§2. TẬP HỢP

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Tập hợp và phần tử

- Tập hợp (gọi tắt là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- Ta thường dừng các chữ cái in hoa để kí hiệu cho tập hợp.
- Cho tập hợp A và phần tử x. Nếu x có mặt trong tập A ta nói x là một phần tử của tập A hay x thuộc A, kí hiệu $x \in A$ hoặc $A \ni x$. Nếu x không có mặt trong tập A ta nói x không thuộc A, kí hiệu $x \notin A$ hoặc $A \not\ni x$.

2. Cách xác định tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.
- Chỉ ra các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

3. Tập hợp rỗng

Định nghĩa 1. Tập hợp rỗng, kí hiệu là $\varnothing$, là tập hợp không chứa phần tử nào.

4. Tập con. Hai tập hợp bằng nhau

- Tập hợp A gọi là tập con của tập hợp B, kí hiệu $A \subset B$ nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc B.
  Với kí hiệu đó, ta có $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- Tập rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu là $\varnothing$.
  Qui ước : $\varnothing \subset A$ với mọi tập hợp A.
- Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau, kí hiệu $A = B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và ngược lại.
  Với định nghĩa đó, ta có $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ và $B \subset A)$

5. Tính chất

Tính chất 1.

a) $\varnothing \subset A$, với mọi A.

b) $A \subset A$, với mọi A

c) Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định tập hợp - phần tử của tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp (giải phương trình nếu cần).
- Nêu đặc trưng của tập hợp.

Ví dụ 1. Xác định tập hợp A gồm 10 số nguyên tố đầu tiên bằng phương pháp liệt kê

Lời giải.

$$A = \{2;3;5;7;11;13;17;19;23;29\}$$

Ví dụ 2.

a) Tập hợp A các số thực lớn hơn 1 và nhỏ hơn 3 là $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.

b) Tập hợp S gồm các nghiệm của phương trình $x^8 + 9 = 0$ là $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^8 + 9 = 0\}$.

Ví dụ 3. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$.

b) B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+2) = 0\}$.

Lời giải.

a) $A = \{0;1;2;3;4\}$.

b) $B = \{1;2;3;4\}$.

c) Ta có $(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$

Mà $x \in \mathbb{R}$ nên $C = \{-2;1\}$.

Ví dụ 4. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - 3x + 1)(x+5) = 0\right\}$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0\right\}$.

Lời giải.

a) Ta có:

$$(2x^2 - 3x + 1)(x+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = -5. \end{array}\right.$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $A = \{1;-5\}$.

b) Ta có:

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Vì $x \in \mathbb{Q}$ nên $B = \{1;2\}$.

Ví dụ 5. Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê:

a) $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5)\right\} = 0$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 5 < n^2 < 40\right\}$.

c) $C = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\right\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}$.

Lời giải.

a) $A = \{1\}$.

b) $B = \{3; 4; 5; 6\}$.

c) $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

d) Ta có $|2x + 1| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3. \end{array}\right.$

Vậy $C = \{2; -3\}$.

Ví dụ 6. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau:

a) Tập hợp A các số chính phương không vượt quá 50.

b) Tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n(n+1) \leq 30\}$.

Lời giải.

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49\}$$
$$B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Ví dụ 7. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{0; 4; 8; 12; 16; \ldots; 52\}$.

b) $B = \{3; 6; 9; 12; 15; \ldots; 51\}$.

c) $C = \{2; 5; 8; 11; 14; \ldots; 62\}$.

Lời giải.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 16 \text{ và } x \,\vdots\, 4\right\}$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 51 \text{ và } x \,\vdots\, 3\right\}$.

c) $C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 62 \text{ và } (x - 2) \,\vdots\, 3\right\}$.

Ví dụ 8. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{2;3;5;7;11;13;17\}$.

b) $B = \{-2;4;-8;16;-32;64\}$.

Lời giải.

a) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 17 \text{ và } x \text{ là số nguyên tố}\right\}$.

b) $B = \{x = (-2)^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 6\}$.

Ví dụ 9. Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

$$A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$
$$B = \{0;7;14;21;28\}$$

Lời giải.

$$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 9\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 7 \text{ và } x \leq 28\}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. A là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 20. Liệt kê các phần tử của tập hợp A.
Lời giải. $A = \{2;3;5;7;11;13;17;19\}$.

Bài 2. Cho tập hợp $A = \{0;2;4;6;8;10\}$ Hãy xác định tập hợp A bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.
Lời giải. A là tập hợp các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn hoặc bằng 10.

Bài 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 8\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A.
Lời giải. $A = \{1;2;4;8\}$.

Bài 4. Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là ước của } 15\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A.
Lời giải. $A = \{-15;-5;-3;-1;1;3;5;15\}$.

Bài 5. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước chung của } 30 \text{ và } 20\}$.
Lời giải. $A = \{1;2;5;10\}$.

Bài 6. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của } 15 \text{ và } 20, x \leq 60\}$.
Lời giải. $A = \{0;30;60\}$.

Bài 7. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{1;2;3;4;5;6\}$.

b) $B = \{0;2;4;5;6;8\}$.

Lời giải.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x \,\vdots\, 2 \text{ và } x \leq 8\right\}$.

Bài 8. Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{0; 2; 7; 14; 23; 34; 47\}$

b) $B = \{-1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\}$

Lời giải.

$$A = \{n^2 - 2 \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 7\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 2 = 0\}$$

Bài 9. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 8\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < |x| < \dfrac{21}{4}\}$

Lời giải.

$$A = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$
$$B = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$$

Bài 10. Cho tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} \mid -5 < 5n + 2 < 303\}$. Tìm số phần tử của tập hợp X.
Lời giải. $-5 < 5n+2 < 303 \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 60$. Vậy số phần tử của tập hợp X là 62.

Bài 11. Liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| (x^2 - 4x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0\right\}$.

Lời giải. Ta có $(x^2 - 4x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = 0 \\ x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 4 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Từ đó ta có $A = \{0; -1; 1; 4\}$ chứa 4 phần tử.

Dạng 2. Tập hợp rỗng

Ví dụ 1. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?
$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\right\}$.
$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 1 = 0\right\}$.
$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$.

