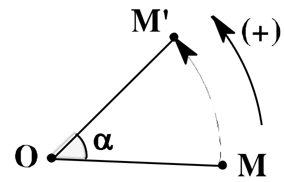
Chủ đề 2: PHÉP QUAY

I- LÝ THUYẾT:

1. Định nghĩa: Cho điểm O và ***góc lượng giác*** α .



Phép biến hình biến *O* thành chính nó, biến mỗi điểm *M* khác *O* thành điểm M' sao cho $OM = OM'$ và góc lượng giác $\left(OM;OM'\right)=\alpha$.

Ký hiệu: $Q_{(O;\alpha)}$

2. Nhận xét:

a) Phép quay tâm O góc quay $a = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là phép đồng nhất.

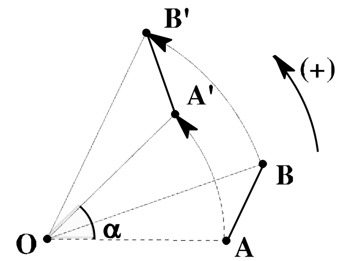
b) Phép quay tâm O góc quay $a = \left(2k+1\right)\pi, k \in \mathbb{Z}$ là phép đối xứng tâm O.

3. Tính chất:

Tính chất 1:

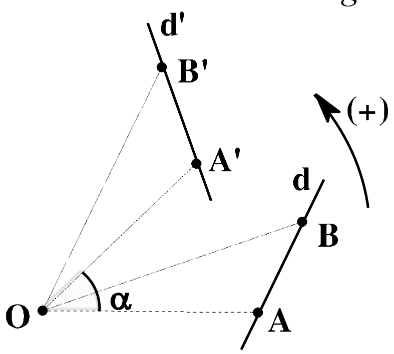
$$\forall A,\ B: \begin{cases} Q_{(O;\alpha)}\left(A\right) = A' \\ Q_{(O;\alpha)}\left(B\right) = B' \end{cases} \Rightarrow A'B' = AB$$

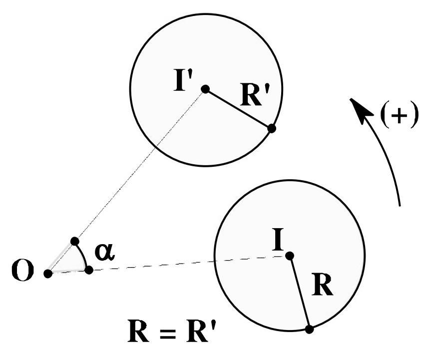
$\Rightarrow$ Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ (Phép dời hình)

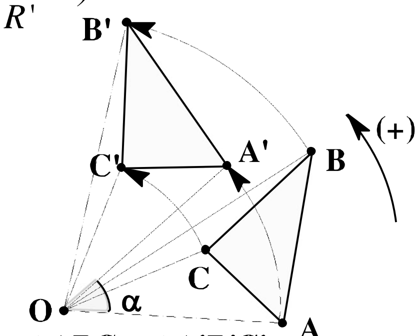


Tính chất 2: Phép quay:

1. Bảo toàn tính thẳng hàng và thứ tự của các điểm tương ứng.
2. Biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
3. *Biến đường thẳng thành đường thẳng.*
4. *Biến tam giác thành tam giác bằng nó.*(trực tâm $\longrightarrow$ trực tâm, trọng tâm $\longrightarrow$ trọng tâm). Góc thành góc bằng nó.
5. *Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (* $\begin{cases} I \longrightarrow I' \\ R = R' \end{cases}$ *).*







ΔABC = ΔA'B'C'

4. Một số kết quả và dấu hiệu sử dụng phép quay để giải toán

a. ΔABC cân tại A: $\Leftrightarrow \exists\, Q_{(A;\alpha)}(B) = C$. Đặc biệt: ΔABC vuông cân tại A: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q_{(A;90^0)}(B) = C \\ Q_{(A;-90^0)}(B) = C \end{array}\right.$

b. Chứng minh ΔABC đều: $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q_{(A;60^0)}(B) = C \\ Q_{(B;60^0)}(C) = A \end{array}\right.$

c. Chứng minh ABCD (với O là gđiểm 2 đường chéo)là hình vuông: $\Leftrightarrow \begin{cases} Q_{(O;45^0)}(A) = B \\ Q_{(O;45^0)}(B) = C \end{cases}$

*** MỘT SỐ KẾT QUẢ CẦN LƯU Ý:**

1) Ảnh của điểm qua phép quay $Q_{(O;90^0)}$, $Q_{(O;-90^0)}$:

Điểm $M(x_M;y_M)$: $\left[\begin{array}{l} Q_{(O;90^0)}(M)=M'(x';y'):\ \begin{cases}x'=-y_M\\ y'=x_M\end{cases} \\ Q_{(O;-90^0)}(M)=M'(x';y'):\ \begin{cases}x'=y_M\\ y'=-x_M\end{cases}\end{array}\right.$

