§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

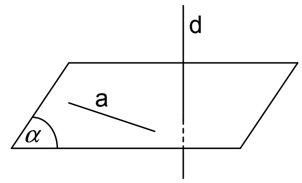
A. GIÁO KHOA

1. Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa:

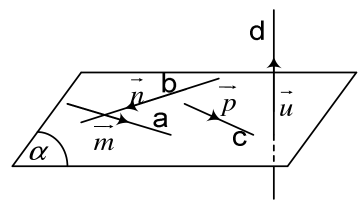
Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α).

Kí hiệu: $d \perp (\alpha)$



Định lí (điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng)

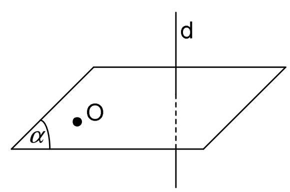
Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α).



2. Các tính chất

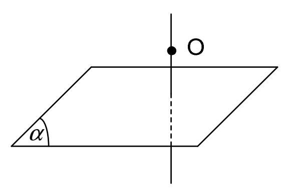
Tính chất 1:

Có duy nhất một mặt phẳng (α) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng d cho trước.



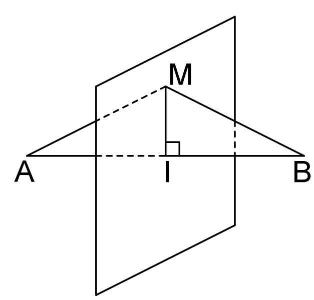
Tính chất 2:

Có duy nhất một đường thẳng d đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (α) cho trước.



Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng

- Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.
- Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó.



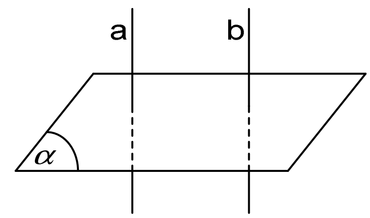
Trục của tam giác

- Trục của tam giác là tập hợp tất cả những điểm trong không gian cách đều ba đỉnh của tam giác.

- Trục của tam giác là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác tại tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

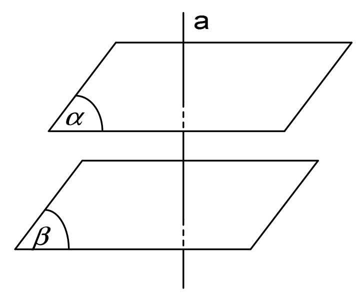
3. <u>Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng</u>

Tính chất 3:



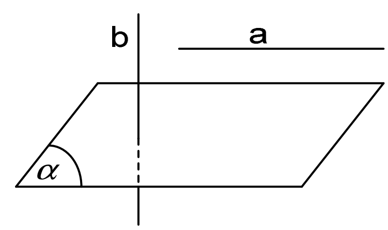
- $\left.\begin{matrix} a//b \\ (\alpha)\perp a \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\alpha)\perp b$
- $\left.\begin{matrix} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\alpha) \\ a\not\equiv b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a//b$

Tính chất 4:



- $\left.\begin{matrix} (\alpha)//(\beta) \\ a\perp(\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\perp(\beta)$
- $\left.\begin{matrix} (\alpha)\perp a \\ (\beta)\perp a \\ (\alpha)\not\equiv(\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$

Tính chất 5:



- $\left.\begin{matrix} a//(\alpha) \\ b\perp a \end{matrix}\right\} \not\Rightarrow$
- $\left.\begin{matrix} a//(\alpha) \\ b\perp(\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\perp b$
- $\left.\begin{matrix} a\perp b \\ (\alpha)\perp b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a//(\alpha)$ hoặc $a\subset(\alpha)$

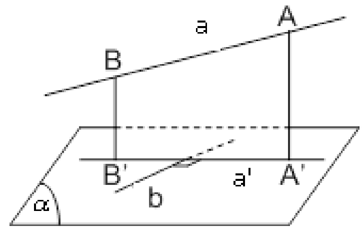
4. <u>Định lí ba đường vuông góc</u>

Phép chiếu vuông góc:

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) theo phương l vuông góc với mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α).

Định lí ba đường vuông góc:

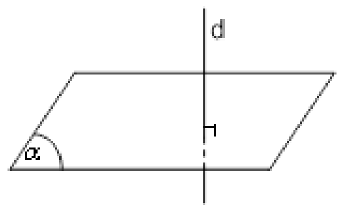
Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) và đường thẳng b nằm trong (α). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a’ của a trên (α).



