

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Với $k \in \mathbb{Z}$, ta có các phương trình lượng giác cơ bản sau

$$\begin{aligned} \text{— } \sin a = \sin b &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = \pi - b + k2\pi. \end{cases} & \text{— } \tan x = \tan b &\Leftrightarrow a = b + k\pi. \\ \text{— } \cos a = \cos b &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b + k2\pi \\ a = -b + k2\pi. \end{cases} & \text{— } \cot x = \cot b &\Leftrightarrow a = b + k\pi. \end{aligned}$$

Nếu đề bài cho dạng độ (a°) thì ta sẽ chuyển $k2\pi \rightarrow k360^\circ$, $k\pi \rightarrow k180^\circ$, với $\pi = 180^\circ$.
Những trường hợp đặc biệt

$$\begin{aligned} \text{— } \sin x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. & \text{— } \cos x = 1 &\Leftrightarrow x = k2\pi. \\ \text{— } \sin x = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi. & \text{— } \cos x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \\ \text{— } \sin x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. & \text{— } \cos x = -1 &\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi. \\ \text{— } \tan x = 0 &\Leftrightarrow x = k\pi. & \text{— } \cot x = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi. \\ \text{— } \tan x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. & \text{— } \cot x = 1 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \\ \text{— } \tan x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. & \text{— } \cot x = -1 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình

① $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

ĐS: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

② $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

ĐS: $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

③ $\tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3}$.

ĐS: $x = 45^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$

④ $\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

ĐS: $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

① $\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

② $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

$$\textcircled{3} \tan(2x - 30^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x - 30^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 45^\circ + k90^\circ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{4} \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

$$\textcircled{1} \sin x = \sin \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1.$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{4} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{5} \cos x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{ĐS: } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{6} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{4} \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \\ x = -\frac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{5} \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{6} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2.

① $2\sin(x + 30^\circ) + \sqrt{3} = 0.$

ĐS: $\begin{cases} x = -90^\circ + k360^\circ \\ x = -150^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

② $\cot(4x + 35^\circ) = -1.$

ĐS: $x = -20^\circ + k45^\circ (k \in \mathbb{Z})$

③ $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0.$

ĐS: $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

④ $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0.$

ĐS: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

⑤ $\tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0.$

ĐS: $x = 30^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$

⑥ $\sqrt{2}\sin 2x + 2\cos x = 0.$

ĐS: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

⑦ $\sin x + \sqrt{3}\sin \frac{x}{2} = 0.$

ĐS: $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k4\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

⑧ $\sin 2x \cos 2x + \frac{1}{4} = 0.$

ĐS: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

⑨ $\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}.$

ĐS: $x = \frac{\pi}{32} + \frac{k\pi}{8} (k \in \mathbb{Z})$

B MỘT SỐ KỸ NĂNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

□ DẠNG 3.1. Sử dụng thành thạo cung liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$
Cung hơn kém π	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$	
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$	
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$	
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$	

Tính chu kỳ

$\sin(x + k2\pi) = \sin x$	$\cos(x + k2\pi) = \cos x$
$\sin(x + \pi + k2\pi) = -\sin x$	$\cos(x + \pi + k2\pi) = -\cos x$
$\tan(x + k\pi) = \tan x$	$\cot(x + k\pi) = \cot x$

1 **VÍ DỤ**

VÍ DỤ 1. Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

① $\sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$

ĐS:
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

② $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải.

① Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{6} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{5\pi}{6} - x\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là
$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

② Điều kiện: $2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{6} - x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow 3x &= \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

□

VÍ DỤ 2. Giải phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

$$\textcircled{1} \sin 3x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{2} \tan x \cdot \tan 3x + 1 = 0.$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) &= -\sin 3x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - x = -\frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

$$\textcircled{2} \text{ Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét $\tan 3x = 0$ không là nghiệm, khi đó phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \frac{\tan x}{\cot 3x} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan x &= -\cot 3x \\ \Leftrightarrow \tan x &= \tan\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x &= 3x + \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

$$\textcircled{1} \sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{3} \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{4} \cot\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{17\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải.

① Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + x\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm là } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

② Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm

③ Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{5} = 2x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{4} \text{ Điều kiện } \begin{cases} 2x - \frac{3\pi}{4} \neq k\pi \\ x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{2\pi}{3} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cot\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) &= \cot\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{3\pi}{4} &= -x + \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{17\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } x = \frac{17\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định).

