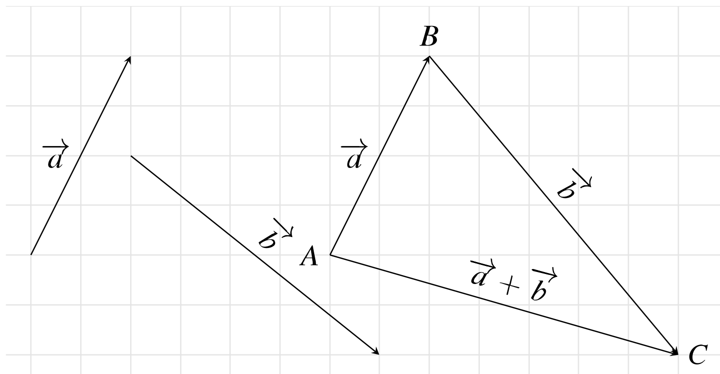
§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

I. Tóm tắt lí thuyết

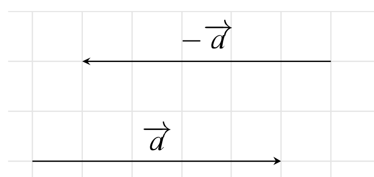
1. Định nghĩa tổng và hiệu hai véc-tơ

Định nghĩa 1 (Phép cộng). Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Với điểm A bất kỳ, dựng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$, dựng $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{b}$. Khi đó, véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là véc-tơ tổng của $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$.
Ta ký hiệu: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, tức là: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Phép toán tìm tổng của hai véc-tơ còn gọi là **phép cộng véc-tơ**.

Định nghĩa 2 (Véc-tơ đối). Cho véc-tơ $\overrightarrow{a}$, véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\overrightarrow{a}$ được gọi là véc-tơ đối của $\overrightarrow{a}$, ký hiệu là $-\overrightarrow{a}$.

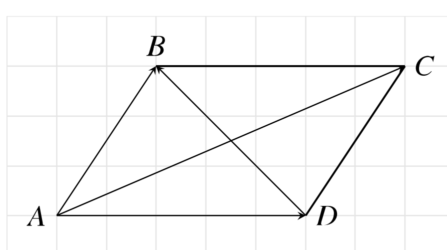


Định nghĩa 3 (Phép trừ). Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$. Phép phép trừ của $\overrightarrow{a}$ với $\overrightarrow{b}$ được định nghĩa là phép cộng của $\overrightarrow{a}$ với $-\overrightarrow{b}$.
Ký hiệu $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$.

2. Quy tắc hình bình hành

Cho hình bình hành $ABCD$, khi đó

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$



3. Các tính chất của phép cộng, trừ hai véc-tơ

Tính chất 1. (giao hoán và kết hợp)

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

b) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

Tính chất 2. (véc-tơ đối)

a) $-\vec{0}=\vec{0}$

b) $\vec{a}-\vec{b}=-(\vec{b}-\vec{a})$,

c) $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

Tính chất 3. (cộng với véc-tơ $\vec{0}$) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Tính chất 4. Cho 3 điểm A,B,C ta có:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc 3 điểm),

b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ).

Tính chất 5. a) (quy tắc trung điểm) I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$,

b) (quy tắc trọng tâm) G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định véc-tơ

Dựa vào quy tắc cộng, trừ, quy tắc 3 điểm, hình bình hành, ta biến đổi và dựng hình để xác định các véc-tơ. Chú ý các quy tắc sau đây.

a) $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc 3 điểm).

c) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ).

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ ($ABCD$ là hình bình hành).

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC.

a) Xác định véc-tơ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

b) Xác định véc-tơ $\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

c) Xác định véc-tơ $\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

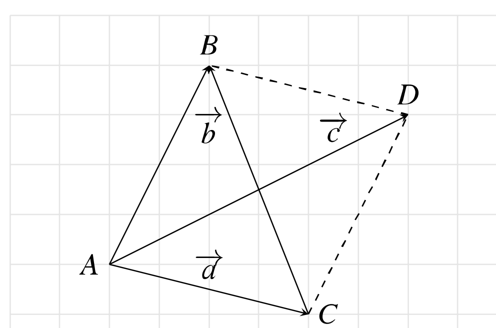
Lời giải.

