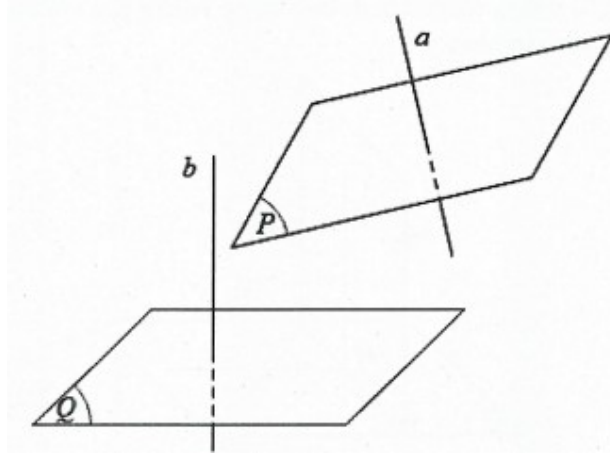


HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A. GIÁO KHOA

1) Góc giữa hai mặt phẳng

a) **Định nghĩa:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



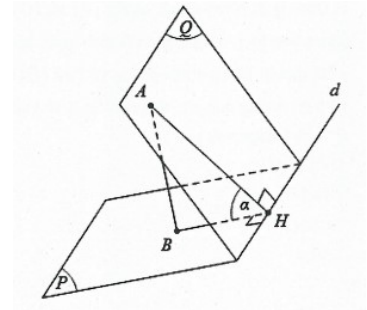
b) Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng:

Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (P) ; (Q) .

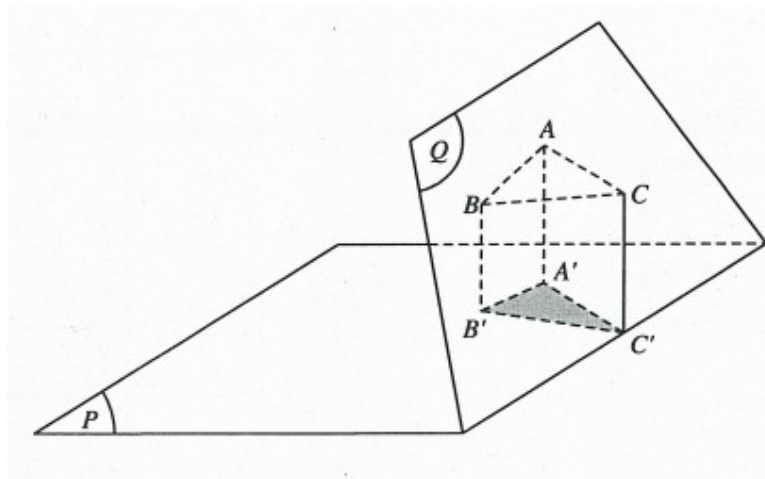
Lấy $A \in mp(Q)$, dựng $AB \perp mp(P)$ ($B \in (P)$).

Vẽ BH vuông góc với d thì AH vuông góc với d .

Vậy $\widehat{AHB} = \alpha$ ($0 < \alpha \leq 90^\circ$) là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .



c) Công thức diện tích hình chiếu:



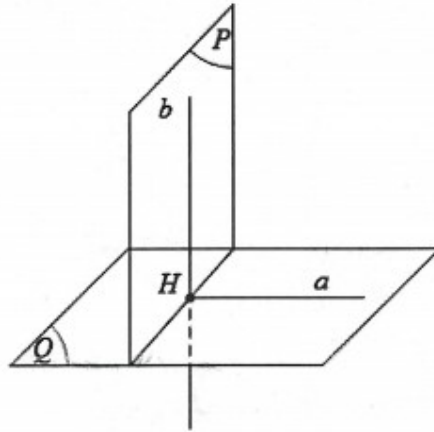
Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì $S' = S \cos \varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') .

