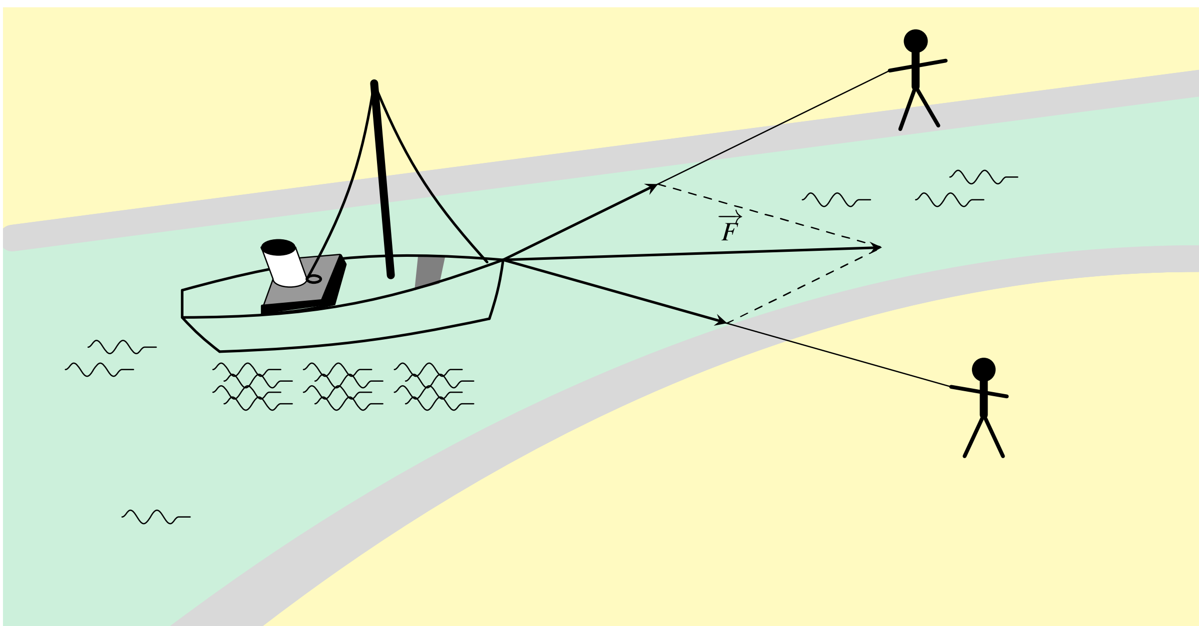
Chương 1

VECTƠ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA



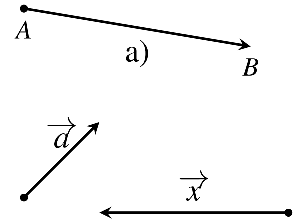
Hình 1.1

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Định nghĩa, sự xác định véc-tơ

Định nghĩa 1 (Véc-tơ). *Véc-tơ* là một đoạn thẳng có hướng.

Véc-tơ có điểm đầu (gốc) A, điểm cuối (ngọn) B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
Véc-tơ còn được kí hiệu là $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$,... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.
Một véc-tơ hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.



Hình 1.2

⚠ *Với hai điểm phân biệt A và B ta chỉ có một đoạn thẳng (AB hoặc BA), nhưng có hai véc-tơ khác nhau là* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{BA}$.

Định nghĩa 2 (Độ dài véc-tơ). Độ dài của đoạn thẳng AB là độ dài (hay mô-đun) của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Tức là $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.

Đương nhiên $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$.

Định nghĩa 3 (Véc-tơ-không). Véc-tơ-không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Véc-tơ-không được kí hiệu là $\overrightarrow{0}$.

