

Chương 4: GIỚI HẠN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

GIÁO KHOA

I. Dãy số có giới hạn 0

1. Định nghĩa

Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Ta viết: $\lim(u_n) = 0$ hoặc $\lim u_n = 0$ hoặc $u_n \rightarrow 0$

Nhận xét:

$$\lim 0 = 0$$

$$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$$

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \lim \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

2. Các định lí

Định lí 1: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Nếu $|u_n| \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 2: Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$

II. Dãy số có giới hạn hữu hạn

1. Định nghĩa: $\lim u_n = L (L \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \lim (u_n - L) = 0$

2. Các định lí

Định lí 3: $\lim C = C$ (C là hằng số)

Định lí 4: Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó

$$\lim |u_n| = |L| \text{ và } \lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$$

$$\text{Nếu } u_n \geq 0 \text{ với mọi } n \text{ thì } L \geq 0 \text{ và } \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$$

Định lí 5: Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và C là một hằng số. Khi đó:

$$\lim (u_n \pm v_n) = L \pm M$$

$$\lim (u_n \cdot v_n) = L \cdot M$$

$$\lim (C \cdot u_n) = C \cdot L$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, u_1q^2, \dots, u_1q^n, \dots$ có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân này là:

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \lim S_n = \lim \left(u_1 \frac{1-q^n}{1-q} \right) = \frac{u_1}{1-q}$$

III. Dãy số có giới hạn vô cực

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Ta viết: $\lim(u_n) = +\infty$ hoặc $\lim u_n = +\infty$ hoặc $u_n \rightarrow +\infty$

Nhận xét:

$$\lim n^k = +\infty \text{ (k nguyên dương)}$$

$$\lim \sqrt[k]{n} = +\infty \text{ (k nguyên dương)}$$

$$\lim q^n = +\infty \text{ (q > 1)}$$

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Ta viết: $\lim(u_n) = -\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ hoặc $u_n \rightarrow -\infty$

Nhận xét:

$$\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$$

$$\text{Nếu } \lim |u_n| = +\infty \text{ thì } \lim \frac{1}{u_n} = 0$$

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho bởi bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Quy tắc 3: Nếu $\lim u_n = L \neq 0, \lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được

cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

PHƯƠNG PHÁP TÍNH GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ (u_n)

Dạng 1: u_n có dạng phân thức mà tử và mẫu đều chứa các lũy thừa của n

Phương pháp: Rút lũy thừa bậc cao nhất ở tử, mẫu làm nhân tử chung rồi giản ước.

Dạng 2: u_n có dạng phân thức mà tử và mẫu đều chứa $a^n, b^n, \dots$

Phương pháp: Đặt a^n với a là cơ số có trị tuyệt đối lớn nhất ở tử, mẫu làm nhân tử chung rồi giản ước.

Dạng 3: u_n là biểu thức chứa n dưới dấu căn thì có thể nhân và chia với biểu thức liên hợp.

VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{-3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 7}.$

b) $\lim \frac{n^3 + 4}{5n^3 + n + 8}.$

c) $\lim \frac{(n+1)(2n-1)}{(3n+2)(n+3)}.$

Lời giải:

a) $\lim \frac{-3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 7} = \lim \frac{-3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} = -\frac{3}{2}.$

b) $\lim \frac{n^3 + 4}{5n^3 + n + 8} = \lim \frac{1 + \frac{4}{n^3}}{5 + \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}} = \frac{1}{5}.$

c) $\lim \frac{(n+1)(2n-1)}{(3n+2)(n+3)} = \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{1.2}{3.1} = \frac{2}{3}.$

$\lim \frac{n\sqrt{n^2+1} + 2n^2 + 3}{3n^2 + n + 1} = \lim \frac{\frac{n\sqrt{n^2+1} + 2n^2 + 3}{n^2}}{\frac{3n^2 + n + 1}{n^2}} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 2 + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{1+2}}{3} = 1.$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{3^n - 4^n + 5^n}{3^n + 4^n - 5^n}.$

b) $\lim \frac{3^n - 4^{n+1}}{3^{n+2} + 4^n}.$

c) $\lim \frac{3^n + 6^n - 4^{n+1}}{3^n + 6^{n+1}}.$

Lời giải

a) Nhận xét $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n = 0$

Do đó, $\lim \frac{3^n - 4^n + 5^n}{3^n + 4^n - 5^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n - 1} = \frac{0 - 0 + 1}{0 + 0 - 1} = -1.$

b) $\lim \frac{3^n - 4^{n+1}}{3^{n+2} + 4^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4}{9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = \frac{0 - 4}{9 \cdot 0 + 1} = -4.$

c) $\lim \frac{3^n + 6^n - 4^{n+1}}{3^n + 6^{n+1}} = \lim \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6} = \frac{0 + 1 - 4 \cdot 0}{0 + 6} = \frac{1}{6}.$

Ví dụ 3. Cho $u_n = \frac{(n-1)(3n+2)\sqrt{n^2+1}}{(2n^2-6n+3)\sqrt{4n^2+5}}; \forall n \geq 1$. Biết $\lim u_n = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối

giản. Tính $P = a^2 + 2b$.

