**PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ TRONG BÀI TOÁN**

**PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT**

**I. LÝ THUYẾT**

**Cơ sở lý thuyết.**

Cho hàm số  liên tục trên . Nếu  đơn điệu trên  và thì phương trình .

**Nhận dạng**:

Phương trình, bất phương trình chưa hai thành phần hàm số là Hàm số đại số (đa thức, phân thức, căm thức) và hàm số siêu việt (mũ, lôgarit)

**Phương pháp**

+ Biến đổi phương trình (bất phương trình về dạng 

+ Nếu  đơn điệu trên  và thì .

+ Nếu  đồng biến trên  và thì .

+ Nếu  nghịch biến trên  và thì .

**II. VÍ DỤ MINH HỌA**

**Ví dụ 1.** Có bao nhiêu số nguyên  để phương trình  có hai nghiệm phân biệt lớn hơn .

**A.** . **B.** . **C.** Vô số. **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: .

- Ta có:







Xét hàm số:  trên , có , ,

Do đó hàm số  đồng biến trên 



 .

- Xét hàm số:  trên , có .

- Bảng biến thiên:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |



- Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình  có hai nghiệm phân biệt lớn hơn  khi và chỉ khi , do  nên , hay có  giá trị nguyên của  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Ví dụ 2.** Cho  là hai số thực dương thỏa mãn . Có tất cả giá trị nguyên dương của tham số  để phương trình  có nghiệm?

**A.** 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giải thiết suy ra và 











Xét hàm số  trên , có , ,

Do đó hàm số  đồng biến trên .

Phương trình đã cho tương đương với 

 có nghiệm trên 



Vậy có 5 giá trị nguyên dương 

**Ví dụ 3**. Cho phương trình: . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  để phương trình (1) có nghiệm ?

**A.** 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do  nên từ phương trình suy ra 

Phươngtrình







Xét hàm số .Tacó:.

 đồng biến trên 





Xét hàm số  trên 



Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số .

**Ví dụ 4.**  Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  để bất phương trình  nghiệm đúng với ?

**A.** 10. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

Do  và Đ nên . 

Ta có: 



Xét hàm số  với 

 đồng biến trên .

Bất phương trình tương đương với



 nghiệm đúng  khi tam thức vế trái có hai nghiệm 

Vậy có 6 giá trị nguyên dương.

**Ví dụ 5.** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

.

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**







Xét hàm số  với .

 đồng biến trên .

Bất phương trình tương đương với





Vậy bất phương trình có 6 nghiệm nguyên

**Ví dụ 6.** Có bao nhiêu giá trị nguyên  để với mỗi giá trị của  có đúng 5 số nguyên  thỏa mãn .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có 



Xét hàm số  nên hàm số  đồng biến trên khoảng .

Suy ra

Xét hàm số  có bảng biến thiên:

Diagram

Description automatically generated

Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán. Vậy có 15 giá trị thoả mãn.

**III. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Câu 1: (Đề minh họa 2023)** Có bao nhiêu cặp số nguyên  thỏa mãn



**A.** 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

**Câu 2:** Cho phương trình  với  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

**Câu 3:** Có bao nhiêu số nguyên sao cho tồn tại  thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 4:** Gọi  là tập hợp các số nguyên  thỏa mãn . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  để tập hợp  có nhiều nhất **** phần tử?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 5:** Có bao nhiêu số nguyên dương  sao cho tồn tại số thực  thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 6:** Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương  sao cho tồn tại số thực  thỏa mãn:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 7:** Có bao nhiêu số nguyên  sao cho ứng với mỗi , tồn tại ít nhất mười số nguyên  thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 8:** Có bao nhiêu số nguyên  sao cho ứng với mỗi , tồn tại ít nhất  số nguyên  thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 9:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của để tồn tại duy nhất giá trị nguyên của sao cho thỏa mãn bất phương trình ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 10:** Có bao nhiêu số nguyên dương  sao cho ửng với mỗi  tồn tại đúng 8 số thực  thỏa mãn 