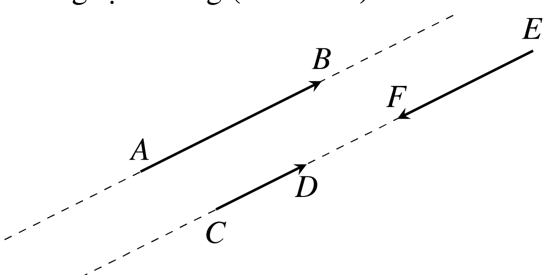
Ta có $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$

2. Hai véc-tơ cùng phương, cùng hướng

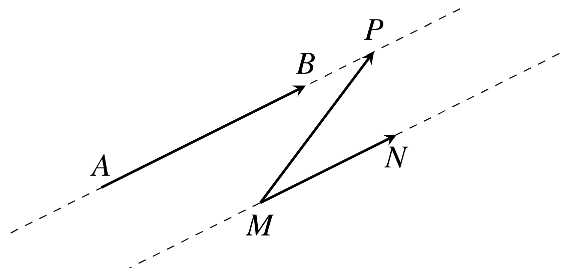
Định nghĩa 4 (Giá véc-tơ). Giá của một véc-tơ khác $\overrightarrow{0}$ là đường thẳng chứa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

Định nghĩa 5 (Phương, hướng véc-tơ). Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Trên hình 1.3a) ta có các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ cùng phương. Trên hình 1.3b) ta có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$ cùng phương, còn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MP}$ không cùng phương.
Hai véc-tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$ ngược hướng (hình 1.3a).



Hình 1.3a)



Hình 1.3b)

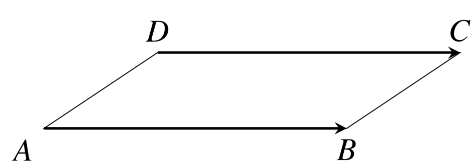
Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

⚠ *Khi nói hai véc-tơ cùng hướng hay ngược hướng thì chúng đã cùng phương. Véc-tơ $\overrightarrow{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi véc-tơ.*

3. Hai véc-tơ bằng nhau

Định nghĩa 6 (Véc-tơ bằng nhau). Hai véc-tơ gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

Chẳng hạn, nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



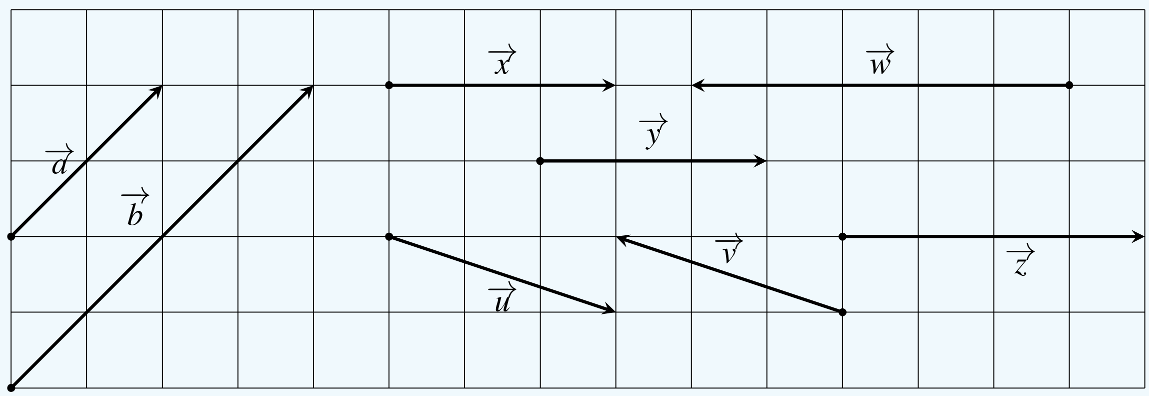
⚠ *Khi cho trước véc-tơ $\overrightarrow{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$.*
Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định một véc-tơ, phương hướng của véc-tơ, độ dài của véc-tơ

- Xác định một véc-tơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai véc-tơ theo định nghĩa.
- Dựa vào các tình chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một véc-tơ.

Ví dụ 1. Trong hình 1.4, hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các véc-tơ bằng nhau.



Hình 1.4

Lời giải.

+ Các véc-tơ cùng phương: $\vec{a}$ và $\vec{b}$; $\vec{u}$ và $\vec{v}$; $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ và $\vec{w}$.
+ Các véc-tơ cùng hướng: $\vec{a}$ và $\vec{b}$; $\vec{x}$, $\vec{y}$ và $\vec{z}$.
+ Các véc-tơ ngược hướng: $\vec{u}$ và $\vec{v}$; $\vec{w}$ và $\vec{x}$; $\vec{w}$ và $\vec{y}$; $\vec{w}$ và $\vec{z}$.
+ Các véc-tơ bằng nhau: $\vec{x} = \vec{y}$.

