lý thuyết

1. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Để chứng minh một dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét hiệu $u_{n+1} - u_n = d, \forall n \in \mathbb{N}^*$

2. Tính chất

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$$

3. Hệ quả:

Ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

4. Số hạng tổng quát của cấp số cộng:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

5. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

B. Các dạng toán

Dạng toán 1. Tìm công sai, số hạng thứ n hoặc tính tổng

Câu 1. Tìm số hạng đầu, công sai và tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số (u_n) biết rằng

$$\text{a) } \begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$$

Câu 2. Cho u_n là cấp số cộng thỏa

a) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_2 + u_7 = 17 \end{cases}$, tìm u_1, d, S_{20} .

b) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$, tìm u_1, d, u_{20}, S_{20} .

c) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases}$, tìm u_1, d, S_{20} .

d) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$, tìm u_1, d, S_{10} .

e) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$, tìm u_1, d

f) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$, tìm u_1, d, S_{10} .

g) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$, tìm u_1, d, S_{10} .

h) $\begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases}$, tìm u_1, d, S_{10} .

i) $u_1 = 5, u_{10} = 50$, tìm d và S_{10}

j) $u_1 = 1, u_2 = 5$, tìm S_{10}

k) $u_7 = -2, d = 3$. Tìm u_{33}, S_{33}

l) $u_5 = 19, u_9 = 35, S_n = 666$, tìm u_n

m) $u_1 = 9, u_n = 49, d = 2, 5$, tìm n .

n) $u_5 = 5, u_{10} = 15$. Tìm u_{22} và S_{22} .

o) $u_4 + u_{11} = 20$. Tìm S_{14}

p) $u_3 + u_{13} = 80$, tìm S_{15}

Câu 3. Cho các cấp số cộng (u_n) thỏa

a) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases}$, tìm u_1, d .

b) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$, tìm $u_1, d \in \mathbb{Z}$.

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$, tìm u_1, d .

e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21 \end{cases}$, tìm u_1, d .

h) $\begin{cases} u_5 = 18 \\ 4S_n = S_{2n} \end{cases}$, tìm u_1, d .

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d . Biết rằng $u_3 + u_{13} = 80$. Tính tổng của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d . Biết $u_{2013} + u_6 = 1000$. Tính tổng của 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Dạng toán 2. Tìm những số liên tiếp của cấp số cộng

Câu 6. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Câu 7. Một cấp số cộng có số hạng biết tổng các số hạng bằng 18, tích của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 27. Tìm cấp số cộng đó.

Câu 8. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng giảm, biết tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

Câu 9. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng tăng, biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

Câu 10. Tìm 4 số hạng liên tiếp của cấp số cộng tăng, biết rằng tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương 30.

Câu 11. Tìm 4 số hạng liên tiếp của cấp số cộng giảm, biết rằng tổng của chúng bằng 16 và tổng bình phương bằng 84.

Câu 12. Tìm 4 số hạng liên tiếp của cấp số cộng giảm, biết rằng tổng của chúng bằng 34 và tổng bình phương bằng 414.

Câu 13. Tìm 4 số hạng liên tiếp của cấp số cộng tăng, biết rằng tổng của chúng bằng 20 và tổng bình phương bằng 280

Câu 14. Cho cấp số cộng $-2; x; 6; y$. Tính giá trị biểu thức $P = x^3 + y^2$

Câu 15. Tìm a để ba số $1 + 3a; a^2 - 5; 1 - a$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng

Câu 16. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Ba số $x, y - 4, z$ theo thứ

tự đó lập thành cấp số nhân. Đồng thời các số $x, y - 4, z - 9$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm x, y, z .

Dạng toán 3. Bài toán thực tế

Câu 17. Người ta trồng cây theo hình tam giác với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây,... ở hàng thứ n có n cây. Biết đã trồng hết 4950 cây. Hỏi có mấy hàng ?

Câu 18. Trong sân vận động của câu lạc bộ Quận Tân Phú, có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liên sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế ?

Câu 19. Một tòa nhà hình tháp có 30 tầng và tổng cộng có 1890 phòng, càng lên cao thì số phòng càng giảm, biết rằng cứ 2 tầng liên tiếp thì hơn kém nhau 4 phòng. Quy ước rằng tầng trệt là tầng số 1, tiếp theo lên là tầng số 2, 3,... Hỏi tầng số 10 có bao nhiêu phòng ?

Câu 20. Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0, 3 triệu đồng mỗi quý. Tính tổng tiền lương nhận được sau 3 năm.

Câu 21. Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng 5 năm 2019. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2019, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng.

Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền ? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2019 đến ngày 30 tháng 4 năm 2019 xem là 121 ngày).

Câu 22. Bà chủ quán trà sữa X muốn trang trí quán cho đẹp nên quyết định thuê nhân công xây một bức tường gạch với xi măng (như hình vẽ bên dưới), biết hàng dưới cùng có 500 viên, mỗi hàng tiếp theo đều có ít hơn hàng trước 1 viên và hàng trên cùng có 1 viên. Hỏi số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là bao nhiêu viên gạch ?

Câu 23. Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1, 3, 5,... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp). Hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa ?

Câu 24. Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá từ mét khoan đầu tiên là 100000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá mỗi mét tăng thêm 30000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người muốn kí hợp đồng với cơ sở khoan giếng này để khoan giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bằng bao nhiêu ?

Dạng toán 4. Chứng minh hoặc tính tổng và một số bài toán khác

Câu 25. Giải phương trình:

a) $1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \dots + x = 970$.

b) $2 + 7 + 12 + 17 + 22 + \dots + x = 245$.

c) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \dots + (x + 28) = 155$

d) $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \dots + (2x + 96) = 1010\$.$

Câu 26. Cho cấp số cộng thoả $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tính $S = u_1 + u_4 + u_7 + \dots + u_{2011}$.

Ôn tập

Câu 1. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_9 bằng

- A. 401. B. 403. C. 402. D. 404.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -2$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_{10} bằng

- A. 3^9 . B. 25. C. 28. D. -29.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_8 = 26$. Công sai d bằng

- A. $\frac{11}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{3}{10}$. D. $\frac{3}{11}$.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, $u_6 = 27$. Tìm công sai d .

- A. 7. B. 5. C. 8. D. 6.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Biết tổng n số hạng đầu của dãy (u_n) là $S_n = 253$. Khi đó n bằng

- A. 9. B. 11. C. 12. D. 10.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n

- A. $u_n = 1 + 4n$. B. $u_n = 5n$. C. $u_n = 1, 5 + 2n$. D. $u_n = 2 + 3n$.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_4 = 10$ và $u_4 + u_6 = 26$, khi đó công sai d bằng

- A. -3. B. 3. C. 5. D. 6.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = -15$, $u_{10} = 60$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này

- A. 150. B. 250. C. -125. D. -200.

Câu 9. Biết bốn số $5, x, 15, y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của $3x + 2y$ bằng

- A. 50. B. 70. C. 30. D. 80.

Câu 10. Một cấp số cộng u_n có số hạng đầu $u_1 = 2018$ và công sai $d = -5$. Hỏi bắt đầu từ số hạng nào của cấp số cộng đó thì nó nhận giá trị âm.

- A. 6. B. 3. C. 5. D. 4.

BÀI 4. CẤP SỐ NHÂN

A. Lý thuyết

Lý thuyết

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân

Ví dụ:

a) 5, 15, 75, 225

b) 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$

c) 4, 0, 0,

d) 2, 2, 2, 2, ...

