

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. GIÁO KHOA

1. Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa:

Góc φ giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là góc giữa hai đường thẳng Δ'_1 và Δ'_2 cùng đi qua một điểm O và lần lượt song song (hoặc trùng) với Δ_1 và Δ_2 .

Nhận xét:

- Để xác định góc φ giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 , ta có thể lấy điểm O nói trên thuộc một trong hai đường thẳng, sau đó vẽ đường thẳng qua O song song với đường thẳng còn lại.
- Góc φ giữa hai đường thẳng không vượt quá 90° .
- Nếu $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của các đường thẳng Δ_1, Δ_2 thì

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

2. Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa:

Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Kí hiệu: $a \perp b$ hoặc $b \perp a$

Nhận xét:

- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của a, b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\left. \begin{matrix} a \parallel b \\ c \perp a \end{matrix} \right\} \Rightarrow c \perp b$

Chú ý: $\left. \begin{matrix} a \perp c \\ b \perp c \end{matrix} \right\} \nRightarrow a \parallel b$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a$; $AC = a\sqrt{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

Lời giải:

Cách 1: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB và AC .

Khi đó $\begin{cases} MP \parallel SC \\ MN \parallel AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SC; AB)} = \widehat{(MP; MN)}.$

Ta có $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; MP = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}.$

Mặt khác ΔSAC vuông tại $S \Rightarrow SP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

$BP^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BP = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$

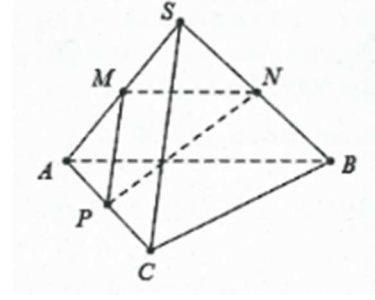
Suy ra $PN^2 = \frac{PS^2 + PB^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow NP = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Khi đó $\cos \widehat{NMP} = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2 \cdot MN \cdot MP} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMP} = 120^\circ \Rightarrow \varphi = \widehat{(SC; AB)} = 60^\circ.$

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC}$

$= \frac{1}{2}(SB^2 + SC^2 - AC^2) - \frac{1}{2}(SA^2 + SC^2 - AB^2) = -\frac{a^2}{2}.$

Suy ra $\cos(SC; AB) = \frac{\left| \frac{-a^2}{2} \right|}{a \cdot a} = \frac{1}{2} \Rightarrow (SC; AB) = 60^\circ.$



Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP .

- A. 60° B. 90° C. 30° D. 45°

Lời giải

Để thấy MN là đường trung bình trong tam giác ABC nên

$MN \parallel AC \Rightarrow \widehat{(MN; AP)} = \widehat{(AC; AP)}.$

Lại có $AC = a\sqrt{2}, CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$AP = \sqrt{A'P^2 + AA'^2} = \sqrt{A'D'^2 + D'P^2 + AA'^2} = \frac{3a}{2}$

Do đó $\cos \widehat{CAP} = \frac{AP^2 + AC^2 - CP^2}{2 \cdot AP \cdot AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{CAP} = 45^\circ = \widehat{(MN; CP)}. \text{ Chọn D.}$