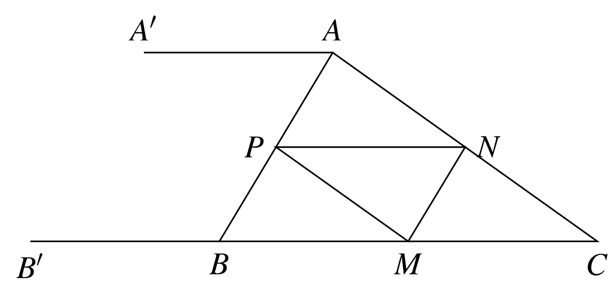
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

a) Liệt kê tất cả các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

b) Liệt kê các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu là A hoặc B.

Lời giải.



a) Các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}$.

b) Các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$.

c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là véc-tơ có điểm đầu là B và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$.

Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP. Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

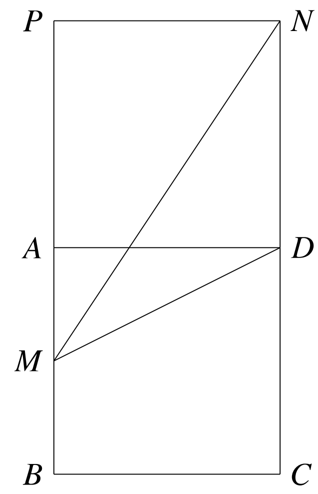
Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là véc-tơ có điểm đầu là A và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$.

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông MAD ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$



Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.
Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \dfrac{a}{2} = \dfrac{3a}{2}$.
Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ngũ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ $\overrightarrow{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Lời giải. Từ hai điểm phân biệt, chẳng hạn A, B, ta xác định được hai véc-tơ khác véc-tơ-không là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$. Mà từ năm đỉnh A, B, C, D, E của ngũ giác ta có 10 cặp điểm phân biệt, do đó có 20 véc-tơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O. Tìm các véc-tơ từ 5 điểm A, B, C, D, O

a) Bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OB}$.

b) Có độ dài bằng $\left|\overrightarrow{OB}\right|$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

b) $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OD}$.

Bài 3. Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.

a) Khi nào thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng?

b) Khi nào thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng?

Lời giải.

a) A nằm ngoài đoạn BC.

b) A nằm trong đoạn BC.

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì ba điểm A, B, C có đặc điểm gì?

b) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì bốn điểm A, B, C, D có đặc điểm gì?

Lời giải.

a) B là trung điểm của AC.

b) A, B, C, D thẳng hàng hoặc $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 5. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG. Tính độ dài của các véc-tơ $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BI}$.

Lời giải. Sử dụng tính chất của trọng tâm và định lý Pythagoras.

Đáp án: $\left|\overrightarrow{AG}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\left|\overrightarrow{BI}\right| = \dfrac{a\sqrt{21}}{6}$

Dạng 2. Chứng minh hai véc-tơ bằng nhau

Để chứng minh hai véc-tơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

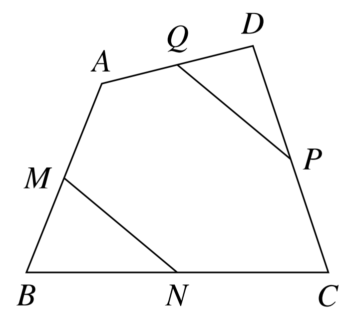
Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải.

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN \parallel AC$ và $MN = \dfrac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự, QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP \parallel AC$ và $QP = \dfrac{1}{2}AC$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp hình vẽ suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.



Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GA}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

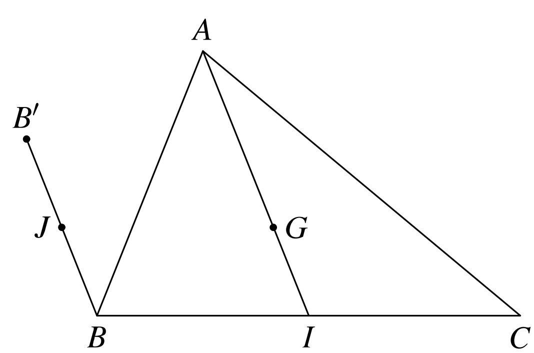
Lời giải.