Lời giải. Các tập hợp rỗng là A, B.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < m \text{ và } x > 2m + 1\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m = 0\}$

Lời giải.

a) Để A là tập rỗng thì $m \geq 2m + 1 \Leftrightarrow m \leq -1$.

b) Để B là tập rỗng thì phương trình $x^2-2x+m=0$ phải vô nghiệm, tức là $\Delta'=1-m<0 \Leftrightarrow m>1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?
$A=\left\{x\in\mathbb{N} \mid x^2-\sqrt{2}=0\right\}$.
$B=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid x^2-\dfrac{1}{4}=0\right\}$.
$C=\left\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2\le 0\right\}$.
Lời giải. Tập hợp A,B.

Bài 2. Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x=m\}$. Tìm m để $A=\varnothing$.
Lời giải. Để $A=\varnothing$ thì $m\notin\mathbb{N}$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x<m+3 \text{ và } x>4m+3\}$.

b) $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-2x+m+9=0\}$

Lời giải.

a) Để A là tập rỗng thì $m+3\ge 4m+3 \Leftrightarrow m\le 0$. Vậy m thuộc tập hợp các số nguyên không dương.

b) Để B là tập rỗng thì phương trình $x^2-2x+m=0$ phải vô nghiệm, tức là $\Delta'=-8-m<0 \Leftrightarrow m>-8$. Vậy m thuộc tập hợp các số nguyên lớn hơn -8.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Viết tập hợp sau dưới dạng liệt kê các phần tử.

a) $A=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid (x^2-3x+2)(2x^2+3x+1)=0\right\}$.

b) $B=\{x\in\mathbb{N} \mid |x|<3\}$.

Lời giải.

a) $A=\{1;2;-1\}$.

b) $B\{0;1;2\}$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của m để tập hợp $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x<m\}$ là tập hợp rỗng.
Lời giải. Để $A=\varnothing$ thì $m\le 0$.

Bài 3. Cho $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 1<x-m<3\}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A=\{1\}$.
Lời giải. Để $A=\{1\}$ thì $1-m=2 \Leftrightarrow m=-1$.

Bài 4. Cho $A=\{x\in\mathbb{N} \mid -4<x<3\}$. Liệt kê tất cả các phần tử của A.
Lời giải. Ta có $A=\{0;1;2\}$.

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị của m để $A=\{x\in\mathbb{N} \mid 1<x-m<3\}$ là tập hợp rỗng.
Lời giải. Ta có $A=(m+1;m+3)\cap\mathbb{N}$. Do đó, $A=\varnothing \Leftrightarrow m+3\le 0 \Leftrightarrow m\le -3$.

Bài 6. Cho tập hợp $A=\left\{y\in\mathbb{R} \,\middle|\, y=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca},\ \text{với } a,b,c \text{ là các số thực dương}\right\}$. Tìm số nhỏ nhất của tập hợp A.
Lời giải. Ta có $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca \Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge 1$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. Vậy số nhỏ nhất là 1.

Dạng 3. Tập con. Tập bằng nhau

- Tập hợp A là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều có trong B.
  $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- $\varnothing \subset A$, với mọi tập hợp A.
- $A \subset A$, với mọi tập hợp A.
- Có tập A gồm có n phần tử $(n \in \mathbb{N})$. Khi đó, tập A có 2^n tập con.
- $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$.

Ví dụ 1. Tìm tất cả các tập con của tập $A = \{a, 1, 2\}$.

Lời giải. Tập A có $2^3 = 8$ tập con.

- 0 phần tử: $\varnothing$.
- 1 phần tử: $\{a\}$, $\{1\}$, $\{2\}$.
- 2 phần tử: $\{a, 1\}$, $\{a, 2\}$, $\{1, 2\}$.
- 3 phần tử: $\{a, 1, 2\}$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các tập con có 2 phần tử của tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lời giải. $\{1,2\}$,$\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,6\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$, $\{4,6\}$, $\{5,6\}$.

Ví dụ 3. Xác định tập hợp X biết $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 5\}$.

Lời giải. Ta có

- Vì $\{1, 2\} \subset X$ nên tập hợp X có chứa các phần tử $1, 2$.
- Vì $X \subset \{1, 2, 5\}$ nên các phần tử của tập hợp X có thể là $1, 2, 5$.

Khi đó tập hợp X có thể là $\{1, 2\}, \{1, 2, 5\}$.

Ví dụ 4. Xác định tập hợp X biết $\{a, 1\} \subset X \subset \{a, b, 1, 2\}$.

Lời giải. Ta có

- Vì $\{a, 1\} \subset X$ nên tập hợp X có chứa 2 phần tử là $a, 1$.
- Vì $X \subset \{a, b, 1, 2\}$ nên các phần tử của tập hợp X có thể là $a, b, 1, 2$.

Suy ra, tập hợp X có 2 phần tử, 3 phần tử hoặc 4 phần tử.
Khi đó, tập hợp X có thể là $\{a, 1\}, \{a, 1, 2\}, \{a, b, 1\}, \{a, b, 2\}, \{a, b, 1, 2\}$.

Ví dụ 5. Cho ba tập hợp $A = \{2; 5\}$, $B = \{x; 5\}$ và $C = \{x; y; 5\}$. Tìm các giá trị của x, y sao cho $A = B = C$.

Lời giải. $A = B \Leftrightarrow x = 2$.
Khi $x = 2$, ta có $C = \{2; y; 5\}$. Khi đó, ta có $\{2; y; 5\} \subset \{2; 5\}$ và $\{2; y; 5\} \supset \{2; 5\}$. Từ đây, suy ra $y = 2$ hoặc $y = 5$.
Vậy $(x; y) = (2; 2)$ hoặc $(x; y) = (2; 5)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 3 \text{ và } 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 6\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Trước hết, ta cần chứng minh $A \subset B$. Thật vậy, với $x \in A$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và x chia hết cho 3. Vì $2, 3$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên x chia hết cho 6. Suy ra, $x \in B$.
Mặt khác, vì $6 = 2.3$ nên với phần tử $x \in B$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và 3. Suy ra, $x \in A$. Do đó, $B \subset A$.

Ví dụ 7. Cho biết x là một phần tử của tập hợp A, xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $x \in A$. b) $\{x\} \in A$. c) $x \subset A$. d) $\{x\} \subset A$.