Lưu ý:

- Khi $q = 1$ thì CSN là một dãy số không đổi.

- Khi $q = 0$ thì CSN có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$

- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, \dots, 0, \dots$

2. Số hạng tổng quát của cấp số nhân

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2.$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số nhân

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$$

Hệ quả: ba số a, b, c theo thứ tự lập thành CSN khi và chỉ khi $b^2 = ac$

4. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Xác định các đại lượng cơ bản của cấp số nhân

Câu 1. Cho cấp số nhân thỏa $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

a) Tìm số hạng đầu và công bội

b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu bằng 3069 ?

c) Số 12288 là số hạng thứ mấy của CSN

Câu 2. Cho CSN thoả: $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$

- a) Tìm số hạng đầu và công bội
 b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3060 ?
 c) Số 24576 là số hạng thứ bao nhiêu ?

Câu 3. Tìm số hạng đầu và công bội của các CSN

a) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 168 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 21 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 315 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases}$

g) $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases}$

h) $\begin{cases} u_1 + u_6 = 244 \\ u_3 + u_4 = 36 \end{cases}$

i) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$

j) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$

k) $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20, q > -1 \end{cases}$

Câu 4. Tìm số hạng đầu và công bội của các CSN

a) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_2^2 = 5 \end{cases}, (q > 0)$

c) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_2^1 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 u_5 = 25 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 31 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 u_5 + u_2 u_3 u_4 = 12 \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \frac{242}{9} \end{cases}$

Dạng toán 2. Điều kiện tạo thành CSN

Câu 5. Cho ba số $5x - y$, $2x + 3y$, $x + 2y$ theo thứ tự lập thành CSC và ba số $(y + 1)^2$, $xy + 1$, $(x - 1)^2$ theo thứ tự lập thành CSN. Tìm x , y .

.....

Câu 6. Cho ba số $x + 5y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự lập thành CSC và ba số $(y - 1)^2$, $xy - 1$, $(x + 1)^2$ theo thứ tự lập thành CSN. Tìm x, y .

.....

Câu 7. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Ba số $x, y - 4, z$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Đồng thời các số $x, y - 4, z - 9$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm x, y, z .

Câu 8. Biết rằng a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời tổng của ba số a, b, c bằng 30. Hãy tìm ba số a, b, c

Câu 9. Tìm ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân dương, biết tổng của chúng bằng 7 và tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{7}{4}$.

Câu 10. Tìm ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân dương, biết tổng của chúng bằng 14 và tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{7}{8}$.

Câu 11. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào bốn số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm bốn số đó.

Dạng toán 3. Tính tổng và bài toán thực tế

Câu 12. Tính các tổng sau

a) $A = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_n$

b) $B = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777\dots7}_n$.

Câu 13. Trên một bàn cờ vua kích thước 8×8 người ta đặt số hạt thóc theo cách như sau đây: Ô thứ nhất đặt một hạt thóc, ô thứ hai đặt hai hạt thóc, các ô tiếp theo đặt số hạt thóc gấp đôi ô đứng liền kề trước nó. Hỏi phải tối thiểu từ ô thứ bao nhiêu để tổng số hạt thóc từ ô đầu tiên đến ô đó lớn hơn 20172018 hạt thóc.

Câu 14. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu tiên đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi tiền đặt lần trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách đó thắng hay thua bao nhiêu ?

Câu 15. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , biết độ dài cạnh đáy BC , đường cao AH và cạnh bên AB theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q . Hãy tìm q^2 .

Chương 4

CHƯƠNG 1: PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

BÀI 1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

Phép biến hình

1. Định nghĩa

Phép biến hình là một quy tắc để ứng với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, ta xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

2. Kí hiệu và thuật ngữ

- Nếu M' là ảnh của điểm M qua F thì ta viết $M' = F(M)$. Ta nói phép biến hình F biến điểm M thành M' .
- Nếu H là một hình nào đó thì $H' = M' | M' = F(M), M \in H$ được gọi là ảnh của H qua F .

Kí hiệu là $H' = F(H)$.

3. Phép dời hình

- Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Phép dời hình:
 - + Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
 - + Biến đường thẳng thành đường thẳng.
 - + Biến tia thành tia.
 - + Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
 - + Biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
 - + Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính với đường tròn ban đầu. Biến góc thành góc bằng góc ban đầu.

BÀI 2. PHÉP TỊNH TIẾN

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ được kí hiệu $T_{\vec{v}}$.

Như vậy: $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

2. Tính chất

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính

3. Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi $M'(x_{M'}; y_{M'})$ là ảnh của $M(x_M; y_M)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (a; b)$. Khi đó $M' = T_v(M) \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = a + x_M \\ y_{M'} = b + y_M \end{cases}$

B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Xác định tọa độ của một điểm qua phép tịnh tiến

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{v} = (2; 1)$, điểm $M(3; 2)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho

a) $A = T_{\vec{v}}(M)$

b) $M = T_{\vec{v}}(A)$

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{v} = (1; 3)$, điểm $M(-1; 4)$. Tìm tọa độ A sao cho

a) $A = T_{\vec{v}}(M)$

c) $A = T_{2\vec{v}}(M)$

b) $M = T_{\vec{v}}(A)$

d) $M = T_{-\vec{v}}(A)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng toán 2. Xác định tọa độ của đường thẳng/ đường cong qua phép tịnh tiến

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d : 2x - 3y + 12 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (4; -3)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d : 2x - 3y + 5 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (3; 2)$.

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d : 2x + y - 4 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ với $\vec{v} = \vec{AB}$, $A(3; 1)$, $B(-1; 8)$

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường

thẳng $d : 3x + 4y - 5 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ với $\vec{v} = \vec{AB}$, $A(0; 2)$, $B(2; 3)$

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 6$. Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (3; 2)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$. Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (2; -3)$

Câu 9. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$. Hãy tìm ảnh của

đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ với $A(-1; 1), B(1; -2)$.

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 8 = 0$. Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v} = (5; -2)$

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d . Hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ trong các trường hợp sau:

- a) $d : 2x - 3y + 5 = 0, \vec{v} = (3; 2)$.
- b) $d : 3x - y + 2 = 0, \vec{v} = (-4; 2)$
- c) $d : 3x + 4y - 5 = 0, \vec{v} = \overrightarrow{AB}, A(0; 2), B(2; 3)$
- d) $d : x + 3y - 2 = 0, \vec{v} = 2\overrightarrow{AB}, A(-2; 3), B(0, 2)$.
- e) d cắt Ox, Oy tại $A(-1; 0), B(0; 5)$ và $\vec{v} = (2; 2)$.

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) . Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ trong các trường hợp sau:

- a) $(C) : (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16, \vec{v} = (2; -3)$
- b) $(C) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25, \vec{v} = \overrightarrow{AB}, A(-1; 1), B(1; -2)$
- c) $(C) : (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 9, \vec{v} = -\overrightarrow{CB}, B(2; -3), C(-1; 5)$
- d) $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 8 = 0, \vec{v} = (5; -2)$.
- e) $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0, \vec{v} = (-2; 3)$
- f) $(C) : x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0, \vec{v} = 3\overrightarrow{BC}, B(1; -2), C(-1; -5)$.

C. BÀI TẬP MỞ RỘNG

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(3; 5), B(-1; 1), \vec{v} = (-1; 2), d : x - 2y + 3 = 0, (C) : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

- a) Tìm ảnh của các điểm A', B' , theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến $\vec{v}$.
- b) Tìm tọa độ điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến $\vec{v}$.
- c) Tìm phương trình đường thẳng d , đường tròn (C') lần lượt là ảnh của $d, (C)$ qua phép tịnh tiến $\vec{v}$.

