

### §3. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

#### I. Tóm tắt lí thuyết

##### Định nghĩa

**Định nghĩa 1.** Cho số  $k \neq 0$  và  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Tích của véc-tơ  $\vec{a}$  với số  $k$  là một véc-tơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , được xác định như sau:

- $k\vec{a}$  cùng phương  $\vec{a}$ .
- $k\vec{a}$  cùng hướng  $\vec{a}$  khi  $k > 0$ .
- $k\vec{a}$  ngược hướng  $\vec{a}$  khi  $k < 0$ .
- $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

**Quy ước:**  $0\vec{a} = \vec{0}$ ;  $k\vec{0} = \vec{0}$ .

Phép lấy tích của một véc-tơ với một số gọi là **phép nhân véc-tơ với một số** (hoặc phép nhân một số với một véc-tơ).

##### Tính chất

**Tính chất 1.** Cho  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  bất kì và  $k; h \in \mathbb{R}$ , khi đó:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;
- $(k + h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$ ;
- $k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$ ;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;  $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .

**Tính chất 2 (Tính chất trung điểm).** Cho  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ , với mọi  $M$  ta có:

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}.$$

**Tính chất 3 (Tính chất trọng tâm tam giác).** Cho  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ , với mọi  $M$  ta có:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}.$$

##### Điều kiện để hai véc-tơ cùng phương

$\forall \vec{a}, \vec{b}$  ta có:  $\vec{a}$  cùng phương  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ )  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$ .

##### Phân tích (biểu diễn) một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Cho hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương. Khi đó  $\forall \vec{x}$  ta luôn tìm được duy nhất cặp số  $m, n$  sao cho  $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

## II. Các dạng toán

### Dạng 1. Các bài toán sử dụng định nghĩa và tính chất của phép nhân véc-tơ với một số.

Phương pháp giải: Áp dụng định nghĩa và các tính chất của phép nhân véc-tơ với một số để giải các bài tập.

**Ví dụ 1.** Cho  $\vec{u} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$ . Tìm véc-tơ đối của  $\vec{u}$ .

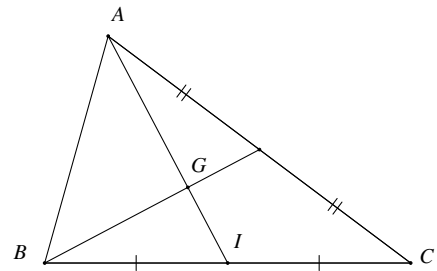
**Lời giải.** Véc-tơ đối của véc-tơ  $\vec{u} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$  là:  $\vec{v} = -(-2\vec{a} + 5\vec{b}) = 2\vec{a} - 5\vec{b}$ .

**Ví dụ 2.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy tính:

- $\vec{BC}$  theo  $\vec{IB}$ .
- $\vec{BC}$  theo  $\vec{IC}$ .
- $\vec{AG}$  theo  $\vec{IA}$ .

**Lời giải.**

- Do  $\vec{BC}$  ngược hướng và có độ dài gấp đôi  $\vec{IB}$  nên  $\vec{BC} = -2\vec{IB}$ .
- Do  $\vec{BC}$  cùng hướng và có độ dài gấp đôi  $\vec{IC}$  nên  $\vec{BC} = 2\vec{IC}$ .
- Do  $\vec{AG}$  ngược hướng và có độ dài bằng  $\frac{2}{3}$  véc-tơ  $\vec{IA}$  nên  $\vec{AG} = -\frac{2}{3}\vec{IA}$ .

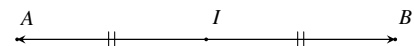


**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng  $I$  là trung điểm của  $AB$  khi và chỉ khi  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**

( $\Rightarrow$ )  $I$  là trung điểm của  $AB$  nên  $\vec{IA}$  và  $\vec{IB}$  ngược hướng và có cùng độ dài. Do đó  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .

( $\Leftarrow$ )  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$  suy ra hai véc-tơ  $\vec{IA}$  và  $\vec{IB}$  đối nhau. Do đó  $I$  là trung điểm của  $AB$ .



### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Tìm các véc-tơ đối của các véc-tơ sau:

- $\vec{u} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$ .
- $\vec{v} = (\sqrt{3} + 1)\vec{a} + 4\vec{b}$ .
- $\vec{x} = (-2\sqrt{2})(3\vec{a} - 2\vec{b})$ .

**Lời giải.**

- Véc-tơ đối của  $\vec{u}$  là:  $\vec{u}' = -7\vec{a} + 5\vec{b}$ .
- Véc-tơ đối của  $\vec{v}$  là:  $\vec{v}' = -(\sqrt{3} + 1)\vec{a} - 4\vec{b}$ .

c) Véc-tơ đối của  $\vec{x}$  là:  $\vec{x}' = (6\sqrt{2})3\vec{a} - 4\sqrt{2}\vec{b}$ .

**Bài 2.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$ .

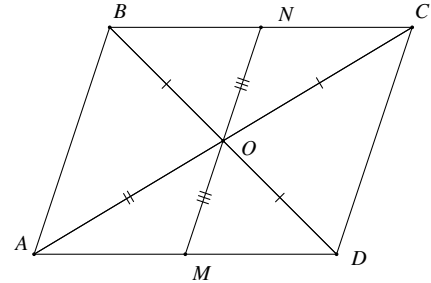
a) Tìm  $x, y$  biết  $\vec{AB} = x\vec{OM}, \vec{BD} = y\vec{OB}$ .

b) Tìm tất cả các véc-tơ  $\vec{u}$  thỏa mãn  $\vec{u} = 2\vec{ON}$ .

**Lời giải.**

- a) - Do  $\vec{AB}$  cùng hướng với  $\vec{OM}$  và có độ dài gấp đôi  $\vec{OM}$  nên suy ra  $x = 2$   
 - Do  $\vec{BD}$  ngược hướng với  $\vec{OB}$  và có độ dài gấp đôi  $\vec{OB}$  nên suy ra  $y = -2$

b) Tất cả các véc-tơ  $\vec{u}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán là:  $\vec{AB}, \vec{MN}, \vec{DC}$



**Bài 3.** Cho  $\triangle ABC$  vuông,  $AB = AC = 2$ . Hãy dựng các véc-tơ sau đây và tính độ dài của chúng.

a)  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .

b)  $\vec{v} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ .

**Lời giải.**

a) Dựng hình chữ nhật  $ABCD$  như hình vẽ.

Khi đó ta có  $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ .

Suy ra  $|\vec{u}| = |\vec{AD}| = 2\sqrt{2}$ .

b) - Trên đường thẳng  $AB$  lấy  $M$  sao cho  $AM = 3AB$ , và  $\vec{AM}, \vec{AB}$  cùng hướng.

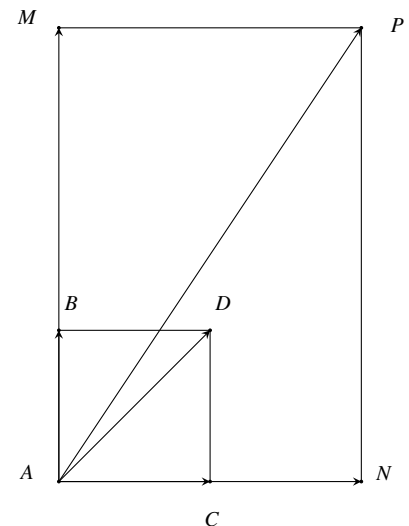
- Trên đường thẳng  $AC$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AN = 2AC$  và  $\vec{AN}, \vec{AC}$  cùng hướng.

- Dựng hình chữ nhật  $AMNP$  như hình vẽ.