Lời giải.

a) $x \in A$: đúng.

b) $\{x\} \in A$: sai về quan hệ giữa hai tập hợp.

c) $x \subset A$: sai về quan hệ giữa phần tử và tập hợp.

d) $\{x\} \subset A$: đúng.

Ví dụ 8. Xác định tất cả các tập hợp con của mỗi tập hợp

a) $A = \{x; y\}$. b) $B = \{1; 2; 3\}$

Lời giải.

a) Các tập hợp con của tập hợp $A = \{x; y\}$ là: $\varnothing$; $\{x\}$; $\{y\}$; $\{x; y\}$.

b) Các tập hợp con của tập hợp $B = \{1; 2; 3\}$ là: $\varnothing$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{1; 2\}$; $\{1; 3\}$; $\{2; 3\}$ và $\{1; 2; 3\}$.

Ví dụ 9. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp A sao cho tổng các phần tử này là một số lẻ.

Lời giải. Để tổng của ba số nguyên là một số lẻ thì trong ba số chỉ có một số lẻ hoặc cả ba số đều lẻ. Nói cách khác tập con này của A phải có một số lẻ hoặc ba số lẻ.
Chỉ có một tập con gồm ba số lẻ của A là $\{1; 3; 5\}$. Các tập con gồm ba số của A trong đó có một số lẻ là: $\{1; 2; 4\}$; $\{1; 2; 6\}$; $\{1; 4; 6\}$;$\{3; 2; 4\}$; $\{3; 2; 6\}$; $\{3; 4; 6\}$; $\{5; 2; 4\}$; $\{5; 2; 6\}$; $\{5; 4; 6\}$.

Ví dụ 10. Trong hai tập hợp A và B dưới đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

a) A là tập hợp các hình chữ nhật
B là tập hợp các hình bình hành.

b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước chung của } 12 \text{ và } 18\}$
$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 6\}$

Lời giải.

a) Tất cả các hình chữ nhật đều là hình bình hành nên $A \subset B$.

b) $A = \{1;2;3;6\}$. $B = \{1;2;3;6\}$
Rõ ràng ta thấy $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$.

Ví dụ 11. Cho $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước của } 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2-1)(x-2)(x-4) = 0\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X \subset B$.

Lời giải. Liệt kê các phần tử của tập hợp A và B ta được :
$A = \{1;2\}$; $B = \{-1;1;2;4\}$.
Muốn tìm tập X thỏa điều kiện $A \subset X \subset B$ đầu tiên ta lấy $X = A$, sau đó ghép thêm các phần tử thuộc B mà không thuộc A. Với cách thực hiện như trên, ta có các tập hợp X thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $X = A = \{1;2\}$, rồi ghép thêm vào một phần tử ta được: $\{-1;1;2\}$;$\{4;1;2\}$
Ghép thêm vào A hai trong bốn phần tử còn lại của B ta được : $X = B = \{-1;1;2;4\}$

Ví dụ 12. Cho $A = \{8k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $A \subset B$.

Lời giải. Ta cần chứng minh mọi phần tử của A đều thuộc B.
Giả sử $x \in A, x = 8k+3$.
Khi đó ta có thể viết $x = 8k+2+1 = 2(4k+1)+1$.
Đặt $l = 4k+1$, x được viết thành $x = 2l+1$. Vậy $x \in B$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các tập con của mỗi tập hợp sau:

a) $A = \{1;2\}$.

b) $B = \{a;b;c\}$.

Lời giải.

a) Các tập hợp con của tập hợp $A = \{1;2\}$ là: $\varnothing$; $\{1\}$; $\{2\}$; $\{1;2\}$.

b) Các tập hợp con của tập hợp $B = \{a;b;c\}$ là: $\varnothing$; $\{a\}$; $\{b\}$; $\{c\}$; $\{a;b\}$; $\{a;c\}$; $\{b;c\}$; và $\{a;b;c\}$.

Bài 2. Cho các tập hợp

$$A = \{2;3;5\}; \qquad B = \{-4;0;2;3;5;6;8\}; \qquad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-7x+10 = 0\}.$$

Hãy xác định xem tập nào là tập con của tập còn lại.
Lời giải. Ta có $x^2-7x+10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 5 \end{array}\right. \Rightarrow C = \{2;5\}$. Vậy $C \subset A \subset B$.

Bài 3. Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x-2)(x-4) = 0\}; \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 4\}.$$

Hai tập hợp A và B, tập hợp nào là tập con của tập còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?
Lời giải. Ta có $A = \{1;2;4\}$; $B = \{1;2;4\}$. Ta thấy $A \subset B$; $B \subset A$, nên $A = B$

Bài 4. Cho các tập hợp:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+x-6 = 0 \text{ hoặc } 3x^2-10x+8 = 0\right\}$$
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-x-2 = 0 \text{ và } 2x^2-7x+6 = 0\right\}.$$

a) Viết tập hợp A, B bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

b) Tìm tất cả các tập X sao cho $B \subset X$ và $X \subset A$.

Lời giải. Ta giải các phương trình:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \end{array}\right.$$
$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$
$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right..$$

a) $A = \left\{2; -3; \dfrac{4}{3}\right\}$; $B = \{2\}$.

b) X là những tập hợp sau: $\{2\}$; $\{2; -3\}$; $\left\{2; \dfrac{4}{3}\right\}$; $\left\{2; -3; \dfrac{4}{3}\right\}$.

Bài 5. Tìm tập hợp

a) có đúng một tập con.

b) có đúng hai tập con.

Lời giải.

a) Tập hợp có đúng một tập con là $\varnothing$.

b) Tập $A = \{a\}$. A có đúng hai tập con là A và $\varnothing$.

Bài 6. Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 3 \text{ và } 4\},\ B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 12\}.$$

Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Giả sử $x \in B$, khi đó x chia hết cho 12, suy ra x chia hết cho 3 và x chia hết cho 4, suy ra $x \in A$, do đó $B \subset A$.

Giả sử $x \in A$, khi đó x chia hết cho 3 và x chia hết cho 4, mà 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên suy ra x chia hết cho 3.4, hay x chia hết cho 12, suy ra $x \in B$, do đó $A \subset B$.

Vậy $A = B$.

Bài 7. Gọi A là tập hợp các tam giác đều, B là tập hợp các tam giác có góc 60°, C là tập hợp các tam giác cân, D là tập hợp các tam giác vuông có góc 30°. Hãy nêu mối quan hệ giữa các tập hợp trên.