Hay như hình vẽ trên ta có $S_{A'B'C'} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$

2) Hai mặt phẳng vuông góc

a) **Định nghĩa:** Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

b) **Định lý 1:** Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

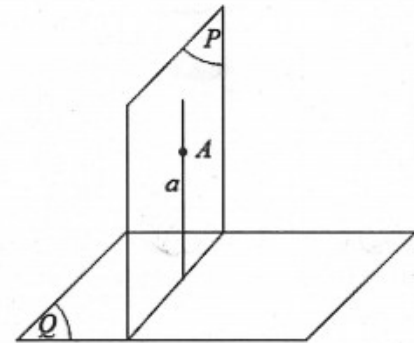


c) **Định lý 2:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P) , vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q) .

- **Hệ quả 1:** Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P) .

Hệ quả 1 được viết gọn là:

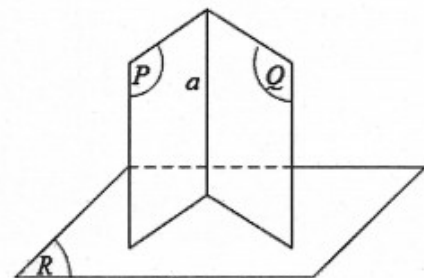
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \perp (Q) \\ A \in a \end{cases} \Rightarrow a \subset (P).$$



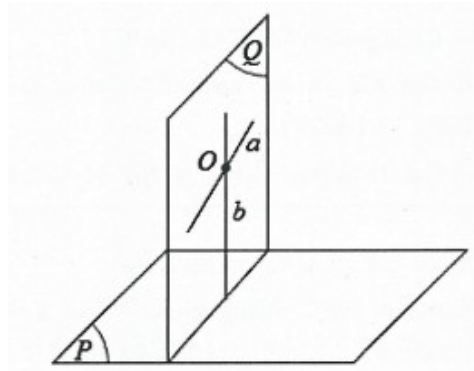
- **Hệ quả 2:** Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và vuông góc với mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Hệ quả 2 được viết gọn là:

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \subset (R).$$



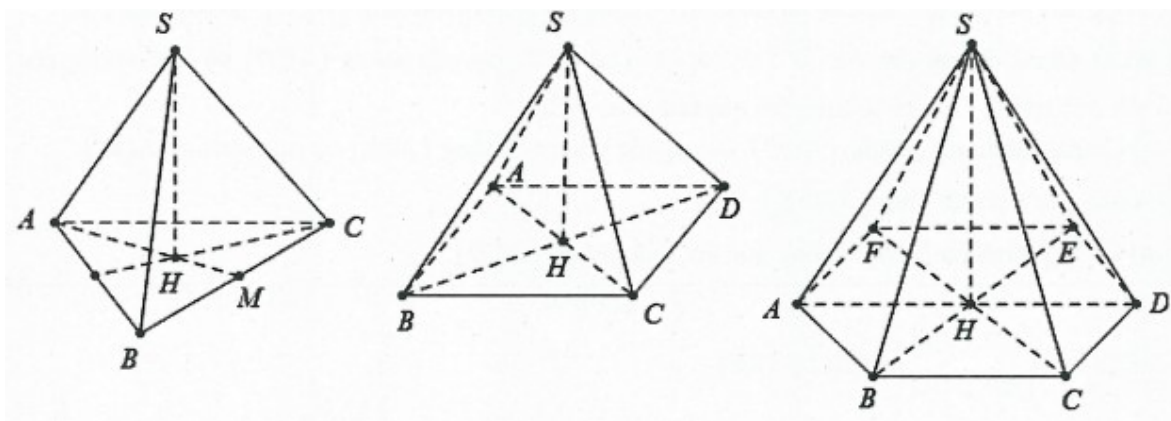
- **Hệ quả 3:** Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .



3) Một số khối hình đặc biệt

- **Hình lăng trụ đứng:** Là hình lăng trụ có tất cả các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- **Hình lăng trụ đều:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
- **Hình hộp đứng:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
- **Hình hộp chữ nhật:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- **Hình lập phương:** Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông.
- **Hình chóp đều:** Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau:

Dưới đây là hình vẽ của hình chóp tam giác đều, tứ giác đều và hình chóp lục giác đều.