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $BB' = AG$ và $BB' \parallel AG$. Do đó $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{JG}$ cùng hướng (1).

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG = \dfrac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ = \dfrac{1}{2}BB'$. Vì vậy $BJ = IG$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

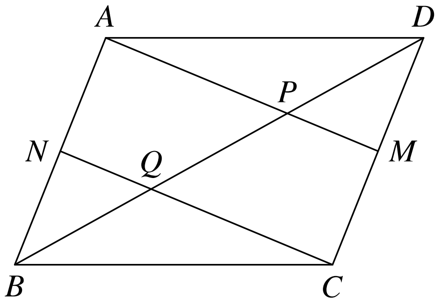


BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB; P là giao điểm của AM và DB; Q là giao điểm của CN và DB. Chứng minh $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải.

Chứng minh $DP = PQ$ dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác DQC và $PQ = QB$ dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác ABP. Suy ra $DP = PQ = QB$.



Bài 7. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Chứng minh rằng:

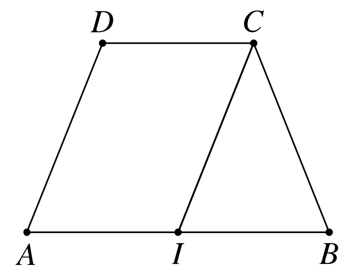
a) $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$.

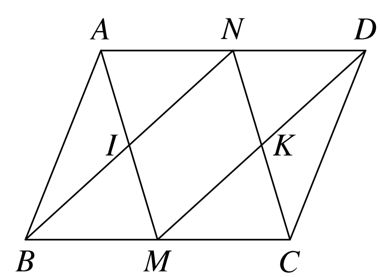
Lời giải.

a) Chứng minh $BICD$ là hình bình hành.

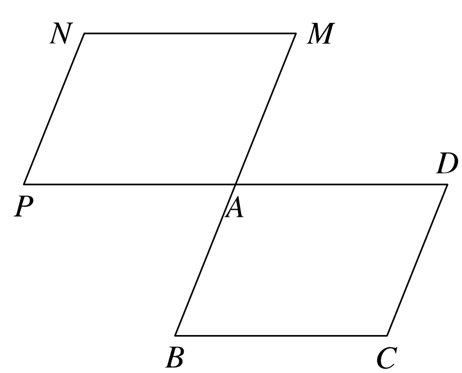
b) Chứng minh I là trung điểm AB và dữ kiện tứ giác $BICD$ là hình bình hành đã chứng minh ở câu a.



Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Điểm I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của DM và CN. Chứng minh $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$.
Lời giải.
Theo giả thiết M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD nên $AN = \dfrac{1}{2}AD$ và $BM = \dfrac{1}{2}BC$. Mà $AD = BC$ do $ABCD$ là hình bình hành. Suy ra $ANMB$ là hình bình hành.
Ta có Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AM và BN của hình bình hành $ANMB$ nên I là trung điểm của BN.
Tương tự, ta cũng chứng minh được K là trung điểm của DM. Từ đó dễ dàng chứng minh được $DKBI$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$.

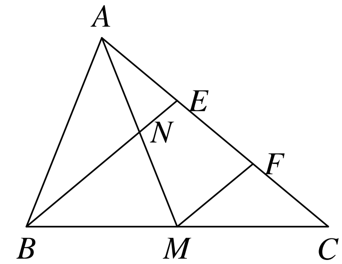


Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0}$.
Lời giải.
Chứng minh $AMNP$ và $QMNP$ đều là hình bình hành, suy ra $A \equiv Q$, suy ra $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0}$.



Bài 10. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N. Chứng minh $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.
Lời giải.

$FM \parallel BE$ vì FM là đường trung bình của tam giác CEB.
Ta có $EA = EF$. Vậy EN là đường trung bình của tam giác AFM. Suy ra N là trung điểm của AM. Vậy $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.



BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F, M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD và DA.