Khi đó  $3\vec{AB} = \vec{AM}, 2\vec{AC} = \vec{AN}$ .

$\Rightarrow \vec{v} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AP}$ .

$\Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{AP}| = 2\sqrt{13}$ .



**Bài 4.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh 4 cm. Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy dựng và tính độ dài véc-tơ  $\vec{u} = 2\vec{AM}$ .

**Lời giải.**

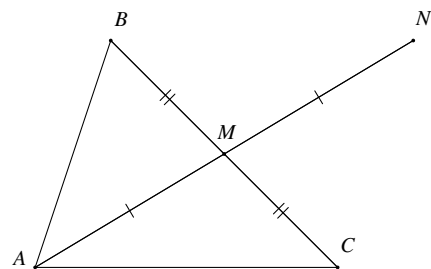
- Lấy  $N$  đối xứng với  $A$  qua  $M$ .

Khi đó  $\vec{AN}$  cùng hướng với  $\vec{AM}$  và có độ dài gấp đôi  $\vec{AM}$   
 $\Rightarrow \vec{AN} = 2\vec{AM} = \vec{u}$ .

- Mặt khác  $\triangle ABC$  là tam giác đều cạnh 4 cm nên trung tuyến  $AM$  đồng thời là đường cao.

$\Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$ .

$\Rightarrow |\vec{u}| = 2|AM| = 4\sqrt{3}$ .



**Bài 5.** Cho đường tròn tâm  $O$  và hai dây cung  $AB, CD$  vuông góc với nhau và cắt nhau tại  $E$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh rằng  $OIEJ$  là hình bình hành.

**Lời giải.**

Gọi  $P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $CD, AB$

$$\Rightarrow \vec{OP} = \frac{\vec{OD} + \vec{OC}}{2}; \vec{OQ} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

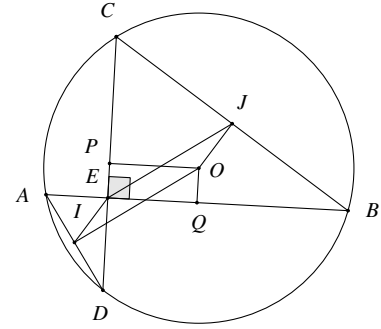
Do  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$

$$\Rightarrow \vec{EI} = \frac{\vec{EA} + \vec{ED}}{2}; \vec{OJ} = \frac{\vec{OC} + \vec{OB}}{2}. \text{ Khi đó:}$$

$$\begin{aligned} \vec{OJ} - \vec{IE} &= \frac{\vec{OC} + \vec{OB}}{2} + \frac{\vec{EA} + \vec{ED}}{2} \\ &= \frac{(\vec{OC} + \vec{OD}) + (\vec{OA} + \vec{OB})}{2} + \vec{EO} \\ &= \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{EO} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{OJ} = \vec{IE}.$$

Suy ra tứ giác  $OIEJ$  là hình bình hành. (đpcm)



## Dạng 2. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Dùng các quy tắc về véc-tơ để phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương.

Lý thuyết cần nhớ

- Cho 2 véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Khi đó, với mọi  $\vec{x}$ , tồn tại duy nhất cặp số  $h, k$  sao cho  $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$ .

- Điểm  $M$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $xAM = yBM$  ( $x, y > 0$ ) thì  $\vec{AM} = \frac{y}{x+y}\vec{AB}$

- Quy tắc 3 điểm:  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$ .

- Quy tắc hình bình hành

Nếu ABCD là hình bình hành thì  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ .

- Hiệu của hai véc-tơ:  $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ .

- Trung điểm của đoạn thẳng

$$\begin{aligned} I \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB &\Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} \\ &\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}, \forall M \text{ bất kỳ} \end{aligned}$$

- Trọng tâm của tam giác

$$\begin{aligned} G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC &\Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}, \forall M \text{ bất kỳ} \end{aligned}$$

**Ví dụ 4.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Phân tích véc-tơ  $\vec{AG}$  theo 2 véc-tơ  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .

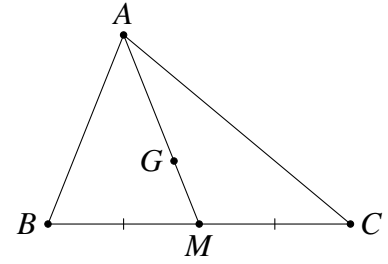
**Lời giải.**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

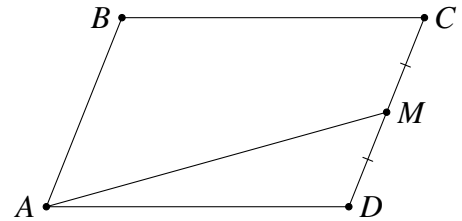
$$\text{Do đó: } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$



**Ví dụ 5.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $CD$ . Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{AM}$  theo 2 véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Vì } M \text{ là trung điểm của } CD \text{ nên } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ (Vì } ABCD \text{ là hình bình hành)} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$



**Ví dụ 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $H, K$  lần lượt thuộc 2 cạnh  $AB$  và  $AC$  sao cho  $3AH = 2AB, 3AK = AC$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $4BM = 3MC$ . Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{BM}$  theo 2 véc-tơ  $\overrightarrow{AH}$  và  $\overrightarrow{AK}$ .

**Lời giải.**

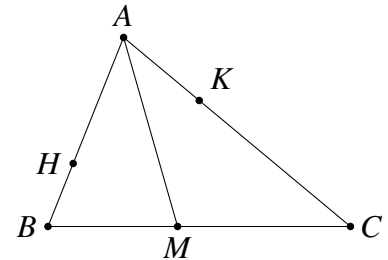
$$\text{Ta có } 3AH = 2AB \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AH}.$$

$$3AK = AC \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AK}.$$

$$4BM = 3MC \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{BM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} = \frac{9}{7}\overrightarrow{AK} - \frac{9}{14}\overrightarrow{AH}.$$



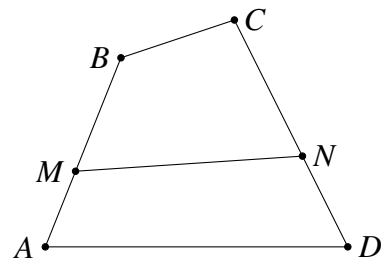
**Ví dụ 7.** Cho tứ giác  $ABCD$  ( $AD$  và  $BC$  không song song). Trên cạnh  $AB$  và  $CD$  lần lượt lấy 2 điểm  $M, N$  sao cho  $AM = kAB$  và  $DN = kDC$  ( $0 < k < 1$ ). Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{MN}$  theo 2 véc-tơ  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Với mọi điểm } O \text{ bất kỳ, ta có: } \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{ON} = (1-k)\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OC}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= (1-k)\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OC} - [(1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}] \\ &= (1-k)(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$



### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

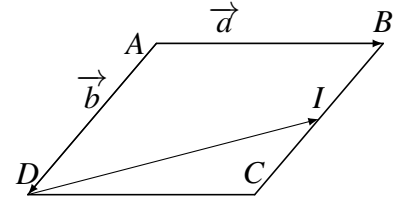
**Bài 6.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Hãy biểu diễn các véc-tơ sao đây theo véc-tơ  $\vec{a}, \vec{b}$ .

a)  $\overrightarrow{DI}$  với  $I$  là trung điểm  $BC$ .

b)  $\overrightarrow{AG}$  với  $G$  là trọng tâm của tam giác  $CDI$ .