Lời giải. Vì tam giác đều là tam giác có ba góc bằng 60° nên $A \subset B$. Tam giác đều cũng là tam giác cân nên $A \subset C$. Tam giác vuông có góc 30° thì góc còn lại là 60^0 nên $D \subset B$.

Bài 8. Cho $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

a) Chứng minh rằng $2 \in A, 7 \notin B$. Số 18 có thuộc tập A không?

b) Chứng minh rằng $B \subset A$.

Lời giải.

a) Ta có $2 = 2 + 3.0 \Rightarrow 2 \in A$. Ta thấy $x \in B$ thì x có dạng $x = 6k + 2$ chia hết cho 2 nên $-7 \notin B$.
Giả sử số $18 \in A \Rightarrow 18 = 3k + 2 \Rightarrow k = \dfrac{16}{3}$ (vô lý) vì $k \in \mathbb{Z}$. Vậy $18 \notin A$.

b) Xét $x \in B$. Ta có $x = 2 + 6k$ với $k \in \mathbb{Z}$. Suy ra $x = 2 + 3(2k)$. Do $2k \in \mathbb{Z}$ nên $x \in A$. Vậy $B \subset A$.

Bài 9. Tìm tất cả các tập con của tập hợp $B = \{a, b, 2, 5\}$.
Lời giải. Vì tập hợp B có 4 phần tử nên tập B có $2^4 = 16$ tập con.

- 0 phần tử: $\varnothing$.
- 1 phần tử: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{2\}$, $\{5\}$.
- 2 phần tử: $\{a, b\}$, $\{a, 2\}$, $\{a, 5\}$, $\{b, 2\}$, $\{b, 5\}$, $\{2; 5\}$.
- 3 phần tử: $\{a, b, 2\}$, $\{a, b, 5\}$, $\{a, 5, 2\}$, $\{5, b, 2\}$.
- 4 phần tử : $\{a, b, 2, 5\}$

Bài 10. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp $D = \{2, 3, 4, 6, 7\}$.
Lời giải. $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 3, 7\}$,$\{2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{3, 4, 7\}$,$\{3, 6, 7\}$, $\{4, 6, 7\}$.

Bài 11. Xác định tập hợp X biết $\{a\} \subset X \subset \{a, 3, 4\}$.
Lời giải. Tập hợp X có thể là $\{a\}, \{a, 3\}, \{a, 4\}, \{a, 3, 4\}$.

Bài 12. Xác định tập hợp X biết $\{a, 9\} \subset X \subset \{a, b, 7, 8, 9\}$ và tập hợp X có 3 phần tử.
Lời giải. Tập hợp X có thể là $\{a, 9, b\}, \{a, 7, 9, \}, \{a, 8, 9\}$.

Bài 13. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho 2 và 5}\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ có chữ số tận cùng bằng } 0\}$. Chứng minh rằng $A = B$.
Lời giải. Trước hết, ta cần chứng minh $A \subset B$. Thật vậy, với $x \in A$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và x chia hết cho 5. Vì $2, 5$ là hai số nguyên tố cùng nhau nên x chia hết cho 10. Suy ra, $x \in B$.
Mặt khác, với phần tử $x \in B$ bất kì, vì x có chữ số tận cùng là 0 nên x chia hết cho 2 và 5. Suy ra, $x \in A$. Do đó, $B \subset A$.

Bài 14. Tìm giá trị các tham số m và n sao cho $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0\} = \{1; 2\}$.
Lời giải. Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0\}$ và $B = \{1; 2\}$.
Vì $1 \in A$ nên $-m + n = 0$.
Vì $2 \in A$ nên $-4m + 2n = -7$.
Từ đây, ta có hệ phương trình $m = n = \dfrac{7}{2}$.
Ngược lại, với $m = n = \dfrac{7}{2}$, ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + \dfrac{7}{2}x - 1 = 0\} = \{1; 2\} = B$.

Bài 15. Cho A là tập hợp tất cả các tứ giác lồi, B là tập hợp tất cả các hình thang, C là tập hợp tất cả các hình bình hành, D là tập hợp tất cả các hình chữ nhật. Xác định mối quan hệ giữa các tập hợp đã cho.
Lời giải. $D \subset C \subset B \subset A$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho các tập hợp

$$A = \{1; 2\}; \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}; \qquad C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}.$$

Hãy xác định mối quan hệ giữa các tập hợp trên.
Lời giải. Ta có $B = \{1; 2\}$; $C = \{0; 1; 2\}$ Vậy $A \subset C$; $B \subset C$; $A = B$.

Bài 2. Cho A là tập hợp các số nguyên chia cho 3 dư 2, B là tập hợp các số nguyên chia cho 6 dư 2 hoặc dư 5. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Ta chứng minh mọi phần tử của A đều là phần tử của B và ngược lại.
Trước hết ta thấy rằng một số chia hết cho 3 thì chia cho 6 dư 0 hoặc dư 3 nên một số chia cho 3 dư 2 thì chia cho 6 dư 2 hoặc dư 5. Tức là nếu $x \in A, x = 3k + 2$ thì x có thể viết thành $x = 6l + 2$ hoặc $x = 6l + 5$ hay $x \in B$. Ngược lại, $x \in B$ xét hai trường hợp:

- Nếu $x = 6k + 2 = 3(2k) + 2$. Đặt $l = 2k \Rightarrow x = 3l + 2 \Rightarrow x \in A$
- Nếu $x = 6k + 5 = 3(2k + 1) + 2$. Đặt $l = 2k + 1 \Rightarrow x = 3l + 2 \Rightarrow x \in A$

Vậy $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$ (điều phải chứng minh).

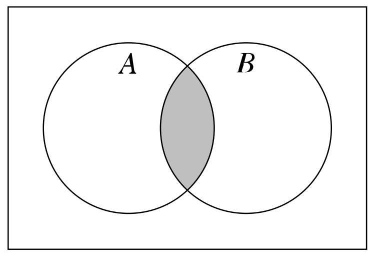
§3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Giao của hai tập hợp

Định nghĩa 1. Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc tập hợp A, vừa thuộc tập hợp B được gọi là giao của A và B. Kí hiệu $C = A \cap B$.