A. $P = 17$.

B. $P = 26$.

C. $P = 25$.

D. $P = 18$.

Lời giải:

Ta có $\lim u_n = \lim \frac{(n-1)(3n+2)\sqrt{n^2+1}}{(2n^2-6n+3)\sqrt{4n^2+5}} = \lim \frac{(3n^2-n-2)\sqrt{n^2+1}}{(2n^2-6n+3)\sqrt{4n^2+5}}$

$$= \lim \frac{\left(3 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right) \cdot |n| \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{\left(2 - \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2}\right) \cdot |n| \sqrt{4 + \frac{5}{n^2}}} = \lim \frac{\left(3 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{\left(2 - \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2}\right) \sqrt{4 + \frac{5}{n^2}}} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4} \text{ vì } \lim \frac{k}{n^2} = 0; \lim \frac{h}{n^2} = 0.$$

Mà $\lim u_n = \frac{a}{b} = \frac{3}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \longrightarrow P = 3^2 + 2 \cdot 4 = 17$. **Chọn A.**

Ví dụ 4. Cho $u_n = \frac{4^n + 3 \cdot 2^{2n} + 2 \cdot 3^{n-1}}{5 \cdot 4^{n-2} + 2^n}; \forall n \geq 1$. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $P = a - 3b^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- A. $(-9; -7)$. B. $(-7; -5)$. C. $(-12; -9)$. D. $(-5; -2)$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3 \cdot 2^{2n} + 2 \cdot 3^{n-1}}{5 \cdot 4^{n-2} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3 \cdot 4^n + \frac{2}{3} \cdot 3^n}{\frac{5}{16} \cdot 4^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 4^n + \frac{2}{3} \cdot 3^n}{\frac{5}{16} \cdot 4^n + 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{5}{16} + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 4 : \frac{5}{16} = \frac{64}{5} \text{ vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0. \text{ Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{a}{b} = \frac{64}{5} \Rightarrow \begin{cases} a = 64 \\ b = 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $P = a - 3b^2 = 64 - 3 \cdot 5^2 = -11 \in (-12; -9)$. **Chọn C.**

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n \right)$. b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right)$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt{n^2 + n + 1}}{3n + 1}$.

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 3n^2 - n^3}{\sqrt[3]{(n^3 - 3n^2)^2} + n^2 - n \cdot \sqrt[3]{n^3 - 3n^2}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}}}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty \text{ thì: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{3}{n}\right)^2} + 1 - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} \right) = 1$$

$$\text{Do đó, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2} - n \right) = -3$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - n \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 + 2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3 - n^3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 - 2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} \end{aligned}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty \text{ thì: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left((n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3} \right) = \infty; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt{n^2 + 2} \right) = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(n^3 + 3)^{\frac{2}{3}} + n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 + 3}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n + \sqrt{n^2 + 2}} = 0. \text{ Do đó, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 3} - \sqrt{n^2 + 2} \right) = 0$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt{n^2 + n + 1}}{3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{3 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{Khi } n \rightarrow \infty \text{ thì: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \right) = 1 + 1 = 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right) = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 5. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dạng phân số

a) 0,3211111...

b) 0,313131...

c) 3,1525252....

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$$\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \dots = \frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{900} \text{ suy ra } 0,321111... = \frac{32}{100} + \frac{1}{900} = \frac{289}{900}$$

b) Ta có $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10^2}$ nên

$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots = \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{99} \text{ suy ra } 0,313131... = 31 \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right) = 31 \cdot \frac{1}{99} = \frac{31}{99}$$

c) Ta có $\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10^2}$ nên

$$\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \dots = \frac{\frac{1}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{1}{990} \text{ suy ra}$$

$$3,1525252.... = \frac{31}{10} + 52 \left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \dots \right) = \frac{31}{10} + \frac{52}{990} = \frac{3121}{990}$$

Ví dụ 6. Một cấp số nhân lùi vô hạn có tổng bằng 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai bằng $\frac{3}{4}$, số hạng đầu là một số dương. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi này.

Lời giải

$$\text{Ta có } S = \frac{u_1}{1 - q} \Rightarrow u_1 = 12(1 - q). \text{ Và } u_1 - u_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow u_1(1 - q) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Suy ra } 12(1-q)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{3}{4} \\ q = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Ta chỉ chọn $q = \frac{3}{4}$ vì $q < 1$, khi đó $u_1 = 12\left(1 - \frac{3}{4}\right) = 3$.