① $\cos(3x + 45^\circ) = -\cos x.$

ĐS: $\begin{cases} x = 33,75^\circ + k90^\circ \\ x = -112,5^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

② $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$

ĐS: $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{13\pi}{12} - k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

③ $\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x.$

ĐS: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$

④ $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0.$

ĐS: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0.$

ĐS: $\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑥ $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0.$

ĐS: $x = -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải.

① Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \cos(3x + 45^\circ) = \cos(180^\circ - x) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x + 45^\circ = 180^\circ - x + k360^\circ \\ 3x + 45^\circ = x - 180^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 33,75^\circ + k90^\circ \\ x = -112,5^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = 33,75^\circ + k90^\circ \\ x = -112,5^\circ + k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

② Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} - 2x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{13\pi}{12} - k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{13\pi}{12} - k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

③ Phương trình tương đương

$$\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan(-x) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = -x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

④ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) &= \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = x - \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

⑤ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

⑥ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= \tan(-2x) \\ \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} &= -2x + k\pi \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 4x - 2\cos^2 x + 1 = 0$.

ĐS: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$$\textcircled{2} \quad 2\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin x = \cos 8x.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{3} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{4} \quad 2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos 5x + 1.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{5} \quad \sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3}.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải.

① Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin 4x = \cos 2x &\Leftrightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

② Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos 8x + \cos 2x + \sin x = \cos 8x &\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

③ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x = 0 &\Leftrightarrow \sin 2x = \sin(-x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -x + k2\pi \\ 2x = \pi + x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

④ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \cos 5x + \cos x = 0 &\Leftrightarrow \cos 5x = \cos(\pi - x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \pi - x + k2\pi \\ 5x = x - \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

⑤ Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} + x\right) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{4\pi}{9} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{4\pi}{9} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau (giả sử điều kiện được xác định)

① $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{4}\right).$

ĐS: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

② $\cos 2x = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right).$

ĐS: $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

③ $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot x.$

ĐS: $x = \frac{7\pi}{40} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$

BÀI 5. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

ĐS: $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

② $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0.$

ĐS: $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

③ $\cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$

ĐS: Vô nghiệm.

$$\textcircled{4} \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) = 0.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{11\pi}{60} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{8\pi}{15} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{5} \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{60} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{6} \tan 2x \cdot \tan 3x = 1.$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} (k \in \mathbb{Z}).$$

BÀI 6. Giải các phương trình lượng giác sau

$$\textcircled{1} \sin 5x + 2\cos^2 x = 1.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{14} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{2} \cot 2x = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}.$$

$$\text{ĐS: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{2\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{7\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{4} \cos 2x \cos x + \cos x = \sin 2x \sin x.$$

$$\text{ĐS: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{5} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) = 2.$$

$$\text{ĐS: } x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

DẠNG 3.2. Ghép cung thích hợp để áp dụng công thức tích thành tổng

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$

 Khi áp dụng tổng thành tích đối với hai hàm sin và cosin thì được hai cung mới là $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$. Do đó khi sử dụng nên nhớ (tổng và hiệu) hai cung mới này trước để nhóm hạng tử thích hợp sao cho xuất hiện nhân tử chung (cùng cung) với hạng tử còn lại hoặc cụm ghép khác trong phương trình cần giải.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Giải phương trình $\sin 5x + \sin 3x + \sin x = 0$.

$$\text{ĐS: } \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin 5x + \sin 3x + \sin x &= 0 \Leftrightarrow (\sin 5x + \sin x) + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x = 0 \\ \Leftrightarrow \sin 3x(2 \cos 2x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ 2 \cos 2x + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = k\pi \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \\ x = -\frac{\pi}{3} + l\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x = \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$. $\square$

VÍ DỤ 2. Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 = 0$. **ĐS:** $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3}, (k, l \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos 2x + \cos x + 1 &= 0 \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x) + (\cos 2x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos^2 x &= 0 \Leftrightarrow 2 \cos x (\cos 2x + \cos x) = 0 \\ \Leftrightarrow 4 \cos 2x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos \frac{3x}{2} = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (k, l, m \in \mathbb{Z}) \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3} \quad (k, l, m \in \mathbb{Z}). \\ x = \pi + m2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3} + \frac{l2\pi}{3}, (k, l \in \mathbb{Z})$. $\square$



BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

ĐS: $\frac{k\pi}{2}, \pm \frac{2\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

② $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.