Vậy $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.

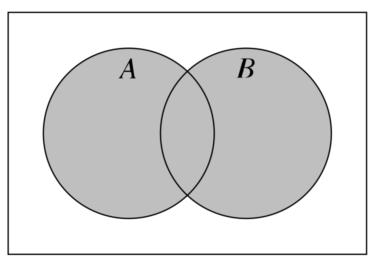


⚠ $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$

2. Hợp của hai tập hợp

Định nghĩa 2. Tập hợp C gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B được gọi là hợp của A và B. Kí hiệu $C = A \cup B$.

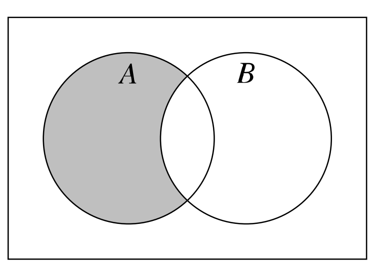
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.



⚠ $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B. \end{array} \right.$

3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

$A \backslash B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$.



• Phép lấy phần bù: Cho $A \subset E$. Phần bù của A trong E là $\mathscr{C}_E A = E \backslash A$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Tìm giao và hợp của các tập hợp

Dựa vào định nghĩa giao và hợp của hai tập hợp để tìm kết quả.

Ví dụ 1. Cho hai tập hợp $A = \{1;2;3;5;7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n$ là ước số của $12\}$. Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

Lời giải. Ta có: $B = \{1;2;3;4;6;12\}$. Vậy: $A \cap B = \{1;2;3\}$ và $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7;12\}$.

Ví dụ 2. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x \leq 4\}$ và $C = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq a\}$. Tìm số nguyên a để tập hợp $B \cap C = \varnothing$.

Lời giải. Ta có $B = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$, $C = \{\ldots, a-1, a\}$.
Để $B \cap C = \varnothing$ thì $a \leq -4$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$.

Lời giải.

- $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, suy ra $A \cap B \subset A$.
- $x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \text{ (do } A \subset B) \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap B$, suy ra $A \subset A \cap B$.
  Vậy $A \cap B = A$.

Ví dụ 4. Cho A là tập hợp học sinh lớp 12 của trường Buôn Ma Thuột và B là tập hợp học sinh của trường Buôn Ma Thuột dự kiến sẽ lựa chọn thi khối A vào các trường đại học. Hãy mô tả các học sinh thuộc tập hợp sau

a) $A \cap B$. b) $A \cup B$.

Lời giải.

a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 12 thi khối A của trường Buôn Ma Thuột.

b) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh hoặc lớp 12 hoặc chọn thi khối A của trường Buôn Ma Thuột.

Ví dụ 5. Cho hai tập hợp A, B biết : $A = \{a;b\}, B = \{a;b;c;d\}$. Tìm tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

Lời giải. $X = \{c;d\}$; $\{b;c;d\}$; $\{a;c;d\}$; $\{a;b;c;d\}$.

Ví dụ 6. Xác định tập hợp $A \cap B$ biết

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 3\},\ B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 7\}.$$

Lời giải. Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} | x$ là bội của 3 và bội của $7\} = \{x \in \mathbb{N} | x$ là bội của $21\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai tập hợp A và B. Tìm $A \cap B, A \cup B$ biết

a) $A = \{x | x$ là ước nguyên dương của $12\}$ và $B = \{x | x$ là ước nguyên dương của $18\}$.

b) $A = \{x | x$ là ước nguyên dương của $27\}$ và $B = \{x | x$ là ước nguyên dương của $15\}$.

Lời giải.

a) $A = \{1;2;4;6;12\}, B = \{1;2;3;6;9;18\} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \{1;2;6\} \\ A \cup B = \{1;2;3;4;6;9;12;18\} \end{cases}$

b) $A = \{1;3;9;27\}, B = \{1;3;5;15\} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \{1;3\} \\ A \cup B = \{1;3;5;9;15;27\} \end{cases}$

Bài 2. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} | 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm $A \cap (B \cup C)$.
Lời giải. Ta có $A = \{0;2;4;6;8;10\}$; $B = \{0;1;2;3;4;5;6\}$ và $C = \{4;5;6;7;8;9;10\}$
$B \cup C = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ nên $A \cap (B \cup C) = \{0;2;4;6;8;10\}$

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{1;2;3;4;5\}$ và $B = \{0;2;4\}$. Xác định $A \cap B$, $A \cup B$.
Lời giải. Ta có $A \cap B = \{2;4\}$ và $A \cup B = \{0;1;2;3;4;5\}$.

Bài 4. Cho các tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\right\}$ và $B = \left\{n \in \mathbb{N} | 3 < n^2 < 30\right\}$. Tìm $A \bigcap B$.

Lời giải. Ta có: $A = \left\{0;2;-\dfrac{1}{2}\right\}, B = \{2;3;4;5\}$ nên $A \bigcap B = \{2\}$.

Bài 5. Cho a là số nguyên. Tìm a để giao của hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq a\},\ B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,|\, x > \frac{3a-4}{2}\right\}$$

bằng rỗng.
Lời giải. Ta có $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow a \leq \dfrac{3a-4}{2} \Leftrightarrow a \geq 4$.

Bài 6. Cho hai tập hợp bất kì A, B. Chứng minh rằng $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.
Lời giải.

- Nếu $A = B$ thì $A \cap B = A, A \cup B = A$ nên $A \cup B = A \cap B$.
- Ngược lại, giả sử $A \cup B = A \cap B$. Lấy một phần tử bất kì $x \in A$ ta suy ra $x \in A \cup B$. Vì $A \cup B = A \cap B$ nên $x \in A \cap B$. Từ đó suy ra $x \in B$ nên $A \subset B$. Tương tự ta cũng có $B \subset A$. Vậy $A = B$.

Bài 7. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 8\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 5\}$. Tìm $A \cap B$; $A \cup B$.
Lời giải. Ta có $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$; $B = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$.
Vậy $A \cap B = \{0;1;2;3;4;5\}$ và $A \cup B = \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7\}$.

Bài 8. Tìm điều kiện cần và đủ để hợp của hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n < a\}$ và $B = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m > 2a + 1\}$ bằng $\mathbb{Z}$.
Lời giải. Ta có $A \cup B = \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2a + 1 < a \Leftrightarrow a < -1$.