**A.** 1024. **B.** 1028. **C.** 1023. **D.** 1026.

**Câu 11:** Gọi  là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số  để bất phương trình  có miền nghiệm chứa đúng 4 giá trị nguyên của biến . Số phần tử của  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 12:** Cho hàm số . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  thuộc đoạn  để bất phương trình  nghiệm đúng với mọi .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 13:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ , điểm biểu diễn nghiệm của bất phương trình . Có bao nhiêu điểm  có tọa độ nguyên thuộc hình tròn tâm  bán kính ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Câu 14:** Có bao nhiêu số nguyên  sao cho ứng với mỗi  tồn tại ít nhất  số nguyên  thỏa mãn 

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **

**Câu 15:** Cho hai số  là các số nguyên dương khác . Gọi là tích các nghiệm của phương trình: . Hỏi  nguyên và đạt giá trị nhỏ nhất khi

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Câu 16:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  thuộc đoạn  để bất phương trình

 nghiệm đúng với ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**LỜI GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

.

**Câu 1: (Đề minh họa 2023)** Có bao nhiêu cặp số nguyên  thỏa mãn



**A.** 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: .

Ta có: 







Đặt: , bất phương trình trở thành:  (1).

Xét hàm số  có .

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng .

Ta có 

Từ đó suy ra: .

Đếm các cặp giá trị nguyên của 

Ta có: , mà  nên .

Với  nên có 10 cặp.

Với  nên có 14 cặp.

Với  nên có 14 cặp.

Với  nên có 9 cặp.

Với  có 1 cặp.

Vậy có 48 cặp giá trị nguyên  thỏa mãn đề bài.

.

**Câu 2:** Cho phương trình  với  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** 

**Lời** **giải**

Điều kiện: 

Đặt:  .

Xét hàm số .

Do đó: .

Xét hàm số , 

Do: , suy ra phương trình có nghiệm luôn thỏa điều kiện.

, .

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên .

Vậy có  giá trị nguyên của  thỏa ycbt.

**Câu 3:** Có bao nhiêu số nguyên sao cho tồn tại  thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có , với .

Xét hàm số . Ta có  .

Xét hàm số  có ; 

A picture containing table

Description automatically generated

Ta có  . Suy ra 

hay  

, (,  nguyên).

Nhận thấy  thỏa mãn đề.

Với , ta có .

Nhập hàm, thay các giá trị nguyên của y, kiểm tra nghiệm  dẫn đến chọn .

Vậy  nên có  giá trị nguyên của  thỏa mãn đề.

**Câu 4:** Gọi  là tập hợp các số nguyên  thỏa mãn . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  để tập hợp  có nhiều nhất **** phần tử?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện:  và .

Bất phương trình tương đương với:





.

Xét hàm đặc trưng .

Ta có  với  nên hàm số  đồng biến trên .

Khi đó ta được:

.

Ta có 

.

Diagram

Description automatically generated

Để tập  có nhiều nhất  phần tử thì .

Vậy có **** giá trị nguyên của  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 5:** Có bao nhiêu số nguyên dương  sao cho tồn tại số thực  thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời** **giải**

**Chọn C**

Ta có .

Xét hàm số  trên .

.

(do , ).

**Trường hợp 1:** 

Bảng biến thiên của hàm số  trên :

Line chart

Description automatically generated

; .

Ta có .

Suy ra  thì.

Do đó phương trình  có nghiệm .

Cùng điều kiện  và  nguyên dương, ta có  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Trường hợp 2:** .

Bảng biến thiên của hàm số  trên :

Line chart

Description automatically generated

Với  ta luôn có  nên không tồn tại  thỏa mãn .

**Trường hợp 3:** .

Bảng biến thiên của hàm số  trên :

Diagram

Description automatically generated

Với  ta luôn có  nên phương trình  có nghiệm .