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có ảnh qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2; 5)$ là tam giác $A'B'C'$ và tam giác $A'B'C'$ có trọng tâm là $G'(-3; 4)$ biết rằng $A(-1; 6), B(3; 4)$. Tìm A', B', C .

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho một phép tịnh tiến biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') . Hãy xác định phép tịnh tiến đó trong các trường hợp sau:

- a) $(C) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16 (C') : (x - 10)^2 + (y + 5)^2 = 16$
- b) $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0 (C') : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
- c) $(C) : (x + m)^2 + (y - 2)^2 = 5 (C') : x^2 + y^2 + 2(m - 2)y - 6x + 12 + m^2 = 0$.

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{v} = (-2; 1)$ và hai đường thẳng $d : 2x - 3y + 3 = 0$ và $d_1 : 2x - 3y - 5 = 0$

- a) Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$

b) Tìm tọa độ của $\vec{v}$ có giá vuông góc với đường thẳng d để d_1 là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{u} = (3; -1)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm $M(1; -4)$ thành điểm

- A. $M'(4; -5)$. B. $M'(-2; -3)$. C. $M'(3; -4)$. D. $M'(4; 5)$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , nếu phép tịnh tiến biến điểm $A(3; 2)$ thành điểm $A'(2; 3)$ thì nó biến điểm $B(2; 5)$ thành điểm

- A. $B'(5; 2)$. B. $B'(1; 6)$. C. $B'(5; 5)$. D. $B'(5; 5)$.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{v} = (-1; 3)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến điểm $A(3; -3)$ thành điểm

- A. $A'(2; -6)$. B. $A'(2; 0)$. C. $A'(4; 0)$. D. $A'(-2; 0)$.

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-4; 2)$, biết M là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1; -5)$. Tìm tọa độ điểm M .

- A. $M(-3; 5)$. B. $M(3; 7)$. C. $M(-5; 7)$. D. $M(-5; -3)$.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-5; 2)$ và điểm $M'(-3; 2)$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{v}$

- A. $\vec{v} = (-2; 0)$. B. $\vec{v} = (0; 2)$. C. $\vec{v} = (-1; 0)$. D. $\vec{v} = (2; 0)$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(0; 2)$, $N(-2; 1)$ và vectơ $\vec{v} = (1; 2)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến M, N thành hai điểm M', N' , tương ứng. Tính độ dài $M'N'$.

- A. $M'N' = \sqrt{5}$. B. $M'N' = \sqrt{7}$. C. $M'N' = 1$. D. $M'N' = 3$.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1; -4)$, $B(8; 2)$ và giao điểm của hai đường chéo AC và BD là $I(3; -2)$. Nếu T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD thì vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là

- A. $(3; 12)$. B. $(5; 3)$. C. $(-3; -2)$. D. $(7; -5)$.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ biết $A(2; 4)$, $B(5; 1)$, $C(-1; -2)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{BC}$ biến $\triangle ABC$ thành $\triangle A'B'C'$ tương ứng các điểm. Tọa độ trọng tâm G' của thành $\triangle A'B'C'$ là

- A. $G'(-4; -2)$. B. $G'(4; 2)$. C. $G'(4; -2)$. D. $G'(-4; 4)$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta : x + 2y - 1 = 0$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1; -1)$

- A. $\Delta' : x + 2y = 0$. B. $\Delta' : x + 2y - 3 = 0$.
C. $\Delta' : x + 2y + 1 = 0$. D. $\Delta' : x + 2y + 2 = 0$.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta : x + 5y - 1 = 0$ và vectơ $\vec{v} = (4; 2)$. Khi đó ảnh của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là

- A. $x + 5y - 15 = 0$. B. $x + 5y + 15 = 0$.
C. $x + 5y + 6 = 0$. D. $-x - 5y + 7 = 0$.

BÀI 3. PHÉP QUAY

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc quay α .

Điểm O gọi là tâm quay, α gọi là góc quay.

Phép quay tâm O góc α , kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$

2. Tính chất

Phép quay là phép biến hình

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

3. Phương pháp xác định một ảnh qua phép quay

$$M'(x_{M'}; y_{M'}) = Q_{(I;\alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = (x_M - a) \cos \alpha - (y_M - b) \sin \alpha + a \\ y_{M'} = (x_M - a) \sin \alpha + (y_M - b) \cos \alpha + b \end{cases}$$

B. BÀI TẬP

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2; 3)$, đường thẳng $d: 2x - 3y + 2 = 0$ và đường tròn có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.

- Tìm ảnh của điểm $A(2; 3)$ qua phép quay $Q_{(0;90^\circ)}$
- Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(0;90^\circ)}$
- Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép quay $Q_{(0;90^\circ)}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 0), B(0; -2)$ Tìm A', B' , lần lượt là ảnh của A, B qua phép quay tâm O , góc quay 90° .

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O , góc quay α , biết

- | | |
|--|--|
| a) $(C) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1, \alpha = 90^\circ$. | e) $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0, \alpha = 90^\circ$. |
| b) $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0, \alpha = -90^\circ$. | f) $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 1, \alpha = -90^\circ$. |
| c) $(C) : x^2 + (y - 1)^2 = 1, \alpha = 60^\circ$. | g) $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0, \alpha = -30^\circ$. |
| d) $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0, \alpha = -30^\circ$. | h) $(C) : x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0, \alpha = 90^\circ$. |

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O , góc quay α trong các trường hợp sau:

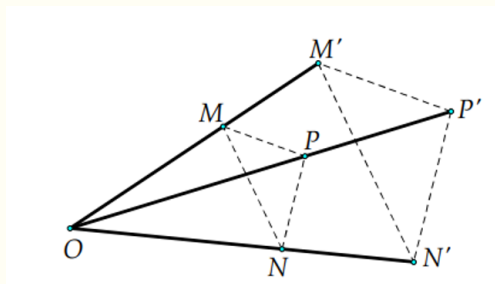
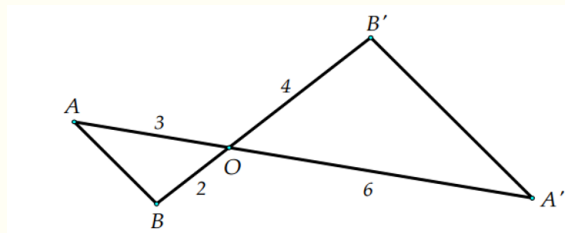
- | | |
|--|--|
| a) $d : x + y - 2 = 0, \alpha = 90^\circ$ | e) $d : x + y - 2 = 0, \alpha = 90^\circ$ |
| b) $d : x - 3y + 11 = 0, \alpha = -90^\circ$. | f) $d : x - 3y + 11 = 0, \alpha = -90^\circ$; |
| c) $d : x - 3y + 5 = 0, \alpha = 60^\circ$. | g) $d : x - 3y + 5 = 0, \alpha = 60^\circ$; |
| d) $d : 2x - y + 6 = 0, \alpha = 45^\circ$. | h) $d : 2x - y + 6 = 0, \alpha = 45^\circ$. |

BÀI 4. PHÉP VỊ TỰ VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho điểm O cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' , sao cho $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k và kí hiệu là $V_{(O;k)}$ (O được gọi là tâm vị tự)



2. Tính chất

Định lí 1. Nếu phép vị tự tâm I tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = k \cdot MN$.