Bài 9. Cho tập $A = \{0;1;2\}$ và tập $B = \{0;1;2;3;4\}$. Tìm tập C sao cho $A \cup C = B$.
Lời giải. Đầu tiên ta tìm tập C có số phần tử ít nhất thỏa yêu cầu bài toán đó là tập $C_0 = B \backslash A = \{3,4\}$. Kế tiếp ta ghép các phần tử của tập A vào. Vậy các tập cần tìm là

$$C_1 = \{3;4,0\}, C_2 = \{3;4,1\}, C_3 = \{3;4,2\},$$
$$C_4 = \{3;4;0;1\}, C_5 = \{3;4;0;2\}, C_6 = \{3;4;1;2\}, C_7 = \{3;4;0;1;2\}.$$

Tổng cộng có 8 tập thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 10. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \big| |x-1| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \big| |x-1| > 2\}$. Tìm $A \cap B$.
Lời giải. Ta có $|x-1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-1 < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 5$, $A = \{-2;-1;0;1;2;3;4\}$.
Lại có $|x-1| > 2 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 3$, $B = \{\ldots;-3;-2;4;5;6;\ldots\}$ nên $A \cap B = \{-2;4\}$.

Bài 11. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, 2m-1 < x < 2m+3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \big| |x| < 2\}$. Tìm m để $A \cap B = \varnothing$.
Lời giải. Ta có $B = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -2 < x < 2\} = \{-1;0;1\}$ và $A = \{2m,\ldots,2m+2\}$.

$$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+2 \leq -2 \\ 2m \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$$

Bài 12. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x < 4\}$ và tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N}^* \,|\, n$ là số nguyên tố $n \leq 5\}$. Xác định tập hợp $A \cap B$ và $A \cup B$.
Lời giải. $A = \{0;1;2;3\}$ và $B = \{2;3;5\}$. Khi đó $A \cap B = \{2;3\}$ và $A \cup B = \{0;1;2;3;5\}$.

Bài 13. Cho tập $S = \{1;2;3;4;5;6\}$. Tìm các tập con A, B của tập S sao cho $A \cup B = \{1;2;3;4\}$ và $A \cap B = \{1;2\}$.
Lời giải.

- A có hai phần tử $A = \{1;2\} \Rightarrow B = \{1;2;3;4\}$.
- A có ba phần tử $A = \{1;2;3\} \Rightarrow B = \{1;2;4\}$.
- A có ba phần tử $A = \{1;2;4\} \Rightarrow B = \{1;2;3\}$.
- A có bốn phần tử $A = \{1;2;3;4\} \Rightarrow B = \{1;2\}$.

Vậy ta có 4 cặp tập A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 14. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 4x + m + 2 = 0\}$ và tập hợp $B = \{1;2\}$. Tìm m để $A \cap B = \varnothing$.
Lời giải.

- TH1: $A = \varnothing$ tương đương pt: $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ vô nghiệm, tức là $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 2$.
- TH2: $A \neq \varnothing$ tương đương pt: $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm khác $1,2 \Leftrightarrow m \neq 1; m \neq 2; m \leq 2$.
- Vậy kết hợp lại ta có $m \neq 1; m \neq 2$.

Dạng 2. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

Dựa vào định nghĩa hiệu và phần bù của hai tập hợp để tìm kết quả.

⚠ *Chú ý*

- *Nếu $A \subset B$ thì $B \backslash A = C_B A$.*
- *Nếu $A = \varnothing$ thì $A \backslash B = \varnothing$ với mọi tập hợp B.*

Ví dụ 7. Cho $A = \{1,2,3,4,5\}$ và $B = \{1,3,5,7\}$. Tìm các tập hợp $A \backslash B, B \backslash A$.

Lời giải. Các phần tử $2,4$ thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B nên $A \backslash B = \{2,4\}$.
Chỉ có phần tử 7 thuộc tập hợp B nhưng không thuộc tập hợp A nên $B \backslash A = \{7\}$

Ví dụ 8. Cho A là tập hợp các tự nhiên lẻ. Tìm phần bù của A trong tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên.

Lời giải. Các số tự nhiên chẵn thuộc tập hợp $\mathbb{N}$ nhưng không thuộc tập hợp A nên phần bù của A trong $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn. Do đó $C_{\mathbb{N}} A = \{2k / k \in \mathbb{N}\}$.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng $A \backslash B = \varnothing$ thì $A \subset B$.

Lời giải. Lấy $x \in A$. Nếu $x \notin B$ thì $x \in A \backslash B$ (mâu thuẫn). Do đó $x \in B$. Vậy $A \subset B$.

Ví dụ 10. Cho các tập hợp $A=\{4;5\}$ và $B=\{n\in N|n\leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho $A\backslash B=A$.

Lời giải. Ta có $B=\{0,1,\cdots,a\}$. Để $A\backslash B=A$ thì các phần tử của A không thuộc B. Suy ra $a\leq 3$. Vậy $a\in\{0,1,2,3\}$.

Ví dụ 11. Cho hai tập hợp A,B. Biết $A\backslash B=\{1,2\},B\backslash A=\{3\}$ và $B=\{3,4,5\}$. Tìm tập hợp A.

Lời giải. Ta có $A\backslash B=\{1,2\}$ nên $1,2\in A$.
Mà $B\backslash A=\{3\}$ nên $3\notin A$ và $4,5\in A$.
Suy ra $A=\{1;2,4,5\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Cho A là tập hợp các học sinh của một lớp và B là tập hợp các học sinh giỏi Toán của lớp. Hãy mô tả tập hợp C_AB.
Lời giải. C_AB là tập hợp các học sinh không giỏi Toán của lớp.

Bài 16. Cho A là tập hợp các ước nguyên dương của 12 và B là tập hợp các ước nguyên dương của 18. Tìm các tập hợp $A\backslash B$ và $B\backslash A$.
Lời giải. Ta có $A=\{1,2,3,4,6,12\}$ và $B=\{1,2,3,6,9,18\}$ nên $A\backslash B=\{4,12\};B\backslash A=\{9;18\}$.