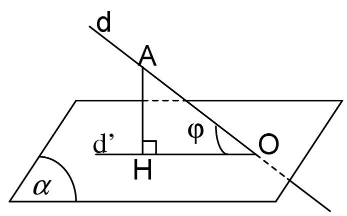
5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa:

Nếu đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90º.



Nếu đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa d và hình chiếu d’ của nó trên (α) được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).



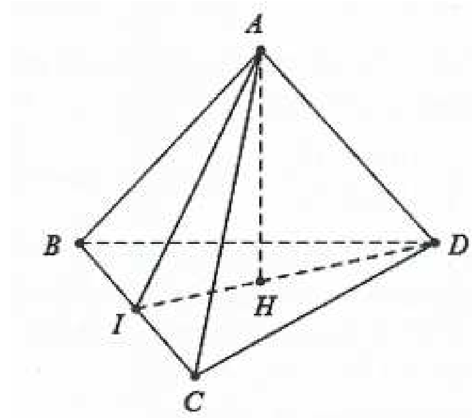
B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho tứ diện *ABCD* có hai mặt *ABC* và *BCD* là hai tam giác cân có chung đáy *BC*. Điểm *I* là trung điểm của cạnh *BC*.

a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$.

b) Gọi *AH* là đường cao trong tam giác *ADI*. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Lời giải:



a) Do các tam giác ABC và BCD là hai tam giác cân nên tại A và D ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

Do đó $BC \perp (AID)$.

b) Do AH là đường cao trong tam giác ADI nên $AH \perp DI$.

Mặt khác $BC \perp (AID) \Rightarrow BC \perp AH$.

Do đó $AH \perp (BCD)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.

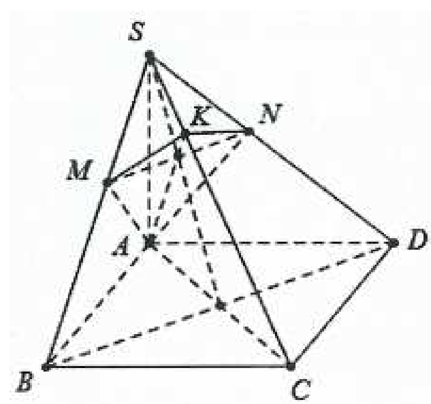
b) Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD)$.

c) Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN \,//\, BD$.

d) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN). Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.



Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$.

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $CM = DN$. Mặt khác tam giác SBD cân tại đỉnh S nên $MN \,//\, BD$.

d) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do $MN \,//\, BD \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

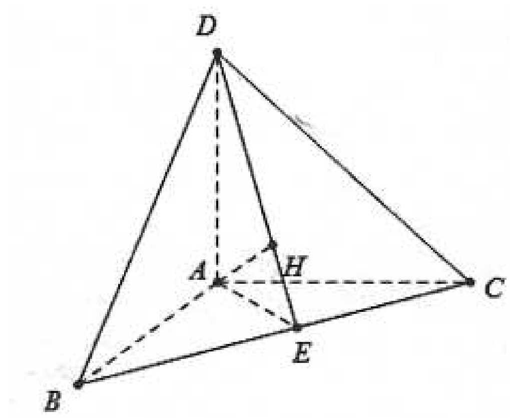
a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác BCD.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.

c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Lời giải:

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) thì $AH\perp(BCD)$.



Ta có: $\begin{cases}AD\perp AB\\AD\perp AC\end{cases}\Rightarrow AD\perp(ABC)\Rightarrow AD\perp BC$.

Mặt khác $AH\perp BC\Rightarrow BC\perp(ADH)\Rightarrow BC\perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH\perp CD$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD.

b) Gọi $E=DH\cap BC$, do $BC\perp(ADH)\Rightarrow BC\perp AE$.

Xét ΔABC vuông tại A có đường cao AE ta có: $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$.