Ta có

a) $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

c) $\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, với $ABDC$ là hình bình hành.



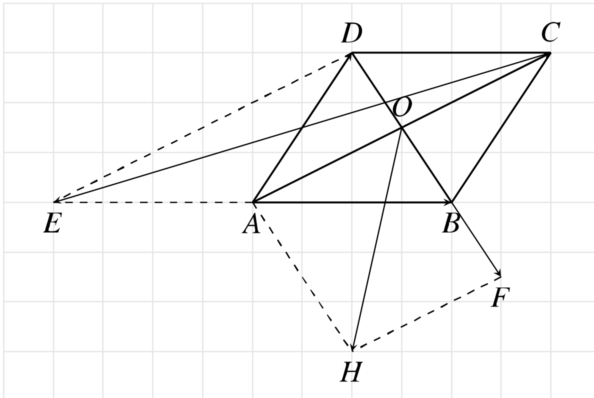
Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, có tâm O. Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

b) $\vec{y}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CD}$.

c) $\vec{z}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}$.

d) $\vec{t}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BD}$.



Lời giải.

a) Theo tính chất hình bình hành $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$.

c) $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE}$ (dựng hình bình hành $CDEA$).

d) $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OH}$. Trong đó, ta dựng $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DB}$ và hình bình hành $OFHA$.

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC đều, G là trọng tâm và M là trung điểm cạnh BC. Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

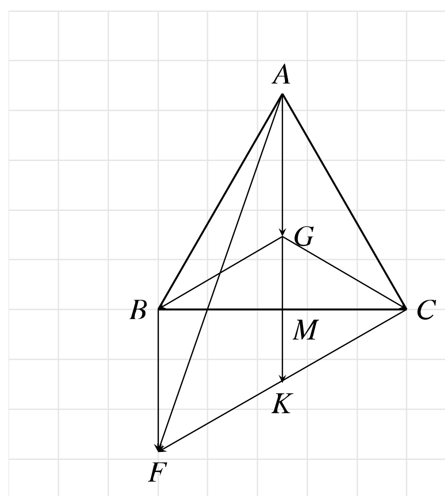
a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Lời giải.



a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GK}$ (dựng hình bình hành $GBKC$).

b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF}$ (dựng $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AG}$).

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$.

Ví dụ 4. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I. Gọi M là một điểm tùy ý không nằm trên đường thẳng AB. Lấy trên tia MI một điểm N sao cho $IN = MI$. Hãy xác định các véc-tơ:

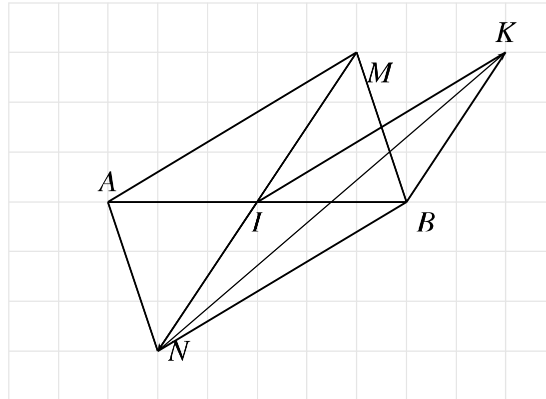
a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NI}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{IN}$.

b) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NI}=\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NK}$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Xác định các véc-tơ đối của các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{DO}$.

b) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

a) $-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$, $-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$.

b) $-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$, $-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{CA}$.

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Tìm véc-tơ $\overrightarrow{x}$ trong các trường hợp:

a) $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{x}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BE}$, với $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm BC,AC,AB. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NA}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{CM}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{ND}$ (dựng thêm điểm D sao cho $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$).

Bài 5. Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm AC và N là điểm đối xứng của B qua M. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CN}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN}$.

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MN}$.

Lời giải. Ta có, tứ giác $BANC$ là hình bình hành.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$ (tính chất hình bình hành $BANC$).

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BE}$ (dựng $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CN}$).

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$.

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{BM}$.