Bài 17. Chứng minh rằng $A\backslash B=B\backslash A$ thì $A=B$.
Lời giải. Lấy $x\in A\backslash B=B\backslash A$ thì $x\in A;x\notin B$ và $x\in B,x\notin A$. Suy ra $A\backslash B=B\backslash A=\varnothing$.
Suy ra $A\subset B$ và $B\subset A$. Vậy $A=B$.

Bài 18. Cho hai tập hợp A,B. Biết $A\backslash B=\{a,b;c\},B\backslash A=\{d,e\}$ và $B=\{d,e,f\}$. Tìm tập hợp A.
Lời giải. $A=\{a,b,c,f\}$.

Bài 19. Cho các tập hợp $A=\{n\in N|2<n\leq 7\}$ và $B=\{n\in N|n\leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho:

a) $A\backslash B=A$.

b) $A\backslash B=\varnothing$.

Lời giải. $A=\{3,4,5,6,7\},B=\{0,1,2,\cdots,a\}$.

a) Ta có $A\backslash B=A$ khi mọi phần tử của A đều không thuộc B. Suy ra $a\leq 2$. Vậy $a\in\{0;1,2\}$.

b) Ta có $A\backslash B=\varnothing$ khi $A\subset B$. Suy ra $a\geq 7$.

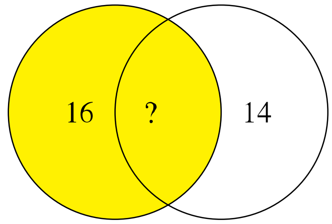
Bài 20. Cho hai tập hợp $A=\{2k+1|k\in\mathbb{N}\}$ và $B=\{3k|k\in\mathbb{N}\}$. Tìm tập hợp $B\backslash A$.
Lời giải. $B\backslash A=\{6k|k\in\mathbb{N}\}$.

Dạng 3. Sử dụng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A\cup B$ để giải toán

- Phương pháp biểu đồ Ven:
  - Sử dụng các hình tròn giao nhau để mô tả các đại lượng và mối quan hệ giữa chúng.
  - Biểu đồ Ven cho ta cách nhìn trực quan và mối quan hệ giữa các đại lượng từ đó tìm ra các yếu tố chưa biết.
- Công thức số phần tử $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

Ví dụ 12. Trong năm vừa qua, trường THPT A có 25 bạn thi học sinh giỏi 2 môn Văn và Toán. Trong đó có 14 bạn thi Toán và 16 bạn thi Văn. Hỏi trường có bao nhiêu bạn thi cả 2 môn Văn và Toán.

Lời giải.
Cách 1: Sử dụng sơ đồ Ven như hình vẽ

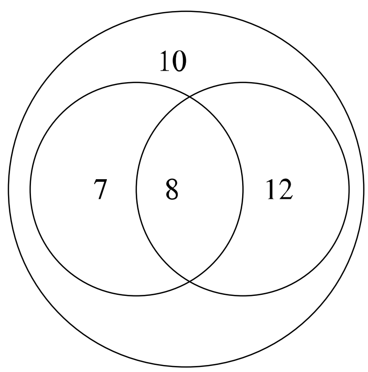


- Ta thấy Số bạn thi toán mà không thi văn là $25-16=9$ (bạn).
- Số bạn thi cả 2 môn (phần giao nhau) là $14-9=5$ (bạn).

Cách 2: Gọi A,B lần lượt là tập hợp các bạn thi học sinh giỏi Toán và Văn. Ta có $|A|=14$, $|B|=16$, $|A\cup B|=25$. Theo công thức ta có $|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=14+16-25=5$ (bạn).

Ví dụ 13. Lớp $10A$ có 15 bạn thích môn Văn, 20 bạn thích môn Toán. Trong số các bạn thích văn hoặc toán có 8 bạn thích cả 2 môn. Trong lớp vẫn còn 10 bạn không thích môn nào trong 2 môn Văn và Toán. Hỏi lớp $10A$ có bao nhiêu bạn.

Lời giải. Ta sử dụng sơ đồ Ven để giải bài toán.



- Hình tròn to thể hiện số học sinh cả lớp.
Như vậy, ta có:
- Số bạn chỉ thích Văn là $15-8=7$(bạn).
- Số bạn chỉ thích Toán là $20-8=12$(bạn).
- Số học sinh cả lớp là tổng các phần không giao nhau: $7+8+12+10=37$.

Ví dụ 14. Mỗi học sinh của lớp $10A$ đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả 2 môn thể thao. Hỏi lớp $10A$ có bao nhiêu học sinh.

Lời giải. Ngoài sơ đồ Ven ta có thể dùng công thức số phần tử. Gọi A là tập hợp các học sinh chơi bóng đá, B là tập các học sinh chơi bóng chuyền. Do đó $A\cap B$ là tập các học sinh chơi cả hai môn. Ta có

$$|A|=25, |B|=20, |A\cap B|=10.$$

Số học sinh cả lớp là số phần tử của tập $A\cup B$. Theo công thức ta có $|A\cup B|=25+20-10=35$ (học sinh).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 21. Một lớp có 40 học sinh, mỗi học sinh đều đăng ký chơi ít nhất 1 trong 2 môn thể thao là bóng đá hoặc cầu lông. Có 30 học sinh có đăng ký môn bóng đá, 25 học sinh có đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả 2 môn.
Lời giải. Số học sinh đăng ký cả hai môn là $30+25-40=15$ (học sinh).

Bài 22. Ở xứ sở của thần Thoại ngoài các vị thần thì còn có các sinh vật gồm 27 con người, 311 con yêu quái một mắt, 205 con yêu quái tóc rắn và yêu quái vừa một mắt vừa tóc rắn. Tìm số yêu quái vừa một mắt vừa tóc rắn biết có tổng số sinh vật là 500 con.
Lời giải.

- Số sinh vật không phải con người là $500-27=473$ (con).
- Gọi A,B lần lượt là tập hợp yêu quái một mắt và yêu quái tóc rắn. Khi đó $|A|=311$, $|B|=205$, $|A\cup B|=473$.
- Vậy số yêu quái vừa một mắt vừa tóc rắn là $|A\cap B|=311+205-473=43$ (con).

Bài 23. Trong 45 học sinh lớp 10A có 20 bạn xếp học lực giỏi, 15 bạn đạt hạnh kiểm tốt, trong đó có 7 bạn vừa đạt hạnh kiểm tốt vừa có học lực giỏi. Hỏi

a) Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết muốn được khen thưởng thì hoặc học sinh giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.

b) Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xét học lực giỏi và hạnh kiểm tốt.