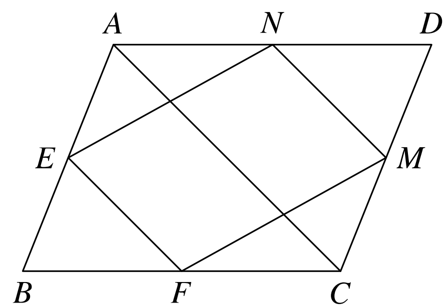
a) Chứng tỏ rằng 3 vectơ $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương;

b) Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Dựa vào tính chất đường trung bình, ta suy ra được $EF \parallel AC \parallel MN \Rightarrow \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương;

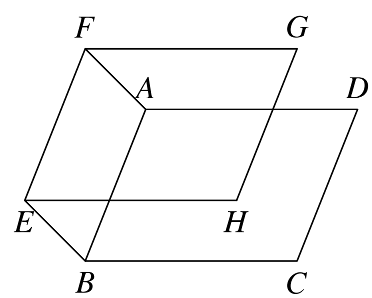
b) Dựa vào tính chất đường trung bình, ta suy ra được $EF = MN = \dfrac{1}{2}AC$ kết hợp với câu a) $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành.



Bài 12. Cho hai bình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Dựng $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh $CDGH$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$ nên tứ giác $EFGH$ là hình bình hành, suy ra $GH \parallel FE \parallel AB \parallel DC$ và $GH = FE = AB = DC$ hay tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.



Bài 13. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC, phân giác ngoài góc A cắt BC ở D. Giả sử giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM với AB, AC lần lượt là E, F (khác A). Gọi N là trung điểm của đoạn EF. Chứng minh hai véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

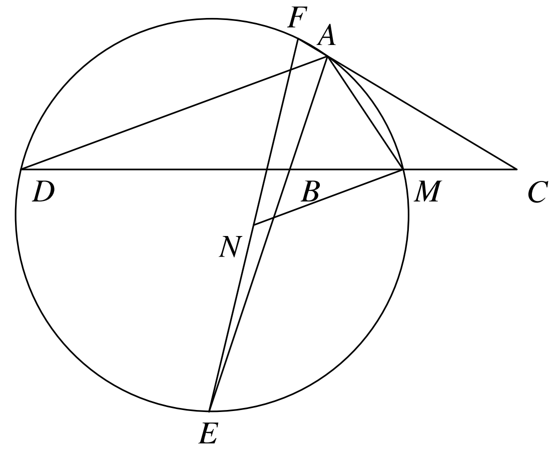
Lời giải.

Kẻ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi P là điểm chính giữa cung BC không chứa A, $PA \perp DA$. Q là điểm chính giữa cung BC chứa A. Ta có A, D, Q thẳng hàng và P, M, O, Q cũng thẳng hàng.

Dễ nhận thấy DP là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM. Tam giác PEF cân tại P từ đó có DP là trung trực của EF nên $DP \perp EF$ tại N.

Hai tam giác PED và PCQ đồng dạng, EN và CM là đường cao nên suy ra $\dfrac{PN}{PD} = \dfrac{PM}{PQ} \Rightarrow MN \parallel DQ$.

Vậy, $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.



Bài 14. Cho tam giác ABC có O nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện lần lượt tại M, N, P. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt MN, MP tại H, K. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$.

Lời giải.

Do $HK \parallel BC$ nên ta có: $\dfrac{OH}{BM} = \dfrac{ON}{BN} \Rightarrow OH = \dfrac{ON}{BN}.BM$, $\dfrac{OK}{CM} = \dfrac{OP}{CP} \Rightarrow OK = \dfrac{OP}{CP}.CM$. (1)

Mặt khác, ta lại có $\dfrac{ON}{BN} = \dfrac{S_{AON}}{S_{ABN}} = \dfrac{S_{CON}}{S_{CBN}} = \dfrac{S_{AON}+S_{CON}}{S_{ABN}+S_{CBN}} = \dfrac{S_{AOC}}{S_{ABC}}$, $\dfrac{OP}{CP} = \dfrac{S_{AOB}}{S_{ABC}} \Rightarrow \dfrac{ON}{BN}.\dfrac{CP}{OP} = \dfrac{S_{AOC}}{S_{ABC}}.\dfrac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \dfrac{S_{AOC}}{S_{AOB}} = \dfrac{CM}{BM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OK = OH$. Vì vậy, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$.