Bài 6. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DE, EF, FA. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CD}$.

b) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{PS}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{0}$.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt nằm trên cạnh BC,AC,AB sao cho $BD=\dfrac{1}{3}BC$, $CE=\dfrac{1}{3}CA$, $AF=\dfrac{1}{3}AB$. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

Lời giải.

a) Lấy thêm các điểm P,Q về phía ngoài cạnh AB,AC sao cho $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{AF}$. Theo đó, tam giác APQ đồng dạng tam giác ACB nên ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BD}$. Khi đó, $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{0}$.

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{AF})-(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{0}$.

Dạng 2. Xác định điểm thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước

Để xác định điểm M thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước, ta làm như sau:

◦ **HƯỚNG 1:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{v}$, trong đó A là điểm cố định và $\overrightarrow{v}$ là véc-tơ cố định.

– Lấy A làm điểm gốc, dựng véc-tơ bằng $\overrightarrow{v}$ thì điểm ngọn chính là điểm M cần tìm.

◦ **HƯỚNG 2:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$, trong đó A, B là hai điểm cố định.

– Khi đó điểm M cần tìm trùng với điểm B.

◦**HƯỚNG 3:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn đúng với mọi điểm M.

– Khi đó điểm M cần tìm là điểm tùy ý.

◦**HƯỚNG 4:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn sai với mọi điểm M.

– Khi đó không có điểm M nào thỏa điều kiện.

◦**HƯỚNG 5:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\left|\overrightarrow{IM}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, trong đó I, A, B là các điểm cố định.

– Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường tròn tâm I, bán kính AB.

◦**HƯỚNG 6:**

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$, trong đó A, B là các điểm cố định phân biệt.

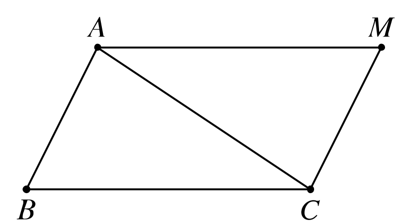
– Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường trung trực của đoạn AB.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow$ Điểm M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

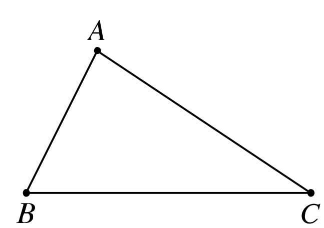


Ví dụ 6. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM}$

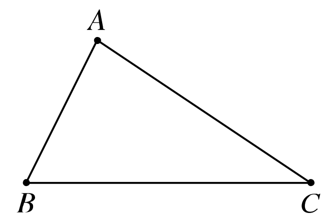
$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm A.



Ví dụ 7. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

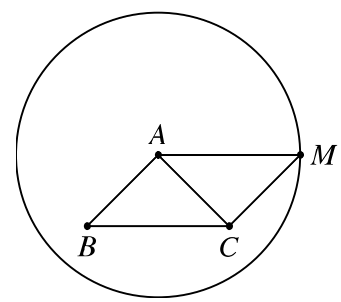
Lời giải.

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$
$\Rightarrow$ không có M nào thỏa điều kiện bài toán.



Ví dụ 8. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Lời giải.
$|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MA = CB$
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm A, bán kính CB.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Cho $\triangle ABC$. Dựng điểm M thỏa mãn điều kiện

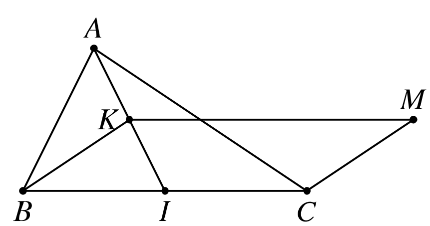
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}. \quad (1)$$

Lời giải. Ta có $(1) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$. Vậy bốn điểm A, C, B, M tạo thành hình bình hành.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.
Lời giải. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AM}$.
$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBM$.

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh AC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$.
Lời giải. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM}\right) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IM}$.
$\Rightarrow$ M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $IABM$.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AI. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.
Lời giải.
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BK}$
$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBKM$.



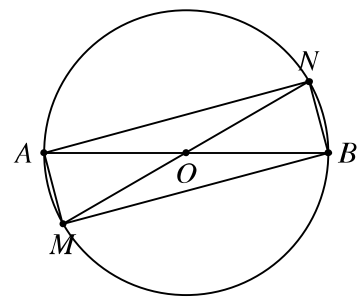
Bài 12. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OM}$.
Lời giải. $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AM}$.
$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AODM$.