2) Giả sử phép quay $Q_{(I;\alpha)}$ biến đường thẳng d thành d':

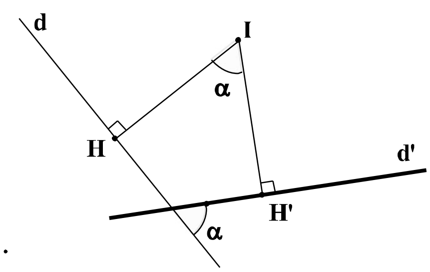
Khi đó: $\left[\begin{array}{l} 0<\alpha<90^0 \Rightarrow (d;d')=\alpha \\ 90^0<\alpha<180^0 \Rightarrow (d;d')=180^0-\alpha\end{array}\right.$

3) Các phương pháp xác định ảnh của đường thẳng d qua $Q_{(I;\alpha)}$:

Phương pháp 1: *Chọn 2 điểm bất kì. Đường thẳng ảnh đi qua 2 ảnh tương ứng.*

$$A,\ B\in d:\ \begin{cases}Q_{(I;\alpha)}(A)=A'\\ Q_{(I;\alpha)}(B)=B'\end{cases}\Rightarrow Q_{(I;\alpha)}(d)=d'\equiv A'B'$$

Phương pháp 2: *Chọn 1 điểm A thuộc đường thẳng. Xác định ảnh A'. Đường thẳng ảnh d' đi qua A' và hợp với d một góc α.*



Phương pháp 3:

Gồm 2 bước:

Bước 1: Chọn $H\in d$ với $IH\perp d$. Xác định $Q_{(I;\alpha)}(H)=H'$.

Bước 2: Đường thẳng d' cần tìm đi qua H' và vuông góc với IH'.

II- LUYỆN TẬP :

Bài tập 1: Cho điểm $M(1;2)$, Δ: $x-y+1=0$, (C): $x^2+y^2-2x-4y+1=0$. Xác định tọa độ điểm A', Δ', (C') lần lượt là ảnh của M, Δ, (C) qua:

a) Phép quay tâm O, góc quay $\alpha=90^0$.

b) Phép quay tâm O, góc quay $\alpha=-90^0$.

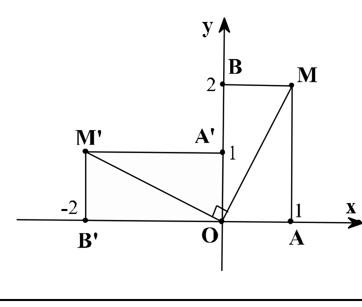
Gợi ý:

a) Ta có: $Q_{(O;90^0)}(M)=M'(-2;1)$.

Dễ thấy :

Qua phép quay $Q_{(O;90^0)}$, hình chữ nhật OAMB có ảnh

Là hình chữ nhật OA'M'B'.



Ta có: $\begin{cases}Q_{(O;90^0)}(A)=A'(0;1)\\ Q_{(O;90^0)}(B)=B'(-2;0)\end{cases}\Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M)=M'(-2;1)$

*** Kỷ năng xác định ảnh của đường thẳng qua phép quay tâm O, góc quay $\alpha=90^0$.**

Phương pháp 1: *Chọn 2 điểm bất kì trên Δ, xác định ảnh tương ứng. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai ảnh.*

Chọn $M(1;2),\ B(0;1)\in\Delta$

Ta có: $\begin{cases} Q_{(O;90^0)}(M) = M'(-2;1) \in \Delta' \\ Q_{(O;90^0)}(N) = N'(-1;0) \in \Delta' \end{cases} \Rightarrow \Delta' \equiv M'N'$.

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'(-2;1)$ và có 1 vtcp $\overrightarrow{M'N'} = (1;-1)$

Vậy $\Delta' : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Phương pháp 2: *Sử dụng mối quan hệ về góc giữa d và d'*

Gọi Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua $Q_{(O;90^0)}$. Suy ra: $\Delta' \perp \Delta \Rightarrow \Delta' : x + y + m = 0$

Chọn $M(1;2) \in \Delta \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M) = M'(-2;1) \in \Delta'$

Ta có: $-2 + 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $\Delta' : x + y + 1 = 0$

Phương pháp 3: *Sử dụng quỹ tích:* $\boxed{\forall M \in \Delta \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M) = M' \in \Delta'}$

Gọi $M(x;y) \in \Delta \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M) = M'(x';y') : \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$

Lúc đó: $M(y';-x') \in \Delta \Leftrightarrow (y') - (-x') + 1 = 0 \Leftrightarrow x' + y' + 1 = 0$

Vậy $\Delta' : x + y + 1 = 0$

Nhận xét: *Trong 3 phương pháp trên,*

- Phương pháp 1 tỏ ra hiệu quả cho tất cả các phép biến hình (dù dài dòng).