Bài 24. Một lớp có 25 học sinh khá các môn tự nhiên, 24 học sinh khá các môn xã hội, 10 học sinh khá cả 2 và 3 học sinh không khá môn nào. Hỏi:

a) Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá tự nhiên.

b) Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá xã hội.

c) Lớp có bao nhiêu hoặc khá tự nhiên hoặc khá xã hội.

d) Lớp có bao nhiêu em học sinh.

Bài 25. Lớp 10A có 35 bạn học sinh làm kiểm tra toán. Đề bài gồm 3 bài toán. Sau khi kiểm tra, cô giáo tổng hợp kết quả như sau: có 20 em giải được bài toán thứ nhất; 14 em giải được bài toán 2; 10 em giải được bài toán 3; 5 em giải được bài toán 2 và bài toán 3; 2 em giải được bài toán 1 và bài toán 2; 6 em giải được bài toán 1 và bài toán 3, chỉ có 1 học sinh đạt được điểm 10 vì giải được cả 3 bài. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh không giải được bài nào.
Lời giải. Đáp số: 3 bạn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Cho tập hợp $F=\{n\in\mathbb{N}\,|-2<n<3\}$ và tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên. Xác định tập hợp $F\cap\mathbb{Z}$.
Lời giải. $F\cap\mathbb{Z}=\{0;1;2\}$

Bài 27. Cho $X=\{1;2;3;4;5;6\}$ biết tập $A\subset X$, $A\cap\{2;4;6\}=\{2\}$ và $A\cup\{2;4;6\}=\{2;3;4;5;6\}$. Tìm tập A.
Lời giải. Ta thấy $2\in A$ và $\{3;5\}\subset A$ và các số $1\notin A;4\notin A;6\notin A$. Vậy tập $A=\{2;3;5\}$.

Bài 28. Cho hai tập hợp $A=\{-3;-2;0;1;2;5;9\}$, $B=\{-2;0;3;8;15\}$. Hãy xác định các tập hợp $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$.
Lời giải. Ta có:

$$A\cup B=\{-3;-2;0;1;2;3;5;8;9;15\}\,,A\cap B=\{-2;0\}$$
$$A\backslash B=\{-3;1;2;5;9\}\,,B\backslash A=\{3;8;15\}\,.$$

Bài 29. Kí hiệu H là tập hợp các học sinh của lớp $10A$; T là tập hợp các học sinh nam và G là tập hợp các học sinh nữ của lớp $10A$. Hãy xác định các tập hợp sau:

$a)$ $T\cup G$; $b)$ $T\cap G$; $c)$ $H\backslash T$; $d)$ $G\backslash T$; $e)$ $\mathbb{C}_H G$.

Lời giải.

$a)$ $T\cup G$ là tập hợp các học sinh trong lớp $10A$, $T\cup G=H$.

$b)$ $T\cap G=\varnothing$.

$c)$ $H\backslash T=G$.

$d)$ $G\backslash T=G$.

$e)$ $\mathbf{C}_H G=H\backslash G=T$.

Bài 30. Cho các tập hợp $A=\{x\in\mathbb{Z}||x+2|<3\}, B=\{x\in\mathbb{Z}|\dfrac{x^2}{x+2}\in\mathbb{Z}\}$. Tìm $A\cup B$.
Lời giải. Ta có $|x+2|<3\Leftrightarrow -5<x<1$ nên $A=\{-4;-3;-2;-1;0\}$.
Lại có $\dfrac{x^2}{x+2}=x-2+\dfrac{4}{x+2}$ nên $\dfrac{x^2}{x+2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{4}{x+2}\in\mathbb{Z}$.
Từ đó suy ra $x+2\in\{-4;-2;-1;1;2;4\}$ nên $B=\{-6;-4;-3;-1;0;2\}$.
Vì vậy $A\cup B=\{-6;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$

Bài 31. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn và không lớn hơn 10, $B=\{n\in\mathbb{N}|n\leq 6\}$ và $C=\{n\in\mathbb{N}|4\leq n\leq 10\}$. Hãy tìm

$a)$ $A\cap(B\cup C)$; $b)$ $(A\backslash B)\cup(A\backslash C)\cup(B\backslash C)$.

Lời giải. $A=\{0;2;4;6;8;10\}, B=\{0;1;2;3;4;5;6\}, C=\{4;5;6;7;8;9;10\}$.
$a)$ $B\cup C=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}\Rightarrow A\cap(B\cup C)=\{0;2;4;6;8;10\}$.
$b)$ Ta có: $A\backslash B=\{8;10\}, A\backslash C=\{0;2\}, B\backslash C=\{0;1;2;3\}$. Vậy:

$$(A\backslash B)\cup(A\backslash C)\cup(B\backslash C)=\{0;1;2;3;8;10\}.$$

Bài 32. Cho A,B,C là ba tập hợp rời nhau đôi một. X là tập hợp sao cho các tập $X\cap A$, $X\cap B$, $X\cap C$ có đúng 1 phần tử. Hỏi tập X có ít nhất là bao nhiêu phần tử?
Lời giải. Giả sử $X\cap A=\{a\}, X\cap B=\{b\}, X\cap C=\{c\}$. Khi đó $a,b,c\in X$. Do A, B, C rời nhau đôi một nên a, b, c phải khác nhau đôi một. Vậy tập X có ít nhất là 3 phần tử.

Bài 33. Cho $A=\{1;2;3\}, B=\{1;2;3;4;5;6\}$.

$a)$ Xác định tập hợp $B\backslash A$.

$b)$ Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A\subset X$ và $X\subset B$.

Lời giải.

$a)$ Ta có $B\backslash A=\{4;5;6\}$.

$b)$ Vì $A\subset X$ nên $1,2,3$ thuộc X, do đó, để $X\subset B$ thì các tập hợp X thỏa mãn đầu bài là:

$$X=\{1;2;3\}, X=\{1;2;3;4\}, X=\{1;2;3;5\}, X=\{1;2;3;6\},$$
$$X=\{1;2;3;4;5\}, X=\{1;2;3;4;6\}, X=\{1;2;3;5;6\}, X=\{1;2;3;4;5;6\}.$$