Định lí 2. Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó

Hệ quả:

- Biến đường thẳng không qua tâm vị tự thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- Biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.
- Biến tia thành tia.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$
- Biến góc bằng góc ban đầu.

Ảnh của đường tròn qua phép vị tự

Định lí 3. Phép vị tự tỉ số k biến một đường tròn $(I; R)$ thành đường tròn có bán kính $R' = |k| \cdot R$.

B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Tìm ảnh của điểm qua phép vị tự

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy , xét phép vị tự tâm $O(0; 0)$ sau

a) Cho $A(1; -1), B(2; 3)$. Tìm $A' = V_{(O;k)}(A)$ và $B' = V_{(O;k)}(B)$ với $k = -3$

b) Cho $M'(3; -1)$ và $M' = V_{(O;k)}(M)$ với $k = 3$. Tìm toạ độ M

Dạng toán 2. Tìm ảnh của đường thẳng qua phép vị tự

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d : 3x + 2y - 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(1; 2)$ tỉ số $k = -2$.

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d : x - y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -3$.

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy , hãy tìm ảnh của đường thẳng d trong các trường hợp

a) Cho $d : 2x - y + 3 = 0$. Tìm $d' = V_{(O;k)}(d)$ và $k = 2$

b) Cho $d : 3x + 2y - 6 = 0$. Tìm $d' = V_{(I;k)}(d)$ với $I(1; 2)$ và $k = -2$

c) Cho $d : 2x - 3y + 6 = 0$. Tìm $d' = V_{(I;k)}(d)$ với $I(2; -1)$ và $k = -2$

Dạng toán 3. Tìm ảnh của đường tròn qua phép vị tự

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$. Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I(1; 2)$ tỉ số vị tự $k = -2$

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$. Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số vị tự $k = 3$

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$. Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I(1; 2)$ tỉ số vị tự $k = -2$

Câu 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường tròn (C) trong các trường hợp

a) Cho $(C) : (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$. Tìm $(C') = V_{(O;k)}((C))$ với $k = 3$

b) Cho $(C) : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$. Tìm $(C') = V_{(M;k)}((C))$ với $M(1; 2)$ và $k = -2$

c) Cho $(C) : x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Tìm $(C') = V_{(M;k)}((C))$ với $M(2; 1)$ và $k = 3$

Bài tập tổng hợp

Câu 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho điểm $B(4; -2)$, đường thẳng $d : x - y + 2 = 0$ và đường tròn $(C) : (x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$

- Tìm toạ độ điểm B_1 là ảnh của B qua phép quay tâm O , góc quay 90° và điểm B_2 , biết B là ảnh của B_2 qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-1; 3)$.
- Viết phương trình (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O , tỉ số -3 .
- Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O , tỉ số $k = 2$

Câu 10. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho đường thẳng $d : 3x - 4y - 8 = 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 18x + 4y + 36 = 0$

- Tìm ảnh của d qua phép quay tâm O , góc quay 90°
- Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (4; 3)$ và phép vị tự tâm $I(0; 2)$, $k = -2$

Câu 11. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho $B(-2; 3)$, $I(3; -1)$, đường thẳng $d : 2x + y - 1 = 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$

- Tìm ảnh của điểm B qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện phép quay tâm O , góc quay 90° và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1; 2)$.
- Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O , tỉ số -2 .
- Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I , tỉ số 3 và phép quay tâm O , góc quay 90°

CHƯƠNG 2: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT

Mở đầu về hình học không gian

Đối tượng cơ bản

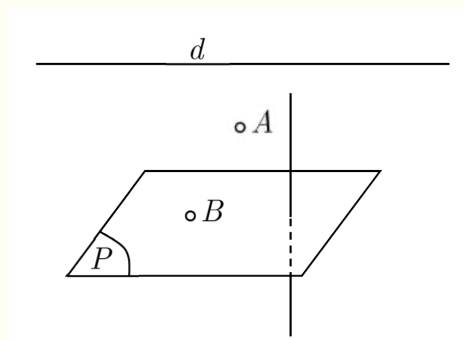
- Điểm: kí hiệu $A, B, C, \dots$
- Đường thẳng: kí hiệu $a, b, c, d, d_1, \dots$
- Mặt phẳng: kí hiệu $(P); (Q); (\alpha); \dots$

Quan hệ cơ bản:

- Thuộc: kí hiệu $\in$. Ví dụ: $A \in d, M \in (P)$
- Chứa, nằm trong: kí hiệu $\subset$. Ví dụ $d \subset (P), b \subset (\alpha)$

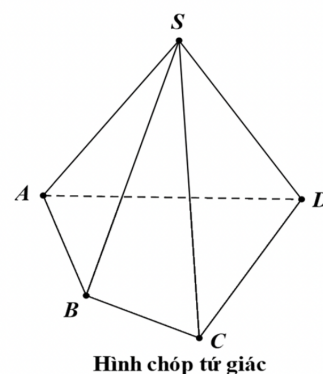
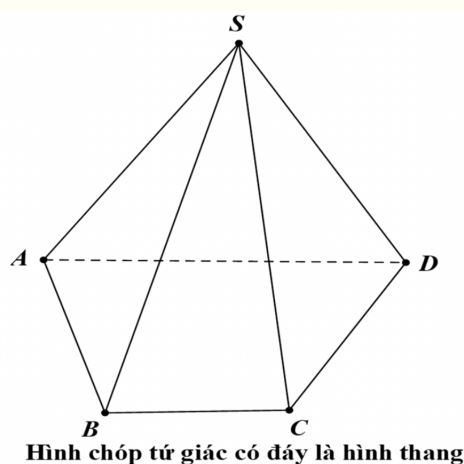
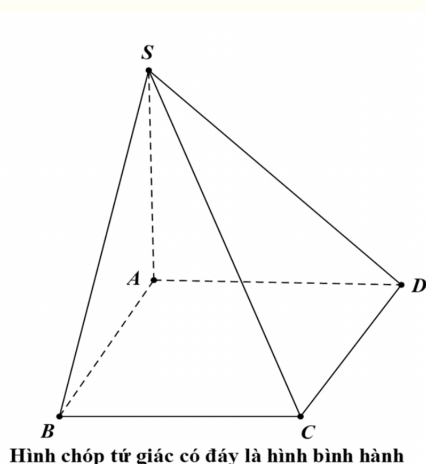
Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

- Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.
- Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau)
- Hai đoạn thẳng song song và bằng nhau được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng song song hoặc và bằng nhau.
- Dùng nét vẽ liền $(-)$ để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn $(--)$ để biểu diễn cho những đường bị che khuất.



Điều kiện xác định mặt phẳng

- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Hình chóp và hình tứ diện**B. BÀI TẬP****Dạng toán 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng****Phương pháp giải**

- + Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.
- + Đường thẳng nối hai điểm chung đó là giao tuyến của chúng.

Cần nhớ

- + Điểm thuộc đường thẳng, đường thẳng nằm trong mặt phẳng, điểm thuộc mặt phẳng.

Nghĩa là $M \in d, d \subset (P) \Rightarrow M \in (P)$

- + Với việc giải hình trong không gian là tập hợp nhiều mặt phẳng, điều kiện đầu tiên để hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng trước hết phải đồng phẳng. Khi gọi giao điểm của hai đường thẳng cần kiểm tra hai đường thẳng đó đồng phẳng ở mặt phẳng nào?

Câu 1. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên cạnh AB, BC sao cho MN không song song với AC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

- (SMN) và (SAC)
- SAN và (SCM)
- (SMC) và (ADN) , với D là trung điểm của SB .