Bài 13. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}$.
Lời giải. $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$.
$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm D.

Bài 14. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$.
Lời giải. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}$.
$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm G.

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$.
Lời giải. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}$.
$\Rightarrow$ Không có điểm M nào thỏa điều kiện trên.

Bài 16. Cho hai điểm A và B. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$.
Lời giải.
$|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|\Leftrightarrow MN=BA$.
Với N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AMBN$. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB.
$\Rightarrow 2MO=2OB\Rightarrow MO=OB$.
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm O, bán kính OB.



Bài 17. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|$.
Lời giải. $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{BC}|\Leftrightarrow MC=BC$.
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm C, bán kính BC.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}|$.
Lời giải. $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}|=|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}|\Leftrightarrow MA=MC$.
$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC.

Bài 19. Cho năm điểm A,B,C,D,E. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CD}$.
Lời giải. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MM}=\overrightarrow{0}$.
$\Rightarrow$ Điểm M là điểm tùy ý.

Dạng 3. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ

– Độ dài của véc-tơ bằng độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.
– Ta thường sử dụng các công thức về cạnh như hệ thức lượng tam giác vuông, định lý Pytago, tính chất tam giác đều, hình chữ nhật, hình vuông,...

Ví dụ 9. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=a$.

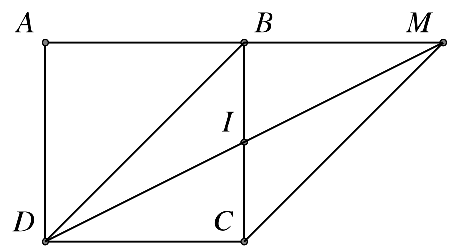
Ví dụ 10. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|$.

Lời giải.

Vẽ hình bình hành $CDBM$ thì DM cắt BC tại trung điểm I của mỗi đường.

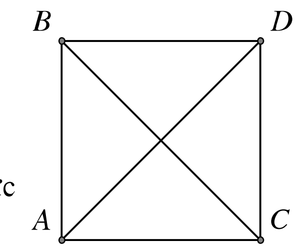
Ta có $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}$ nên $\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|=DM=2DI$

Mà $DI^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{4}a^2$ nên $\left|\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right|=a\sqrt{5}$.



Ví dụ 11. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ thì ΔABC là tam giác vuông.

Lời giải.
Dựng hình bình hành $ABDC$.
Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$
Theo quy tắc hiệu hai véc-tơ ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.
Từ giả thiết suy ra $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$, tức là $AD=BC$.
Hình bình hành $ABDC$ có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình chữ nhật, tức là tam giác ABC vuông.



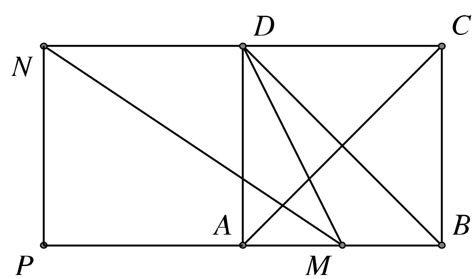
Ví dụ 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của véc-tơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.
Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông MAD ta có

$DM^2=AM^2+AD^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow DM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right|=MD=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.
Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM=PA+AM=a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$.



Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông NPM ta có

$MN^2=NP^2+PM^2=a^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2=\frac{13a^2}{4}\Rightarrow DM=\frac{a\sqrt{13}}{2}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right|=MN=\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, M là một điểm bất kỳ. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải. Áp dụng quy tắc trừ ta có

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)-\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}$

LấyB' là điểm đối xứng của B qua A

Khi đó $-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB'}\Rightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BB'}$

Suy ra $|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|=|\overrightarrow{BB'}|=BB'=2a$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 20. Cho tam giác đều ABC cạnh $5a$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=5a$.

Ta có $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=BA=5a$.

Bài 21. Xét các véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Khi nào thì $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$.

Lời giải. Từ điểm O nào đó, ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}$. Khi đó $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$. Như vậy:

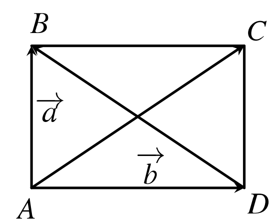
$$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow OB=OA+AB.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi O,A,B thẳng hàng theo thứ tự này. Hay hai véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ cùng hướng.