Cùng điều kiện  và  nguyên dương ta có .

Do đó, tập các giá trị nguyên dương của  thỏa mãn yêu cầu bài toán là: .

Vậy có  giá trị nguyên dương của  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 6:** Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương  sao cho tồn tại số thực  thỏa mãn:



**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định: .

Bất phương trình đã cho. Đặt 

Khi đó, bất phương trình trở thành: .

Đặt  suy ra .

Xét hàm số 

Diagram

Description automatically generated with medium confidence

Từ bảng biến thiên suy ra  với mọi  nên .

Khi đó: . Xét hàm số 

Shape

Description automatically generated

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi .

Vậy  nên có  giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 7:** Có bao nhiêu số nguyên  sao cho ứng với mỗi , tồn tại ít nhất mười số nguyên  thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: .

Đặt , bất phương trình trên có dạng , .

Ta có , .

Do đó  nghịch biến trên .

Khi đó .

Để tìm được ít nhất  giá trị  nguyên thuộc  thỏa mãn  thì 

. Có  nguyên,  nên 

Suy ra.

Vậy  nên có  số nguyên  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 8:** Có bao nhiêu số nguyên  sao cho ứng với mỗi , tồn tại ít nhất  số nguyên  thỏa mãn ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: . Ta có 



Đặt , điều kiện 

Bất phương trình trở thành 

 do  nên Hàm số  đồng biến trên  suy ra .

Do đó để có ít nhất  giá trị  nguyên thuộc  thì 

.

Đặt .

Bất phương trình  trở thành .

 nên hàm số  nghịch biến trên .

Mặt khác  bất phương trình  trở thành ,  nghịch biến nên  mà ,  nguyên nên .

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên  thỏa mãn bài toán.

**Câu 9:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của để tồn tại duy nhất giá trị nguyên của sao cho thỏa mãn bất phương trình ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện ban đầu: 

Đầu tiên ta có bất phương trình tương đương với: 

Xét hàm số theo biến tức  trên  ta có:

 trên  nên hàm số  **đồng biến** trên 

Từ đó ta có bất phương trình 

Ta có nhận xét như sau: do tồn tại duy nhất giá trị nguyên của  nên suy ra khoảng  của giá trị cũng chứa duy nhất **một** giá trị nguyên, khi đó giá trị của  sẽ chạy từ  đến , tức , từ đó ta suy ra mệnh đề này chỉ xảy ra khi và chỉ khi:



Xét hàm số  có  có một nghiệm duy nhất

Suy ra phương trình  có không quá hai nghiệm

Từ đó ta giải ra bất phương trình  có chứa 1 giá trị nguyên  tức có 1 giá trị nguyên sao cho thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 10:** Có bao nhiêu số nguyên dương  sao cho ửng với mỗi  tồn tại đúng 8 số thực  thỏa mãn 

**A.** 1024. **B.** 1028. **C.** 1023. **D.** 1026.

**Lời** **giải**

**Chọn D**

Đặt 

Phương trình trở thành:



; có đúng 2 nghiệm nên  có tối đa 3 nghiệm

Nhận thấy  nên 

Vậy 

Mà 3 đường thẳng  đôi một song song

Hàm số  có bảng biến thiên, như sau.

Line chart

Description automatically generated

Vậy phương trình có đúng 8 nghiệm khi và chi khi

**Trường hợp 1:** Các phương trình ;  mỗi phương trình có 4 nghiệm



**Trường hợp 2:** Phương trình  có  nghiệm và phương trình  mỗi phương trình có 2 nghiệm .

Vậy có tất cả 1026 giá trị của .

**Câu 11:** Gọi  là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số  để bất phương trình  có miền nghiệm chứa đúng 4 giá trị nguyên của biến . Số phần tử của  là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện .



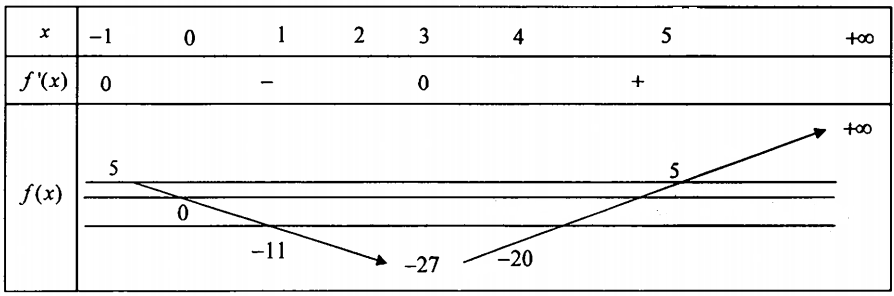
.

Từ Hệ điều kiện trở thành: .

Xét hàm số  trên khoảng .

Ta có: . Đạo hàm .

Bảng biến thiên:



Để bất phương trình  có miền nghiệm chứa đúng

4 giá trị nguyên của biến  khi .

Vậy có  giá trị nguyên của tham số  thỏa mãn bài toán.

**Câu 12:** Cho hàm số . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  thuộc đoạn  để bất phương trình  nghiệm đúng với mọi .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: .

Ta có  đồng biến trên .

Ta thấy:

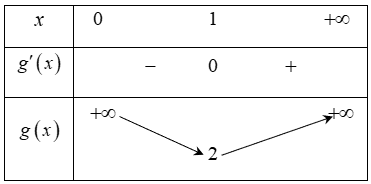


Vậy  là hàm số lẻ.

Khi đó: .

Xét .

Ta có bảng biến thiên của hàm số :



Theo yêu cầu bài toán thì 

Vì số giá trị của  bằng: .

**Câu 13:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ , điểm biểu diễn nghiệm của bất phương trình . Có bao nhiêu điểm  có tọa độ nguyên thuộc hình tròn tâm  bán kính ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: .

Ta có: 

Đặt , . Khi đó ta có: 

Ta thấy hàm số  đồng biến trên  ( do )

Suy ra 

Do  có tọa độ nguyên thuộc hình tròn tâm  bán kính  nên 

Khi đó 

**Trường hợp 1:**  ( thỏa mãn)

**Trường hợp 2:** ( thỏa mãn)

**Trường hợp 3:** ( loại)

Vậy có 2 điểm thỏa mãn yêu cầu là .

**Câu 14:** Có bao nhiêu số nguyên  sao cho ứng với mỗi  tồn tại ít nhất  số nguyên  thỏa mãn 

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có 



Xét hàm  trên 

có  nên hàm số đồng biến trên 

Suy ra , do đó để có ít nhất 6 số nguyên  ta cần 



Xét hàm  trên  có  suy ra hàm  đồng biến trên 

và có , mặt khác , do đó .

**Câu 15:** Cho hai số  là các số nguyên dương khác . Gọi là tích các nghiệm của phương trình: . Hỏi  nguyên và đạt giá trị nhỏ nhất khi

**A. **. **B. **. **C. **. **D. **.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt .

Thay vào phương trình ta được: 



Đây là một phương trình bậc  theo  và 

Do đó phương trình có  nghiệm  và phương trình ban đầu có hai nghiệm ,.

Ta có: 

Vì  nguyên dương và khác 1 nên , suy ra .

Mặt khác  và  nên *P* nguyên và nhỏ nhất khi .

**Câu 16:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  thuộc đoạn  để bất phương trình

 nghiệm đúng với ?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**





Giải hệ phương trình (1)

Để (1) nghiệm đúng với .

Do nguyên thuộc đoạn  nên có giá trị của .

Giải hệ phương trình (2)

Để (1) nghiệm đúng với không có giá trị nào của  thỏa mãn.

Vậy có  giá trị của .