ĐS: $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \pm \frac{\pi}{3} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

③ $1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x = 0$.

ĐS: $\frac{k\pi}{2}, -\frac{\pi}{6} + m2\pi, \frac{7\pi}{6} + m2\pi, (k, m \in \mathbb{Z})$

④ $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

ĐS: mnp

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}
& \sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow \sin 2x(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 2 \cos x + 1 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, x = \pm \frac{2\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$.

② Ta có

$$\begin{aligned}
& \cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos 2x + \cos 3x = 0 \\
& \Leftrightarrow \cos 3x(2 \cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ 2 \cos 2x + 1 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, x = \pm \frac{\pi}{3} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$.

③ Ta có

$$\begin{aligned}
& 1 - \sin x - \cos 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x \sin x + 2 \sin^2 x = 0 \\
& \Leftrightarrow 2 \sin x(\cos 2x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\sin x \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k\pi \\ \cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ 2x = x + \frac{\pi}{2} + l2\pi \\ 2x = -\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}) \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + l2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{l2\pi}{3} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác, ta được phương trình có nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + m2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + m2\pi, (k, m \in \mathbb{Z})$.

④ Ta có

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x &= 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{7x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) &= 0 \Leftrightarrow 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos \frac{5x}{2} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + k2\pi, x = \frac{\pi}{5} + \frac{k2\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z})$.

□

BÀI 2. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x = 1$.

ĐS: $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3}, (k, l \in \mathbb{Z})$

② $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

ĐS: $\frac{\pi}{2} + k\pi, \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

③ $\cos 3x - 2 \sin 2x - \cos x - \sin x = 1$.

ĐS: $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, -\frac{\pi}{12} + l\pi, \frac{7\pi}{12} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

④ $4 \sin 3x + \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x = 0$.

ĐS: $\frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned} \sin 5x + \sin x + 2 \sin^2 x &= 1 \Leftrightarrow (\sin 5x + \sin x) - (1 - 2 \sin^2 x) = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos 2x - \cos 2x &= 0 \Leftrightarrow \cos 2x (2 \sin 3x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 2 \sin 3x - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{l2\pi}{3}, (k, l \in \mathbb{Z})$.

② Ta có

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= 1 + \cos x + \cos 2x \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x \\ \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x &= 2 \cos^2 x + \cos x \Leftrightarrow \sin 2x (2 \cos x + 1) - \cos x (2 \cos x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \cos x (2 \cos x + 1) (2 \sin x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \cos x + 1 = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$).

③ Ta có

$$\begin{aligned} \cos 3x - 2\sin 2x - \cos x - \sin x &= 1 \Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) - 2\sin 2x - (\sin x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x - 2\sin 2x - (\sin x + 1) &= 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\sin 2x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + 1 = 0 \\ 2\sin 2x + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + l\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{12} + l\pi$, $x = \frac{7\pi}{12} + l\pi$, ($k, l \in \mathbb{Z}$).

④ Ta có

$$\begin{aligned} 4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x \cos 2x &= 0 \Leftrightarrow 4\sin 3x + \sin 5x + \sin x - \sin 3x = 0 \\ \Leftrightarrow 3\sin 3x + 2\sin 3x \cos 2x &= 0 \Leftrightarrow \sin 3x(3 + 2\cos 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ 3 + 2\cos 2x = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x &= \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{k\pi}{3}$, ($k \in \mathbb{Z}$).

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$.

ĐS: $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + l2\pi, \frac{5\pi}{6} + l2\pi, k, l \in \mathbb{Z}$

② $\sin x - 4\cos x + \sin 3x = 0$.

ĐS: $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

③ $\cos 3x + 2\sin 2x - \cos x = 0$.

ĐS: $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

④ $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.

ĐS: $\frac{k2\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI 4. Giải các phương trình lượng giác sau

① $\sin 5x + \sin 3x + 2\cos x = 1 + \sin 4x$.

ĐS: $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

② $\cos 2x - \sin 3x + \cos 5x = \sin 10x + \cos 8x$.

ĐS: $\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{30} + \frac{l2\pi}{5}, \frac{5\pi}{30} + \frac{l2\pi}{5}, (k, l \in \mathbb{Z})$

③ $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$.

ĐS: $k\pi, \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{6} + l2\pi, \frac{7\pi}{6} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$

④ $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

ĐS: $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \pm \frac{2\pi}{3} + l2\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$