II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP VÀ HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

✎ Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp giải:

Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta sẽ chứng minh

- Cách 1: Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) hoặc ngược lại, một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng (Q) và vuông góc với mặt phẳng (P) .
- Cách 2: Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90° .

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC . Chứng minh $(SBC) \perp (AKH)$.

c) Gọi D là giao điểm của HK và BC . Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAC)$.

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp BC$.

Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

b) Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

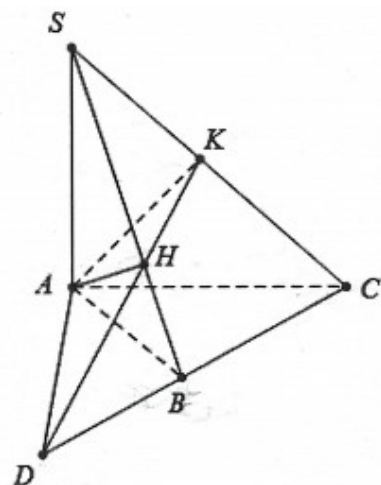
Mặt khác $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow (AHK) \perp (SBC)$.

c) Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Mặt khác $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AKD)$.

Suy ra $AD \perp SC$ mà $SA \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAC)$.

Do vậy $(SAD) \perp (SAC)$.



Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O . Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K . Gọi H là trực tâm của tam giác ACD .

a) Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK) .

b) Chứng minh rằng OH vuông góc với mặt phẳng (ACD) .

Lời giải:

a) Ta có: $\begin{cases} BE \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE)$

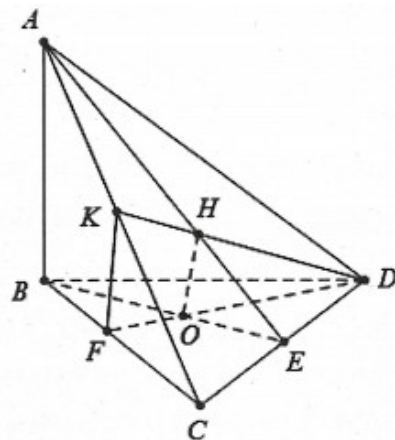
mà $CD \subset (ACD) \Rightarrow (ADC) \perp (ABE)$.

Lại có: $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC$.

Mặt khác

$DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DKF) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$.

b) Do $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AE$.



Ta có:
$$\begin{cases} (ACD) \perp (ABE) \\ (ACD) \perp (DFK) \\ OH = (ABE) \cap (DFK) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD).$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a và $BD = a$. Biết cạnh $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD)$.

b) $(SCD) \perp (SBC)$.

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

b) Dựng $OH \perp SC$

Do $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Suy ra $SC \perp (DHB)$.

Như vậy $\widehat{DHB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

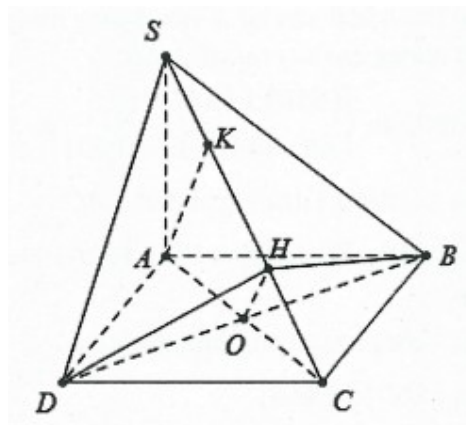
Tam giác ABD đều cạnh a nên

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot OC}{\sqrt{SA^2 + OC^2}} = a \Rightarrow OH = \frac{AK}{2} = \frac{a}{2}.$

Tam giác DHB có đường trung tuyến $HO = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2} \Rightarrow \triangle DHB$ vuông tại H hay $\widehat{DHB} = 90^\circ$.

Do đó $(SCD) \perp (SBC)$.