Bài 22. Xét các véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ khác $\overrightarrow{0}$. Khi nào thì $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$.

Lời giải.

Từ điểm A nào đó, ta kẻ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a},\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{b}$. Vẽ điểm C sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AC}$. Theo quy tắc về hiệu véc-tơ ta có: $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Như vậy:



$$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|\Leftrightarrow AC=BD.$$

Điều này xảy ra khi $ABCD$ là hình chữ nhật. Vậy AB vuông góc với AD hay giá của hai véc-tơ vuông góc với nhau.

Bài 23. Chứng minh rằng với $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương thì

$$|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|<\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|<|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|.$$

Lời giải. Gọi A,B là điểm đầu và điểm cuối của $\overrightarrow{a}$. Vẽ điểm C sao cho $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$. Vì $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương nên ba điểm A,B,C không thẳng hàng. Ta có:

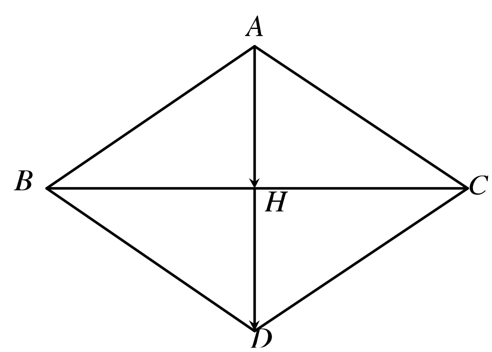
$$|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|=AB-BC<AC=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|<AB+BC=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 24. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết $AB=a$ và $BC=2b$ (với $a>b>0$). Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

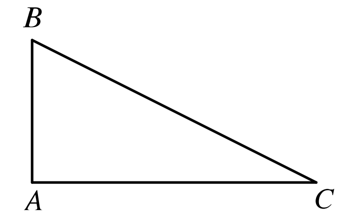
Do tam giác ABC cân tại A, đường cao AH nên H là trung điểm BC. Suy ra $BH=b$. Trong tam giác vuông ABH, ta có:
$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{a^2-b^2}$.
Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}$.
Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}\right|=\left|\overrightarrow{AH}\right|=\sqrt{a^2-b^2}$.
Vẽ hình bình hành $ABDC$. Khi đó:
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
Do đó: $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=2AH=2\sqrt{a^2-b^2}$.



Bài 25. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=a$, $BC=a\sqrt{5}$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

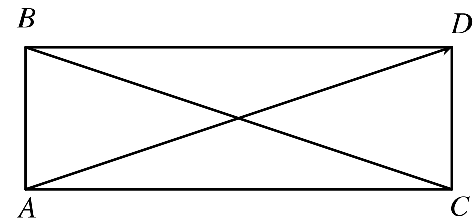
Lời giải.

Do tam giác ABC vuông tại A nên
$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$.
Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 2a$.
Ta có $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right| = BA = a$.



Bài 26. Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = a$ và $AC = 3a$. Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

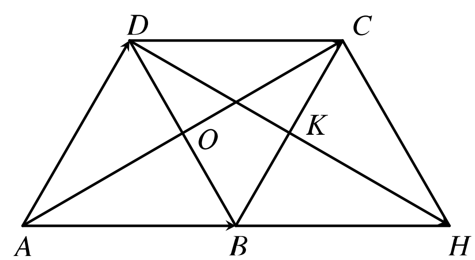
Lời giải.
Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.
Hay $BC = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$.
Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.
Do đó $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = a\sqrt{10}$.
Vẽ hình bình hành $ABDC$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Do đó $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = a\sqrt{10}$.



Bài 27. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O, cạnh bằng 4 và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính:

$$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right|;\left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}\right|;\left|-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OC}\right|.$$

Lời giải.
Từ giả thiết suy ra ABD là tam giác đều cạnh bằng 4. Do đó $AO = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $AC = 4\sqrt{3}$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Như vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = AC = 4\sqrt{3}$.
Ta có: $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}$.
Suy ra $\left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}\right| = BO = \dfrac{1}{2}BD = 2$.
Vẽ hình bình hành $BDCH$. Do $DB = DC = 4$ nên hình bình hành $BDCH$ là hình thoi, do đó $DH = 2DK = 4\sqrt{3}$ (K là trung điểm của BC).