Câu 2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi K, M lần lượt là hai điểm trên cạnh SA và SC sao cho KM khoảng song song AC . Gọi N là trung điểm của cạnh BC . Tìm giao tuyến của

a) (SAN) và (ABM)

b) (SAN) và (BCK)

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, SC lấy M, N sao cho MN khoảng song song AC . Gọi K là trung điểm BC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a) (MNK) và (ABC) .

b) (MNK) và (SAB) .

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Tìm giao tuyến của:

a) (SAC) và (SBD) .

b) (SAB) và (SCD) .

c) (SAD) và (SBC) .

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó mặt đáy $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Gọi điểm M thuộc cạnh SA . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng:

a) (SAC) và (SBD) .

b) (SAB) và (SCD) .

c) (MBC) và (SAD) .

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Trên cạnh SA lấy điểm M . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

a) (SAC) và (SBD) .

b) (SAB) và (SCD) .

c) (BCM) và (SAD) .

d) (CDM) và (SAB) .

e) (BDM) và (SAC) .

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AB // CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M nằm trên đoạn BC . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

a) (SAC) và (SBD) .

b) (SAB) và (SCD) .

c) (SAM) và (SBD) .

d) (SDM) và (SAB).

Câu 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Lấy điểm M trên cạnh SA, trung điểm CD là N. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

a) (SAC) và (SBD).

b) (SAC) và (SBD).

c) (BMN) và (SAC).

d) (MCD) và (SBD).

e) (MCD) và (SAB).

Câu 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

a) (SAC) và (SBD).

b) (MNP) và (SAB).

c) (MNP) và (SAD).

d) (MNP) và (SBC).

e) (MNP) và (SCD).

Câu 10. Cho hình chóp S.ABC. Trên cạnh SA, SC lấy M, N sao cho MN khoảng song song AC. Gọi O là điểm nằm miền trong của tam giác ABC. Tìm giao tuyến của:

a) (MNO) và (ABC).

b) (MNO) và (SAB).

c) (SMO) và (SBC).

d) (ONC) và (SAB).

Câu 11. Cho tứ diện ABCD có M nằm trên cạnh AB, N nằm trên cạnh AD thỏa $MB = 2MA$, $AN = 2ND$. Gọi P là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Tìm giao tuyến giữa:

a) (CMN) và (BCD).

b) (MNP) và (SAD).

c) (MNP) và (ABC).

Câu 12. Cho tứ diện SABC. Lấy điểm E, F lần lượt trên đoạn SA, SB sao cho EF không song song với AB. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Hãy tìm giao tuyến giữa hai mặt phẳng:

a) (EFG) và (ABC).

b) (EFG) và (SBC).

c) (EFG) và (SGC).

Câu 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi. Hai điểm G, H lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB$ và $\triangle SCD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

a) (SGH) và (ABCD).

b) (SAC) và (SGH).

c) (SAC) và (BGH).

d) (SCD) và (BGH).

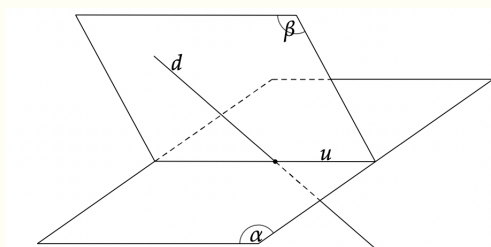
Dạng toán 2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) **Phương pháp giải**

Nếu đường thẳng d cắt đường thẳng d' (d, d' đồng phẳng) và $d' \subset (\alpha)$ thì giao điểm của d và (α) chính là giao điểm I của d và d' .

Nếu không có giao điểm như thế thì ta sẽ làm theo các bước sau:

- Bước 1: Tìm mặt phẳng phụ (β) thoả 3 điều kiện
 - + Chứa đường thẳng d .
 - + Có 1 điểm chung với (α)
 - + Càng lớn càng tốt
- Bước 2: Tìm giao tuyến u của (α) và (β) .
- Bước 3: Trong (β) gọi $I = d \cap u$. Khi đó

$$\begin{cases} I \in u, u \subset (\alpha) \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$$



Câu 14. Cho tứ diện $S.ABC$ có M là điểm nằm trên tia đối của tia SA , O là điểm thuộc miền trong của ΔABC . Hãy

- a) Giao điểm của đường thẳng BC và (SOA) .
- b) Giao điểm của đường thẳng MO và (SBC) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 15. Cho tứ diện $SABC$ có hai điểm M, N lần lượt thuộc hai cạnh SA, SB và O là điểm nằm trong tam giác ABC . Hãy tìm

- a) Giao điểm của đường thẳng AB và (SOC) .
- b) Giao điểm của đường thẳng MN và (SOC) .
- c) Giao điểm của đường thẳng SO và (CMN) .

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy M sao cho $SA = 3SM$, trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $SC = 2SN$. Điểm P thuộc cạnh AB . Hãy tìm

- a) Giao điểm của đường thẳng MN và (ABC) .
- b) Giao điểm của đường thẳng BC và (MNP) .

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với CD . Gọi P là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Hãy tìm

- a) Giao điểm của đường thẳng MN và (BCD) .
- b) Giao điểm của đường thẳng AP và (BMN) .

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm lấy trên cạnh SB , N là điểm thuộc miền trong của tam giác SCD . Hãy tìm của

- a) Đường thẳng MN và $(ABCD)$.
- b) Đường thẳng SC và (MAN) .
- c) Đường thẳng SD và (MAN) .

d) Đường thẳng SA và (CMN) .

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O có G là trọng tâm tam giác SAB . Tìm:

- a) Giao tuyến của (SGC) và $(ABCD)$.
- b) Giao điểm của đường thẳng AD và (SGC) .
- c) Giao điểm của đường thẳng SO và (GCD) .
- d) Giao điểm của đường thẳng SD và (BCG) .

Câu 20. VD Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SD .

- a) Tìm $VI = BM \cap (SAC)$. Chứng minh $BI = 2IM$
- b) Tìm $E = SA \cap (BCM)$. Chứng minh E là trung điểm của SA

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

- a) Tìm giao điểm E của đường thẳng CD và (IJK) . Chứng minh: $DE = DC$.
- b) Tìm giao điểm F của AD với (IJK) . Chứng minh: $FA = 2FD$ và $FK = IJ$.
- c) Gọi M và N là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD . Tìm giao điểm của MN với (IJK) .

Dạng toán 3. Tìm thiết diện của hình (H) khi cắt bởi mặt phẳng (α)**Phương pháp**

Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

Câu 22. Cho tứ diện ABCD. Trên các đoạn CA, CB, BD cho lần lượt các điểm M, N, P sao cho MN không song song với AB. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm M, N, P. Dựng thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện ABCD.

Câu 23. Cho hình chóp S.ABC. Trên cạnh SA, SB lần lượt lấy M, N sao cho MN không song song với AB. Gọi P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC. Xác định thiết diện khi cắt hình chóp bởi (MNP)

Câu 24. Cho tứ diện SABC. Gọi K, N lần lượt là trung điểm SA, BC và M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $3SM = 2MC$. Tìm thiết diện của (KMN) với hình chóp.

Câu 25. Cho tứ diện ABCD. Trên AB lấy điểm M. Điểm N trên BC thỏa $BN = 2NC$, P là trung điểm CD. Xác định thiết diện khi cắt bởi (MNP).

Câu 26. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AD. Lấy M trên cạnh SB. Tìm thiết diện cắt bởi (AMD).

Câu 27. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt trên các cạnh CB, CD, SA. Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP).