Dạng 2: Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60° .

a) Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Tính tan góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải:

a) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA)$ do đó góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 60^\circ$

Suy ra $SA = AD \tan 60^\circ = 3a$.

$$\text{Do } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA) \Rightarrow (\widehat{(SBC);(ABC)}) = \widehat{SBA}$$

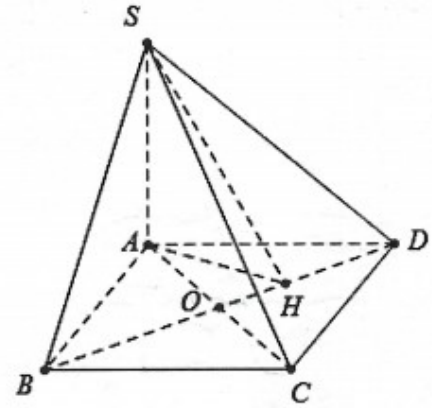
$$\text{Mặt khác } \cos \widehat{SBA} = \frac{AB}{SB} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{\sqrt{9a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{(SBC);(ABC)}) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{b) Dựng } AH \perp BD \Rightarrow BD \perp (SHA) \Rightarrow (\widehat{(SBD);(ABC)}) = \widehat{SHA}.$$

$$\text{Lại có: } AH = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \tan(\widehat{(SBD);(ABCD)}) = \tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = 2\sqrt{3}.$$



Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính cosin góc giữa:

a) (SBC) và (SCD) .

b) (SAD) và (SCD) .

Lời giải:

a) Nhận xét $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a vì $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

$$\text{Dựng } BE \perp SC \Rightarrow SC \perp (BED).$$

Mặt khác: $SA = AC = a \Rightarrow \triangle SAC$ vuông cân tại A suy ra

$$\widehat{ECO} = 45^\circ. \text{ Khi đó } OE = OC \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Lại có: } OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{BEO} = \frac{OB}{OE} = \sqrt{6}.$$

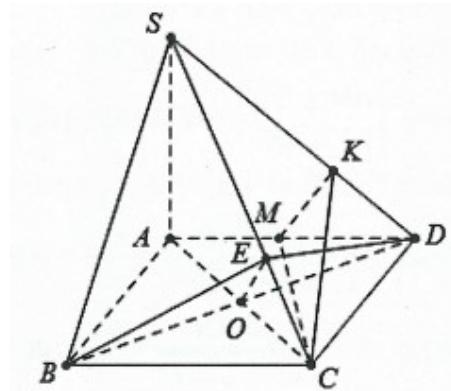
Do $\widehat{BED} = 2\widehat{BEO}$ sử dụng công thức lượng giác hoặc máy

$$\text{tính CASIO ta tính được } \cos \widehat{BED} = \frac{-5}{7}$$

$$\text{Cách khác: Ta có: } BE = DE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \cos \widehat{BED} = \frac{EB^2 + ED^2 - BD^2}{2 \cdot EB \cdot ED} = \frac{-5}{7}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{(SBC);(SCD)}) = \frac{5}{7}.$$

$$\text{b) Dựng } CM \perp AD \text{ ta có: } \begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD) \Rightarrow CM \perp SD.$$



Dựng $CK \perp SD \Rightarrow SD \perp (MKC)$.

Tam giác ACD đều cạnh a nên $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $SA = AD = a \Rightarrow \triangle SAD$ vuông cân tại A suy ra

$$\widehat{SDM} = 45^\circ. \text{ Do đó } MK = MD \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \tan \widehat{MKC} = \frac{CM}{MK} = \sqrt{6} \Rightarrow \cos \widehat{MKC} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{(SCD);(SAD)}) = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho diện tích tam giác MBC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBC) và (ABC) .

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Gọi } \varphi = \widehat{(MBC);(ABC)}$$

Do $\triangle ABC$ là hình chiếu của tam giác MBC trên mặt phẳng (ABC)

$$\text{do đó } \cos \varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{MBC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