**Lời giải.**

a) Ta có: 
$$\begin{cases} \vec{DI} = \vec{DC} + \vec{CI} \\ \vec{DC} = \vec{a}; \vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{CB} = -\frac{1}{2}\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{b} \end{cases}$$
  
Do đó  $\vec{DI} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .



b) Ta có  $\vec{AG}$  với  $G$  là trọng tâm của tam giác  $CDI$ .  
Theo tính chất của trọng tâm tam giác  $CDI$ , ta có:  
$$\vec{AG} = \frac{1}{3}(\vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AI}).$$

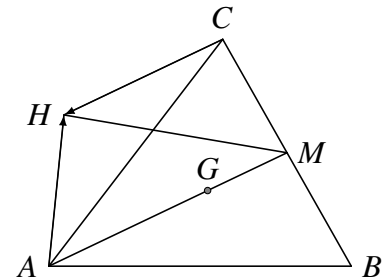
Bên cạnh đó,  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}$  (qui tắc hình bình hành)  
và  $\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{BI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$   
$$\Rightarrow \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}.$$

**Bài 7.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ .  $H$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $G$ .

- a) Tính  $\vec{AH}$  và  $\vec{CH}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .  
b) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  
Chứng minh rằng:  $\vec{MH} = \frac{1}{6}\vec{AC} - \frac{5}{6}\vec{AB}$ .

**Lời giải.**

a) Tính  $\vec{AH}$  và  $\vec{CH}$  theo  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .  
Ta có:  $\vec{AH} + \vec{AB} = 2\vec{AG}$  (qui tắc trung điểm)  
$$= \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) \quad (\text{vì } \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM})$$
  
$$\Rightarrow \vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}.$$
  
Tương tự:  $\vec{CH} = \frac{2}{3}\vec{CA} - \frac{1}{3}\vec{CB} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\vec{CA} + \vec{AB})$   
$$= \frac{1}{3}\vec{CA} - \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$$



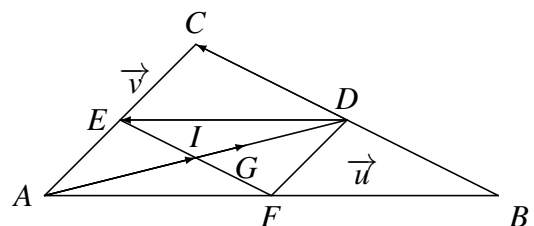
b) Ta có:  $\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CH} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{CH} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$   
(do câu a).  
Vậy  $\vec{MH} = \frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}.$

**Bài 8.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Cho các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$  và  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $EF$ . Đặt  $\vec{u} = \vec{AE}$ ,  $\vec{v} = \vec{AF}$ . Hãy phân tích các vec-tơ  $\vec{AI}$ ,  $\vec{AG}$ ,  $\vec{DE}$ ,  $\vec{DC}$  theo hai vec-tơ  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ .

**Lời giải.**

Vì tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành nên  $\vec{AD} = \vec{AE} + \vec{AF} = \vec{u} + \vec{v}$   
và  $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AD}.$

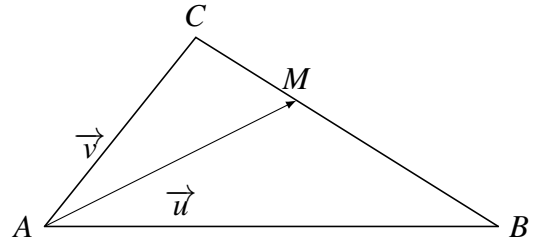
Ta có:  $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$   
$$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AD} = \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}.$$
  
$$\vec{DE} = \vec{FA} = -\vec{AF} = -1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{u}$$
  
$$\vec{DC} = \vec{FE} = \vec{AE} - \vec{AF} = \vec{u} - \vec{v}.$$



**Bài 9.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Hãy phân tích vec-tơ  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ \text{Vậy: } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{2}{3}\overrightarrow{v}. \end{aligned}$$



**Bài 10.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$  và  $N$  là điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Hãy phân tích các vec-tơ  $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{KD}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.**