Câu 28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AD. Gọi H, K là trung điểm của SB và AB, M là điểm lấy trong

hình thang ABCD sao cho đường thẳng KM cắt hai đường thẳng AD, CD. Tìm thiết diện của hình chóp với (HKM).

Câu 29. VD Cho tứ diện SABC. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Câu 30. VD Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD.

a) Xác định giao tuyến của (ADN) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng

Câu 31. VD Cho hình chóp S.ABCD có AB không song song CD. Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD.

a) Tìm giao điểm N của SD với (MAB).

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

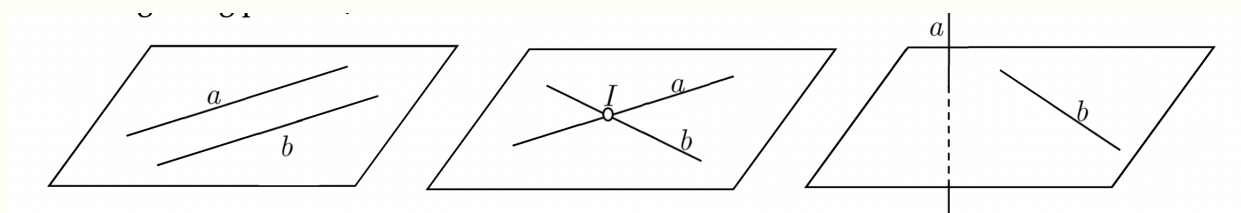
Câu 32. VD Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC. Gọi N là giao điểm của SB và (ADM). Gọi O là giao điểm AC và BD. Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng qui.

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng phân biệt a và b .



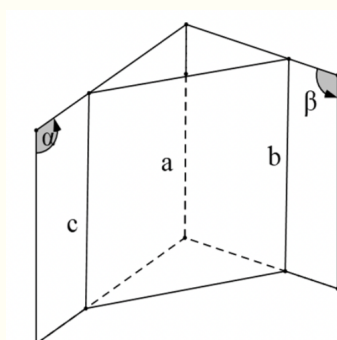
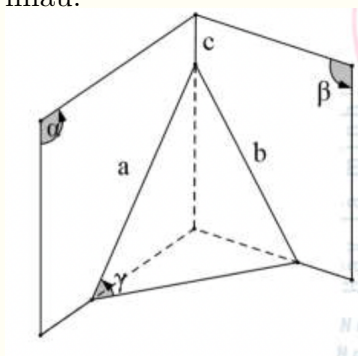
Định nghĩa

- Hai đường thẳng được gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng
- Hai đường thẳng được gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng được gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Tính chất hai đường thẳng song song

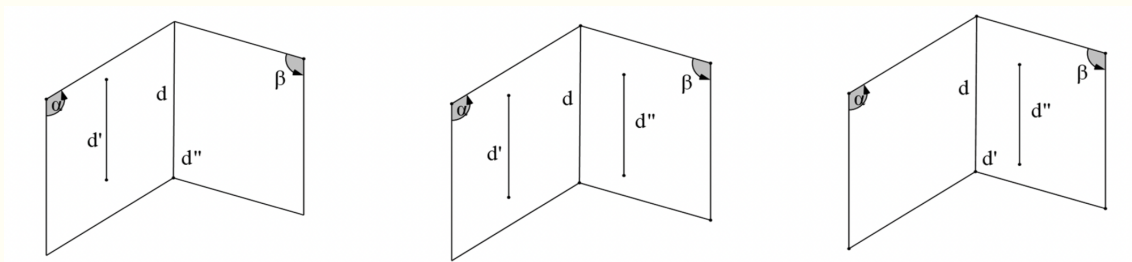
Tính chất 1 Trong không gian, đi qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường song song với đường thẳng đã cho.

Tính chất 2 (Định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng) Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

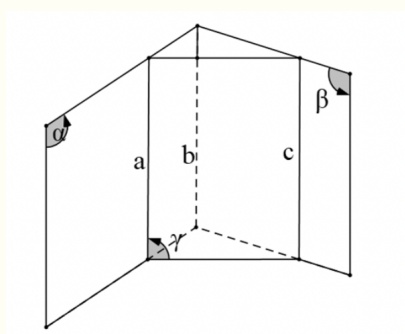


Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Tính chất 3. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp giải

Cách 1. Chứng minh hai đường thẳng a, b đồng phẳng rồi dùng các định lý trong hình học phẳng, chẳng hạn định lý đường trung bình, định lý đảo *Thales*, để chỉ ra $a \parallel b$

Cách 2. Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba. Cụ thể, chứng minh

$$\begin{cases} c \parallel a \\ c \parallel b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$$

Cách 3. Áp dụng định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng và hệ quả của nó. Chẳng hạn, chứng minh

$$\begin{cases} b \parallel c \\ b \subset (\alpha), c \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \parallel b \parallel c \\ a \equiv b \\ a \equiv c \end{cases}$$

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và ABD . Chứng minh $IJ // CD$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD . Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N là trung điểm của SA, SD . Chứng minh:

a) $MN // AD$ và $MN // BC$

b) $MO // SC$ và $NO // SB$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD . Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD, AOD . Chứng minh rằng

a) $IJ // MN$

b) $IJ // BD$ và $GJ // SO$

Câu 5. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

a) Tìm giao điểm P của IE và (SBC) .

b) Chứng minh $GE // SP$

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, cạnh đáy lớn AB với $AB = 2CD$, AC cắt BD tại O . Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC và M là trung điểm của SC .

a) Tìm giao điểm đường thẳng SB và (ADM)

b) Chứng minh $GO // MD$

Dạng toán 2. Giao tuyến song song

Phương pháp

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) có chứa hai đường thẳng song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng, ta làm như sau:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \parallel b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ax \text{ với } Ax \parallel a \parallel b$$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA . Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC . Tìm giao tuyến giữa các cặp mặt phẳng sau:

a) (SAB) và (SCD)

c) (MBC) và (SAD)

b) (SBC) và (SAD)

d) (MEF) và (SAC)

Câu 8. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD .

- a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD)
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (GBC) .

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của SC .

- a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng SB và (MAD)

Câu 10. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , M là trung điểm SC , I là trung điểm của SM , J là trung điểm của AO và N thuộc cạnh AD sao cho $ND = 3NA$.

- a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
- b) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC) .
- c) Chứng minh $IJ // SA$.
- d) Chứng minh $NJ // AB$.

Câu 11. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm nằm trên đoạn thẳng BD sao cho $BE = 3ED$.

- a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
- b) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBC) .
- c) Tìm giao điểm của đường thẳng SB và (ADG) .
- d) Chứng minh $GE // SA$.

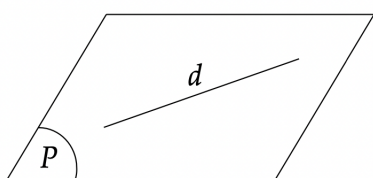
BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT

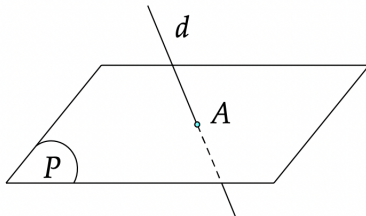
Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Có ba trường hợp xảy ra:

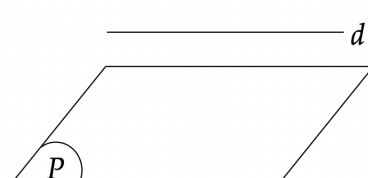
- Đường thẳng d và (P) có 2 điểm chung phân biệt $\Rightarrow d \subset (P)$
- Đường thẳng d và (P) có 1 điểm chung duy nhất $\Rightarrow d \cap (P) = A$
- Đường thẳng d và (P) không có điểm chung $\Rightarrow d \parallel (P)$



Hình 1



Hình 2



Hình 3

2. Các định lý

Định lý 1 Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .

Định lý 2 Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với (α) .

Định lý 3 Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. BÀI TẬP

Dạng toán 1. Chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)

Phương pháp giải

Để chứng minh $d \parallel (P)$, ta cần
$$\begin{cases} d \parallel d' \\ d' \subset (P) \Rightarrow d \parallel (P) \\ d \notin (P) \end{cases}$$

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng MN song song với (ABC) và (ABD)

Câu 2. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

- a) Chứng minh: $MN // (SBC)$ và $MN // (SAD)$.
 b) Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh: $SB // (MNE)$ và $SC // (MNE)$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác ABD . Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MN = 2MC$. Chứng minh $MG // (ACD)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC .

- a) Chứng minh đường thẳng OM song song với các mặt phẳng $(SAB), (SBC)$.

- b) Chứng minh đường thẳng SP song song với các mặt phẳng (OMN) .

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác $SABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SC . Chứng minh $MN // (ABCD)$.

Câu 6. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M, N trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Chứng minh $MN // (ABCD)$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Chứng minh:

- a) $BC // (SAD)$ và $AD // (SBC)$.
 b) $MN // (ABCD)$ và $MN // (SBC)$.
 c) $MO // (SCD)$ và $NO // (SBC)$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

- Chứng minh $OI // (SAB)$ và $OI // (SCD)$.
- Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh $GE // (SBC)$.

Câu 9. (VD) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA .

- Chứng minh $MN // (SAD)$ và $SB // (MNP)$.

- Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh $GI // (SAB)$.

Câu 10. (VD) Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của SA , G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$.

- Chứng minh $DI // (SBC)$.
- Chứng minh $GO // (SCD)$.
- Chứng minh $SB // (ACE)$.

Dạng toán 2. Tìm thiết diện song song với một đường thẳng

Phương pháp giải

Để tìm thiết diện của mặt phẳng (α) đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc (α) chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng, thường sử dụng tính chất sau:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ d // (\alpha) \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = a, \text{ với } a // d (M \in a)$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi O là giao điểm của AC và BD ; E, K lần lượt là trung điểm BC, SC .

- Chứng minh: $EK // (SAB)$.
- Gọi mặt phẳng (P) qua O và song song với BC và SA . Tìm thiết diện cắt của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (P) .

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm SA .

- Chứng minh: $OM \parallel (SCD)$.
- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , đồng thời song song với SC và AD . Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , M là một điểm trên đoạn IJ . Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD .

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD) .
- Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) . Thiết diện là hình gì ?

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song SA .

- Tìm thiết diện của (α) và hình chóp.
- Tìm điều kiện của M, N để thiết diện là hình thang.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC .

- Chứng minh: $KJ \parallel (SAB)$.
- Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD . Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) .

ÔN TẬP GIAO TUYẾN + GIAO ĐIỂM + SONG SONG + THIẾT DIỆN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Chứng minh rằng:

- $BC \parallel (SAD)$
- $AD \parallel (SBC)$
- $MN \parallel (ABCD)$
- $MN \parallel (SBC)$

- $MO \parallel (SCD)$.
- $NO \parallel (SBC)$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

- Chứng minh: $OI \parallel (SAB)$ và $OI \parallel (SCD)$.

b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh: $GE \parallel (SBC)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

- Chứng minh: $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.
- Gọi P là điểm trên cạnh SA . Chứng minh: $SB \parallel (MNP)$ và $SC \parallel (MNP)$.
- Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh: $GI \parallel (SAB)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB , với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của SA, G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

- $DI \parallel (SBC)$.
- $GO \parallel (SCD)$.
- $SB \parallel (ACE)$.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác ABD và I là điểm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng: $IG \parallel (ACD)$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và ABC . Chứng minh rằng: $GP \parallel (ABC)$ và $GP \parallel (ABD)$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm SA .

- Chứng minh: $OM \parallel (SCD)$.
- Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M , đồng thời song song với SC và AD . Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

Câu 8. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm $CD, (\alpha)$ là mặt phẳng qua M , đồng thời song song với SA và BC . Tìm thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì ?

Câu 9. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$, trên AD lấy điểm E sao cho $AD = 3AE$. Gọi M là trung điểm AB .

- Chứng minh: $EG \parallel (SCD)$.
- Đường thẳng qua E song song AB cắt MC tại F . Chứng minh: $GF \parallel (SCD)$.
- Gọi I là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CI = 2ID$. Chứng minh: $GO \parallel (SAI)$.

Câu 10. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD .

- Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAB) .
- Tìm giao tuyến của (SMN) và (SBD) .
- Gọi H là điểm trên cạnh SA sao cho $HA = 2HS$. Tìm giao điểm K của MH và (SBD) .
Tính tỉ số: $\frac{KH}{KM}$.
- Gọi G là giao điểm của BN và DM . Chứng minh: $HG \parallel (SBC)$.

Câu 11. (VD) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G trọng tâm của tam giác SCD .

- Chứng minh: $OG \parallel (SBC)$.
- Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Chứng minh: $CM \parallel (SAB)$.

c) Giả sử điểm I trên đoạn SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh: $SA \parallel (BID)$.

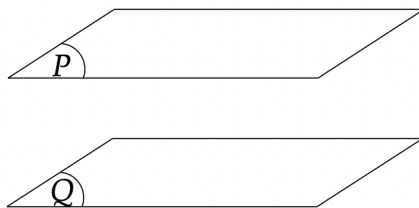
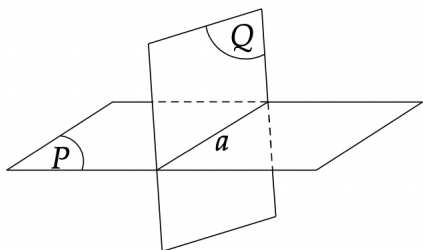
d) Xác định giao điểm K của BG và mặt phẳng (SAC) . Tính tỉ số: $\frac{KB}{KG}$.

BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A. LÝ THUYẾT

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) . Có hai trường hợp xảy ra:



Định nghĩa. Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

Các định lí

Định lí 1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .

Định lí 2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Định lí 3. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

B. BÀI TẬP

Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp giải Chứng minh hai mặt phẳng song song $(P) \parallel (Q)$. Ta chứng minh mặt phẳng (P) có hai đường thẳng **CẮT NHAU** và lần lượt song song với mặt phẳng (Q) .

Cụ thể để chứng minh $(P) \parallel (Q)$, ta cần chỉ ra

$$\left\{ \begin{array}{l} a \parallel (Q) \\ b \parallel (Q) \\ a, b \subset (P) \\ a \cap b = A \end{array} \right. \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Chứng minh hai mặt phẳng (MNO) và (SBC) song song.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Chứng minh rằng $(A'C'D') \parallel (ABCD)$.

Câu 5.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SD và K, I là trung điểm của BC, OM .

- Chứng minh: $(OMN) \parallel (SCD)$.
- Chứng minh: $(PMN) \parallel (ABCD)$.
- Chứng minh: $KI \parallel (SCD)$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

- Chứng minh: $(OMN) \parallel (SBC)$.
- Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB . Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$.
- Chứng minh: $(MOR) \parallel (SCD)$.

Câu 8. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF . Chứng minh:

- Chứng minh: $(ADF) \parallel (BCE)$.
- Chứng minh: $(DIK) \parallel (JBE)$.