* Xác định ảnh của đường tròn:

Phương pháp 1: *Theo tính chất của phép quay: Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.*

Ta có $(C) \equiv (M;R)$: $\begin{cases} M(1;2) \\ R = 2 \end{cases}$

$Q_{(O;90^0)}(M) = M'(-2;1)$ là tâm của đường tròn ảnh (C').

Vậy đường tròn (C'): $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$

Phương pháp 2: *Sử dụng quỹ tích.*

Gọi $M(x;y) \in (C) \Rightarrow Q_{(O;90^0)}(M) = M'(x';y') : \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$

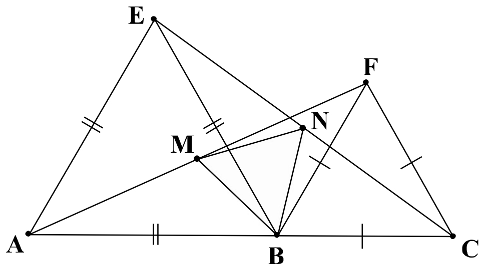
Lúc đó: $M(y';-x') \in (C) \Leftrightarrow (y')^2 + (-x')^2 - 2(y') - 4(-x') + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 + 4x' - 2y' + 1 = 0$$

Vậy (C'): $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$

<u>Bài tập 7:</u> Cho ba điểm A, B, C theo thứ tự trên thẳng hàng. Vẽ cùng một phía hai tam giác đều ABE, BCF. Gọi M và N tương ứng là hai trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng: BMN là tam giác đều.

Gợi ý: *Xây dựng phép quay tâm B góc quay* 60^0 *biến N thành M.*



Xét phép quay: $Q_{\left(B;60^0\right)}$ có : $\begin{cases} Q_{\left(B;60^0\right)}(C) = F \\ Q_{\left(B;60^0\right)}(E) = A \end{cases}$

Suy ra: $Q_{\left(B;60^0\right)}(CE) = FA$.

Do N và M lần lượt là trung điểm các cạnh CE và AF nên theo tính chất của phép quay: $Q_{\left(B;60^0\right)}(N) = M \Leftrightarrow \begin{cases} BN = BM \\ MBN = 60^0 \end{cases}$

Vậy tam giác BMN đều. (đ.p.c.m)

<u>Bài tập 8:</u> Cho tam giác ABC. Dựng về phía ngoài tam giác các hình vuông BCIJ, ACMN, ABEF và gọi O, P, Q lần lượt là tâm của của chúng.

a) Gọi D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng: ΔDOP vuông cân tại D.

b) Chứng minh rằng: AO ⊥ PQ và AO=PQ.

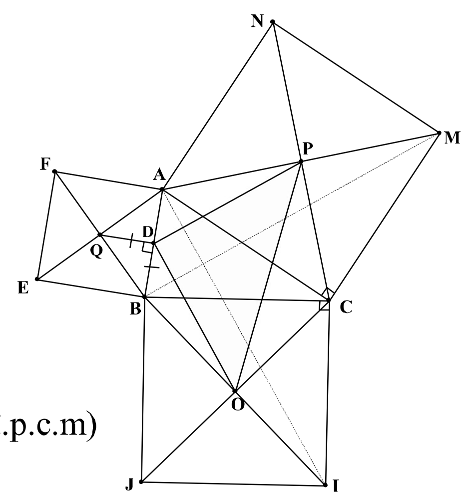
Gợi ý: *Xây dựng phép quay tâm D góc quay* 90^0 *biến O thành P, hoặc sử dụng mối quan hệ hình học liên quan.*

a) Xét phép quay $Q_{\left(C;90^0\right)}$

$$\begin{cases} Q_{\left(C;90^0\right)}(M) = A \\ Q_{\left(C;90^0\right)}(B) = I \end{cases} \Rightarrow Q_{\left(C;90^0\right)}(MB) = MI \Leftrightarrow \begin{cases} MB = AI \\ MB \perp AI \end{cases} \quad (1)$$

Dễ thấy, DP là đường trung bình của các tamgiác ABM

nên: $\begin{cases} DP = \dfrac{1}{2}BM \\ DP \,//\, BM \end{cases}$ (2)



Tương tự, DO là đường trung bình của tam giác ABI nên:

$$\begin{cases} DO = \dfrac{1}{2}AI \\ DO \,//\, AI \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra: $\begin{cases} DO = DP \\ DO \perp DP \end{cases}$ hay ΔDOP vuông cân tại D. (đ.p.c.m)

b) Theo câu a, ΔDOP vuông cân tại D nên $Q_{\left(D;90^0\right)}(O) = P$ (*)

Mặt khác: $Q_{\left(D;90^0\right)}(A) = Q$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $Q_{\left(D;90^0\right)}(AO) = QP \Leftrightarrow \begin{cases} AO = QP \\ AO \perp QP \end{cases}$ (đ.p.c.m)