

§4. CẤP SỐ NHÂN

A. GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân} \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

u_1 : số hạng đầu của cấp số nhân

q : công bội của cấp số nhân

2. Các công thức

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q . Khi đó:

- Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ ($q \neq 0$)
- Tổng của n số hạng đầu tiên:
 - Nếu $q = 1$: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 + u_1 + \dots + u_1 = n \cdot u_1$
 - Nếu $q \neq 1$: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$
- $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

Lưu ý: Ba số a, b, c lập thành cấp số nhân khi và chỉ khi $ac = b^2$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3, q = \frac{1}{2}$. Hỏi $\frac{3}{512}$ là số hạng thứ mấy

- A. 11 B. 9 C. 10 D. 12

Lời giải:

$$\text{Ta có } u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{3}{512} = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{512}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 512 \Leftrightarrow n-1 = 9 \Leftrightarrow n = 10$$

Do đó $\frac{3}{512}$ là số hạng thứ 10. **Chọn C**

Ví dụ 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_3 = 16, u_2 + u_4 = 40$. Tính u_6 , biết $q < 1$

- A. $u_6 = 8$ B. $u_6 = 128$ C. $u_6 = 2$ D. $u_6 = 32$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_3 = u_1 \cdot q^2 = 16 \\ u_2 + u_4 = u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^3 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^2 = 16 \\ u_1 \cdot (q + q^3) = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{q+q^3} = \frac{16}{40} \Rightarrow \frac{q}{1+q^2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} q=2 \\ q=\frac{1}{2} \Rightarrow q=\frac{1}{2} \text{ thỏa mãn} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 \cdot \frac{1}{4} = 16 \Rightarrow u_1 = 64 \Rightarrow u_6 = u_1 \cdot q^5 = 2. \text{ Chọn C}$$

Ví dụ 3. Cho $x+1; x+y-3; 3y-6$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng; $y+3; x+y+5; 5x-1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{x}{y} < 1$ B. $x > 8, y > 7$ C. $\frac{y}{x+1} > 1$ D. $x+2y < 21$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x+1) + (3y-6) = 2(x+y-3) \\ (y+3)(5x-1) = (x+y+5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-1 \\ (x+2)(5x-1) = (2x+4)^2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } 5x^2 + 9x - 2 = 4x^2 + 16x + 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -2 \end{cases}$$

Mà $x > 0 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = 8$. **Chọn B**

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có các cạnh AB, AC, BC theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ B. $q = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$ C. $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ D. $q = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}$

Lời giải:

$$\text{Ta có } AC = q \cdot AB \Rightarrow q = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{Lại có } AB \cdot BC = AC^2 = BC^2 - AB^2 \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \left(\frac{BC}{AB} \right)^2 - 1 \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{5})^2 AB^2 = 4BC^2 = 4(AB^2 + AC^2)$$

$$\Rightarrow (2+2\sqrt{5})AB^2 = 4AC^2 \Rightarrow q = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}. \text{ Chọn C}$$