Ta có: $\left|-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{DH}\right| = 4\sqrt{3}$.

Bài 28. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B phân biệt, không nằm trên d. Tìm $M \in d$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right|$ nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi C là điểm đối xứng của B qua A. Khi đó C là điểm cố định và

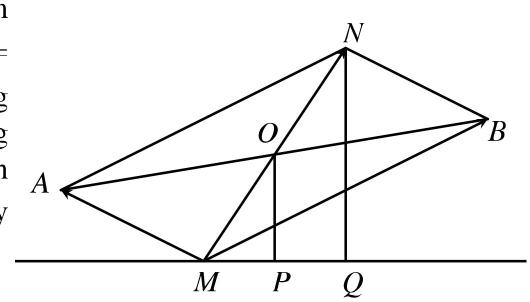
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC}.$$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{MC}\right| = MC$. Như vậy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}\right|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MC nhỏ nhất, hay M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng d.

Bài 29. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$, với $M \in d$.

Lời giải.

Trong trường hợp M,A,B không thẳng hàng, ta dựng hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MN}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=MN$. Gọi O là giao điểm của MN và AB. Khi đó, O là trung điểm AB nên O là điểm cố định. Từ O, N lần lượt kẻ các đường vuông góc với d, cắt d tại P, Q. Ta có $MN \geq NQ = 2OP$. Còn khi M,A,B thẳng hàng thì hiển nhiên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right| > 2OP$. Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất là bằng $2OP$, đạt được khi M trùng P.



Dạng 4. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

a) Sử dụng quy tắc ba điểm.

b) Sử dụng quy tắc hình bình hành.

Ví dụ 14. Cho 5 điểm A,B,C,D,E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

Lời giải. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}&\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{0}\\ \Leftrightarrow&\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{0}\\ \Leftrightarrow&\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{0}\quad\text{(luôn đúng)}\end{aligned}$$

Ví dụ 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$
Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ (luôn đúng)

Ví dụ 16. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$.

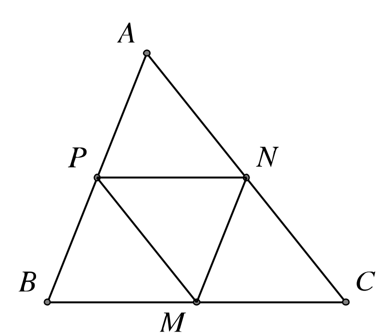
Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\\ \overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\\ \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}\end{cases}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}&=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}\right)\\&=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}\end{aligned}$$

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{MN}\\ \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NC}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$



Ví dụ 17. Cho 5 điểm A,B,C,D,E. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}&=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}\right)\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Ví dụ 18. Chứng minh rằng nếu hai hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có cùng tâm thì $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{0}$.

Lời giải. Gọi O là tâm của hai hình bình hành.
Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}&=\left(\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC'}-\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OD'}-\overrightarrow{OD}\right)\\&=-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OC'}\right)+\left(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OD'}\right)\\&=\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 30. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Lời giải. Ta có sự tương đương:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 31. Cho hình bình hành $ABCD$ và M là điểm tùy ý. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}.$$

Lời giải. Ta có: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA},\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CD}$. Mà $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.

Bài 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)=\overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}\quad\text{(luôn đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành).}$$

Bài 33. Cho tam giác ABC, gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

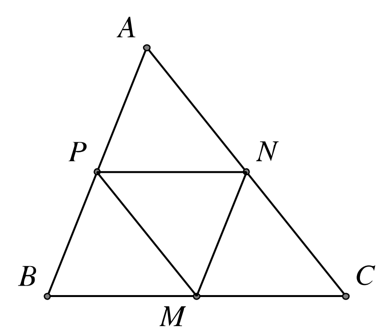
Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{ON}\right)+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\right)=\overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{0}$$



Mặt khác $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}\\\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}\\\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BP}\end{cases}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}&=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}\right)\\&=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AN}\end{aligned}$$

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{MN}\\\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NC}\end{cases}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}$$