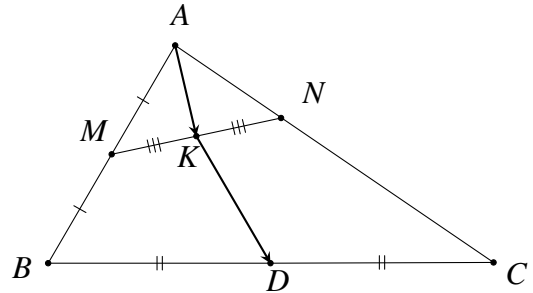
+) Phân tích  $\overrightarrow{AK}$  hai vec-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \text{ và } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

+) Phân tích  $\overrightarrow{KD}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AK} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$



**Bài 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  trung điểm của  $AB$  và  $N$  thuộc cạnh  $AC$  sao cho:  $AN = 2NC$ .

a) Gọi  $K$  là trung điểm của  $BC$ . Hãy phân tích vec-tơ  $\overrightarrow{AK}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AN}$ .

b) Gọi  $H$  là trung điểm của  $MN$ . Hãy phân tích vec-tơ  $\overrightarrow{AH}$  theo hai vec-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.** a) Từ giả thiết ta có:  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}\right) = \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AN}.$$

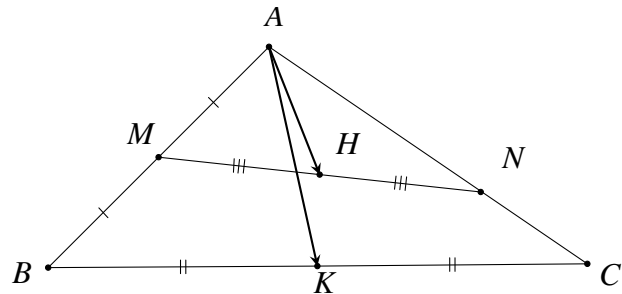
$$\text{Vậy } \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AN}.$$

b) Ta có:  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$



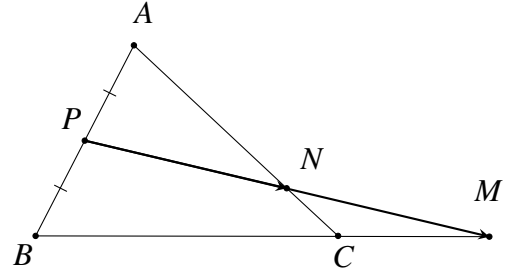
**Bài 12.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi các điểm  $M, N, P$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ . Hãy phân tích các véc-tơ  $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$  theo hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải.** Từ giả thiết ta có:  $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = 3(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{MB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN} = 3(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

**Bài 13.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $I$  thuộc tia đối của tia  $CB$  kéo dài sao cho  $IB = 3IC$ , điểm  $J$  thuộc tia đối của tia  $CA$  sao cho  $JA = 2JC$ , điểm  $K$  thuộc tia đối của tia  $AB$  sao cho  $KB = 3KA$ .

a) Phân tích các véc-tơ  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{JK}$  theo hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

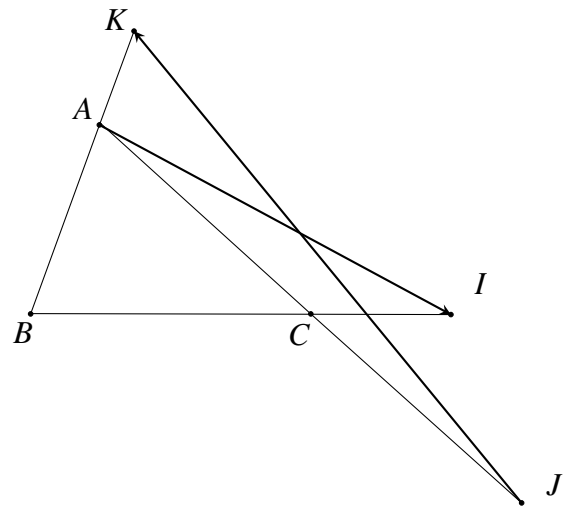
b) Phân tích véc-tơ  $\overrightarrow{BC}$  theo hai véc-tơ  $\overrightarrow{AI}$  và  $\overrightarrow{JK}$ .