Câu 9. VD Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P, E lần lượt là trung điểm SA, BC, CD, SC và I trên cạnh SA thỏa $AI = 3IS$.

- Tìm giao tuyến của (SAD) và (MOP) .

b) Tìm $K = IE \cap (ABC)$, $H = BC \cap (EIM)$ và k với $CH = k.CB$.

c) Gọi G là trọng tâm ΔSBC . Tìm thiết diện hình chóp $S.ABC$ bị cắt bởi (IMG) .

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (β) biết (α) qua điểm A ; song song với mặt phẳng (γ)

Phương pháp giải

Sử dụng tính chất
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \Rightarrow a \parallel b \\ (\gamma) \cap (\beta) = b \end{cases}$$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H . Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB) . Tìm giao tuyến của

a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) .

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ trên AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SBC) . Tìm giao tuyến của (α) với cắt mặt của hình chóp.

ÔN TẬP CHƯƠNG

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 3PD$.

- Tìm giao điểm của CD với mặt phẳng (MNP)
- Tìm giao tuyến của hai mặt ABD và (MNP)

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD , E là một điểm thuộc cạnh AD

- Xác định thiết diện của tứ diện với (IJE)
- Tìm vị trí của điểm E sao cho thiết diện là hình bình hành
- Tìm điều kiện của tứ diện $ABCD$ và vị trí của điểm E trên AD sao cho thiết diện là hình thoi.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M nằm trên cạnh SB sao cho $SM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
- Chứng minh đường thẳng MG song song với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) , biết rằng (α) chứa đường thẳng MG và song song với đường thẳng SA .

Câu 15. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$.

- Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP) .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD) .

Câu 16. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của hai đoạn AD và BC .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) .
- Gọi M, N lần lượt là hai điểm lấy trên hai đoạn AB và AC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN) .

Câu 17. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn AB và điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên cạnh SD lấy điểm M .

- Tìm các giao tuyến: $(SAC) \cap (SDB)$ và $(SAD) \cap (SBC)$.
- Tìm các giao tuyến: $(SAD) \cap (BCM)$ và $(SAC) \cap (BCM)$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang $(AB // CD)$. Gọi $I = AD \cap BC$. Lấy điểm M thuộc cạnh SC sao cho $M \neq S$ và $M \neq C$. Tìm :

- $(SAC) \cap (SBD)$
- $(SAD) \cap (SBC)$
- $(ADM) \cap (SBC)$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$, lấy M, N lần lượt thuộc AB và AC sao cho MN không song song BC . H là một điểm tùy ý thuộc miền trong ΔBCD .

- a) $BC \cap (ADH)$
- b) $MN \cap (BCD)$
- c) $MN \cap (ADH)$
- d) $AH \cap (DMN)$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang ($AD \parallel BC$). Gọi E, F lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSDC . Chứng minh EF song song cả ba mặt phẳng $(ABCD), (SBC), (SAD)$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N, P, Q, R lần lượt là trung điểm của các đoạn SA, SD, AB, ON, SB . Chứng minh:

- a) $(OMN) \parallel (SBC)$
- b) $PQ \parallel (SBC)$;
- c) $(MOR) \parallel (SCD)$

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Gọi H là trung điểm của OM . Chứng minh:

- a) $(OMN) \parallel (SBC)$.
- b) $HN \parallel (SBC)$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi G là trọng tâm của tam giác SAB ; I là trung điểm của AB .

- a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) ; (SID) và (SAC) .

- b) Tìm giao điểm $M = SA \cap (CDG)$.

- c) Xác định thiết diện với hình chóp $S.ABCD$ với (CDG) .

- d) Giả sử $N = SB \cap (CDG)$. Tính tỉ số $\frac{SN}{SB}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, BC, CD ; G là trọng tâm tam giác SCD và $E = AP \cap BD$

- a) Tìm giao điểm F của MP và mặt phẳng (SBD) .

- b) Chứng minh: $MN \parallel (SCD)$ và $GE \parallel (SAC)$.

- c) Lấy điểm H thuộc cạnh AD sao cho $\frac{AH}{AD} = n (0 < n < 1)$, mặt phẳng (P) qua H song song SA, CD cắt SD, SC, BC lần lượt tại K, L, R . Tìm hình tính của thiết diện được tạo bởi (P) với hình chóp $S.ABCD$. d) Cho $\frac{SA}{CD} = k, Q = HR \cap AC$. Tính n theo k để thiết diện $HKLQ$ là hình thoi.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang, $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và AD .

- a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (BCE) và (SAD) . Suy ra giao điểm I của (BCE) với SD .

- b) Chứng minh $CI \parallel (BEF)$.

- c) Tìm giao điểm K của FI với (SBC) . Chứng minh: $(SBF) \parallel (KCD)$.

- d) Gọi O là giao điểm của AC và BF ; (α) là một mặt phẳng đi qua O và song song SA, BC . Xác định thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang $AD \parallel BC$, biết $AD = 2BC$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC .

- Tìm giao tuyến của (ADJ) và (SBC) ; (BIC) và (SAD) .
- Tìm giao điểm M, N của (ADJ) và SB, SC , giao điểm P, Q của (BCI) và SA, SD .
- Chứng minh PM, NQ cùng song song $(ABCD)$.
- Cho AM cắt BP tại E ; CQ cắt DN tại F và PC cắt EF tại K . Tính tỷ số $\frac{EK}{EF}$.

Câu 27. (THPT Nguyễn Hữu Cảnh - Tp. Hồ Chí Minh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB và SC .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SDE) với (SBC) , (SAB) với (SCD) .
- Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , K là điểm trên cạnh SD sao cho $SK = 2KD$. Chứng minh GK song song với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Gọi I là giao điểm của đường thẳng EF và (SBD) . Tính tỉ số $\frac{EI}{EF}$.

Câu 28. (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Tp. Hồ Chí Minh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thang, cạnh đáy lớn $AD = 2BC$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm AD và SI . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = 2MB$.

- Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAD) và (KBC) .

- Tìm giao điểm J của đường thẳng BC và mặt phẳng (SKM) .
- Gọi G là trọng tâm $\triangle SAD$. Chứng minh rằng $JK \parallel (GMC)$.
- Chứng minh thiết diện tạo bởi (KBC) với hình chóp $S.ABCD$ là 1 hình bình hành.

Câu 29. (THPT Nguyễn Thượng Hiền - Tp. Hồ Chí Minh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi E, I, N lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ECD) và (SAB) . Suy ra giao điểm F của đường thẳng SB và mặt phẳng (ECD) .
- Chứng minh: $(OEI) \parallel (SCD)$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EIN) và (SCD) .
- Lấy điểm H thuộc cạnh SB sao cho $BH = 2SH$, gọi M là trung điểm của AB , G là trọng tâm của tam giác SBC . Chứng minh rằng: $AH \parallel (MNG)$.

Câu 30. (THPT Bình Hưng Hòa - Tp. Hồ Chí Minh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD) .
- Chứng minh mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng (SCD) .
- Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua điểm O , song song với AB và SC . Thiết diện là hình gì ?

Câu 31. (THPT Lê Trọng Tấn - Tp. Hồ Chí Minh) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, G lần lượt là trọng tâm của tam giác SAD, ACD .

- | | |
|--|--|
| <p>a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).</p> <p>b) Chứng minh rằng IG song song với mặt phẳng (SBC).</p> | <p>c) Tìm giao điểm của SD và mặt phẳng (IBC).</p> <p>d) Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (IBC) là hình gì ? Giải thích.</p> |
|--|--|