Lại có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$ (đpcm).

c) Đặt $AB=x$; $AC=y$ và $AD=z$. Ta có: $\begin{cases}BC=\sqrt{x^2+y^2}\\BD=\sqrt{x^2+z^2}\\CD=\sqrt{y^2+z^2}\end{cases}$

Khi đó $\cos B=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2.BC.BD}=\frac{x^2}{BC.BD}>0\Rightarrow\widehat{CBD}<90°$

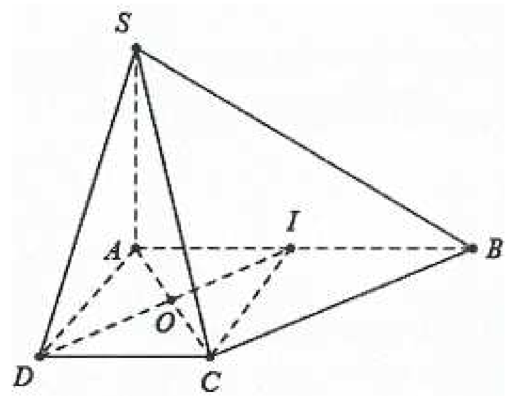
Ví dụ 4. Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD=CD=\frac{AB}{2}$.

a) Gọi I là trung điểm của đoạn AB, chứng minh $CI\perp AB$ và $DI\perp SC$.

b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải:

a) Đặt $AB=2a\Rightarrow AD=CD=a$.



Do $AB = 2CD \Rightarrow AI = AD = CD = CI = a$.

Khi đó $AICD$ là hình vuông cạnh a.

Do $CI \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp DI \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC$.

b) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAD, \Delta SAB$ vuông tại S.

Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên ΔSCD vuông tại D.

Xét ΔACD có trung tuyến $CI = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AC$.

Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \Delta SCB$ vuông tại C.

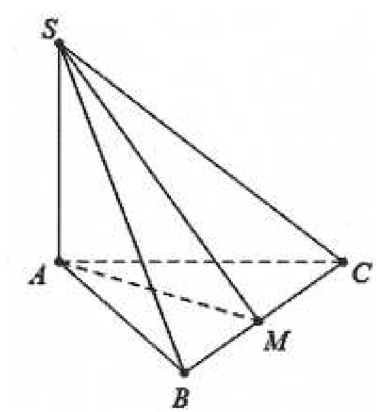
Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, SB tạo với đáy một góc $60°$ và M là trung điểm của BC.

a) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

b) Tính cosin góc giữa SM và mặt phẳng (ABC).

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{SBA} = 60°$.



Do đó $SA = AB \tan \widehat{SBA} = a \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a; \widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCA}$.

Khi đó: $\cos \widehat{SCA} = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

b) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SM;(ABC))} = \widehat{SMA} = \varphi$.

Ta có: $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

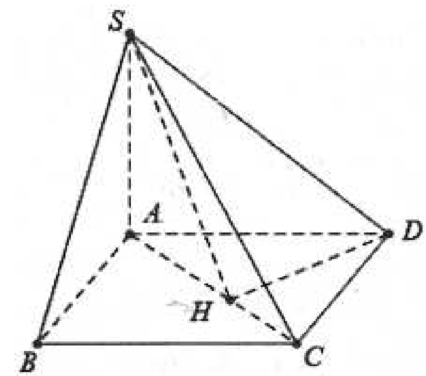
Khi đó $\cos \varphi = \dfrac{AM}{SM} = \dfrac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{\sqrt{133}}{19}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc tạo bởi: SC và mặt phẳng (SAB); SC và mặt phẳng (SAD).

Lời giải:

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 60°$.

Lại có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SA = AC \tan 60° = 2a\sqrt{3}$.



Khi đó $\begin{cases} SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{13} \\ SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{15} \\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4a \end{cases}$

Do $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC;(SAB))} = \widehat{CSB}$.

Mặt khác $\cos\widehat{CSB} = \dfrac{SB}{SC} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Tương tự $CD \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{(SC;(SAD))} = \widehat{CSD}$ và $\cos\widehat{CSD} = \dfrac{SD}{SC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp *S.ABC*, có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh $2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa *SA* và mặt phẳng (SBC).

Lời giải:

Từ *A* kẻ *AK* vuông góc với *BC* tại *K*.

Ta có: $SA \perp BC$ và $AK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAK)$.

Kẻ $AH \perp SK, H \in SK$. Mà $BC \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASH} = \widehat{ASK}$.

Tam giác *SAK* vuông tại *A*, có $SA = AK = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ tam giác *SAK* vuông cân tại *A* nên $\widehat{ASK} = 45°$.

Vậy $\widehat{(SA;(SBC))} = 45°$.