**Lời giải.**

a) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



$$\text{Vậy } \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \text{ và } \overrightarrow{JK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

b) Từ câu a) ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{JK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = -\frac{8}{7}\overrightarrow{AI} - \frac{6}{7}\overrightarrow{JK} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AI} - \frac{2}{7}\overrightarrow{JK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AI} + \frac{4}{7}\overrightarrow{JK}.$$

$$\text{Vậy ta có } \overrightarrow{BC} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AI} + \frac{4}{7}\overrightarrow{JK}.$$



**Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ có chứa tích của véc-tơ với một số****Phương pháp giải:**

- *Hướng 1.* Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó:
  - Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
  - Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích véc-tơ.
- *Hướng 2.* Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.
- *Hướng 3.* Biến đổi một đẳng thức véc-tơ đã biết luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

**Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý:**

- *Quy tắc ba điểm:* Với ba điểm  $A, B, C$  bất kì ta luôn có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ .
- *Quy tắc hình bình hành:* Với hình bình hành  $ABCD$  ta luôn có:  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .
- *Quy tắc trừ:* Với ba điểm  $A, B, O$  bất kì ta luôn có:  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .
- *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng:* Với điểm  $M$  tùy ý và  $I$  là trung điểm của  $AB$  ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} &= \vec{0}. \\ \overrightarrow{MI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).\end{aligned}$$

- *Tính chất trọng tâm tam giác:* Với điểm  $M$  tùy ý và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \vec{0}. \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} &= 3\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

- Các tính chất của phép cộng, trừ véc-tơ và phép nhân một số với một véc-tơ.

**Ví dụ 8.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}.$$

**Lời giải.** Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$ .  
Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

**Ví dụ 9.** Cho tam giác  $ABC$  với trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AG}$ .

**Lời giải.** Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AG}.$$

**Ví dụ 10.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng:  $\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{MN}$ .

**Lời giải.**

Cách 1. Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NC}, \\ \vec{BD} &= \vec{BM} + \vec{MN} + \vec{ND}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}\vec{AC} + \vec{BD} &= 2\vec{MN} + (\vec{AM} + \vec{BM}) + (\vec{NC} + \vec{ND}) \\ &= 2\vec{MN}.\end{aligned}$$

(Vì  $\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$  và  $\vec{NC} + \vec{ND} = \vec{0}$ ).

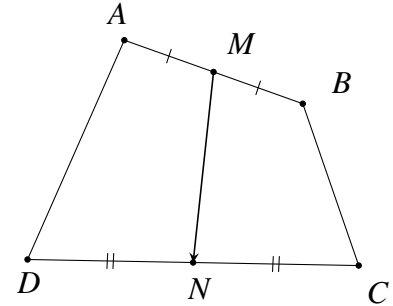
Cách 2. Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN}, \\ \vec{MN} &= \vec{MB} + \vec{BD} + \vec{DN}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}2\vec{MN} &= (\vec{AM} + \vec{BM}) + (\vec{NC} + \vec{ND}) + \vec{AC} + \vec{BD} \\ &= \vec{AC} + \vec{BD}.\end{aligned}$$

(Vì  $\vec{AM} + \vec{BM} = \vec{0}$  và  $\vec{NC} + \vec{ND} = \vec{0}$ ).

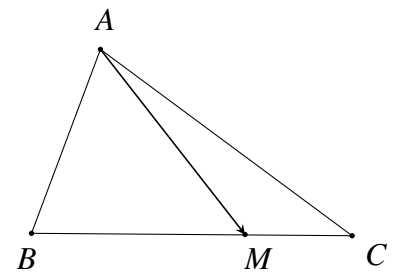


**Ví dụ 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Chứng minh rằng:  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$ .

**Lời giải.**

Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{AM} &= \vec{AB} + \vec{BM} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} \\ &= \vec{AB} + \frac{2}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}.\end{aligned}$$



**Ví dụ 12.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt thuộc các đoạn thẳng  $AB, CD$  sao cho  $MB = 2MA$  và  $NC = 2ND$ . Chứng minh rằng:

$$\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{BC}.$$

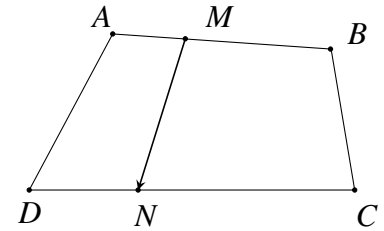
**Lời giải.**

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}).$$



Vì  $M, N$  lần lượt thuộc các đoạn thẳng  $AB, CD$  sao cho  $MB = 2MA$  và  $NC = 2ND$  nên ta có:

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0},$$

$$2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}.$$

$$\text{Vậy } 3\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

**Ví dụ 13.** Cho tam giác  $ABC$ . Lần lượt lấy các điểm  $M, N, P$  trên các đoạn thẳng  $AB, BC$  và  $CA$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB, BN = \frac{1}{3}BC, CP = \frac{1}{3}CA$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

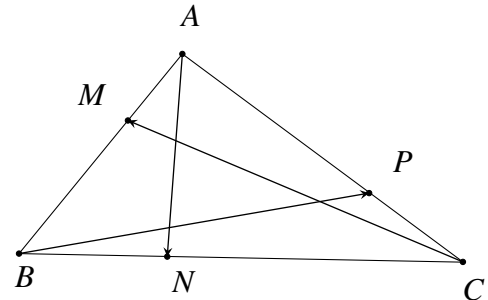
**Lời giải.**

Ta có:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad (1.1)$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \quad (1.2)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad (1.3)$$



Từ (1), (2), (3) ta suy ra:

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{4}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

**Ví dụ 14.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Gọi  $M$  là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$

b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$

**Lời giải.**

a) Vì  $O$  là trung điểm của  $AC$  và  $BD$  nên ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm ta có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

Theo ý a) ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

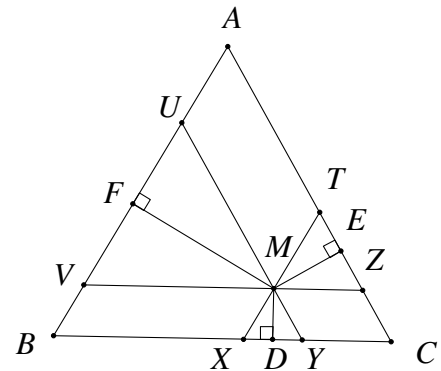
$$\text{Vậy } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$$

**Ví dụ 15.** Cho tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$ .  $M$  là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu của  $M$  trên  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ .

**Lời giải.**

Qua điểm  $M$  dựng:

- đường thẳng song song với  $BC$ , cắt các cặp đường thẳng  $AB, AC$  tại  $V, Z$ .
- đường thẳng song song với  $AB$ , cắt các cặp đường thẳng  $AC, BC$  tại  $T, X$ .
- đường thẳng song song với  $BC$ , cắt các cặp đường thẳng  $AB, AC$  tại  $V, Z$ .



Ta dễ dàng chứng minh được  $MTAU, MVBX, MYCZ$  là các hình bình hành và các điểm  $D, E, F$  tương ứng là trung điểm của  $XY, ZT, UV$ .

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MZ} + \overrightarrow{MT}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MU}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MX}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MZ}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 14.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

**Lời giải.** Ta có:  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}$ .

**Bài 15.** Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$